

كتاب الاصول الهندسيّة

وهو مشتمل على

كتب اقليدس الستّة

ومضافاتٍ في تربيع الدائرة

وهندسة الاجسام

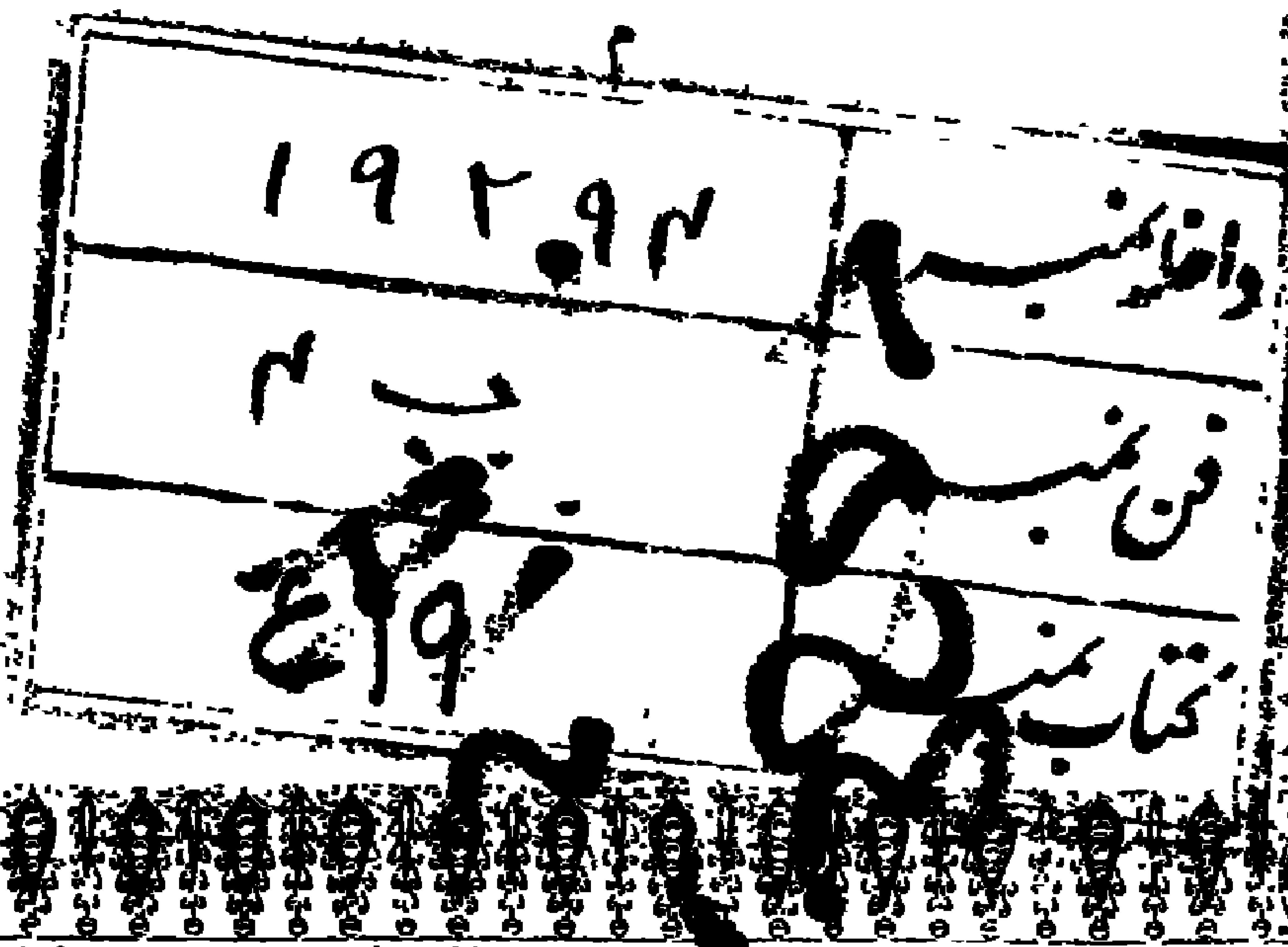
واصول قياس المثلثات المستوية والكروية

ترجمة

كرنيليوس فان ديك

مقدمة

الحمد لله الذي لا تحيط بدائرة علمه الاوهام. وهو المنزَّه عن مقادير الاشكال ومساحة الاجسام. أمَّا بعدُ فيقول العبد الفقير الى ربهِ القدير كرنيلس ڤان دَيْك الاميركاني انني لما رايت افتقار المدارس في هذه البلاد الى الكتب الهندسيَّة التي بها تتم الفائدة المقصودة منها اعتنيت بترجمة هذا الكتاب المفيد وهو مشتملٌ على كتب اقليدس الستَّة ومضافاتٍ اخرى في تربيع الدائرة وهندسة الاجسام واصول قياس المثلَّثات المستوية والكرويَّة. والله المسؤول ان ينفع بهِ الطالبين ويفيد الراغبين ويجعلهُ مخلصًا لوجههِ الكريم وهو ارحم الراحمين



نبذة تاريخية

ان الفيلسوف اقليدس صاحب كتاب الاصول الهندسية عاش في بلاد مصر ق م نحو ٢٨٠ سنة في عصر الملك بطليموس لاغوس. قيل وُلد في الاسكندرية وقيل مولده مجهول وصار معلم العلوم التعليمية في مدرسة الاسكندرية وكثر تلاميذه ومنهم الملك بطليموس نفسهُ. قيل سألهُ الملك يوماً ألا يُوجَد سبيل اسهل لمعرفة التعاليم فقال لا توجد سكة سلطانية لذلك. ولهُ مؤلفات في علم الهيئة والبصريات واشهر مؤلفاته الاصول الهندسية ولم تزل الى ايامنا هذه افضل ما صُنِّف في هذا الفن. غير انه قد دخل عليها بعض التغيرات والنقائص على تمادي الاجيال. وقد رجَّعها الى اصلها المعلم سِمْسُون الاسكوتسيّ ثم اضاف اليها بعض المعلمين عدَّة قضايا لكي تصير بذلك اكثر مناسبة لحال التعاليم في هذا العصر. واحسن نُسَخها واكثرها فائدةً النسخة التي اعتنى بها المعلم بلايفار الاسكوتسيّ وهي المعوَّل عليها في هذه الترجمة

وبالله التوفيق

اصول الهندسة

الكتاب الاول

ايضاح الاصطلاحات والعلامات

١ الهندسة علمٌ موضوعه قياس المقادير. والمقدار هو كل ما لهُ واحدٌ من ثلاثة اشياء وهي طولٌ وعرضٌ وعمقٌ

٢ قد استعملت في علم الهندسة اصطلاحاتٌ شتّى كالحدّ والقضية والاوليّة والنظريّة والعمليّة والسابقة والتعليقة والفرع وغير ذلك مما سترى

٣ الحد هو ايضاح معنى لفظة اصطلاحيّة. ويجب ان يكون تامًّا لا اشكال فيه وان تكون الفاظهُ المفردة اعتياديّةً مفهومةً

٤ الاوليّة قضية واضحة لا تقبل زيادة ايضاح كقولهم الكل اعظم من جزءٍ

٥ النظريّة قضيّة محتاجة الى برهان لاثبات صحتها كقولهم ان الزوايا الثلاث من كل مثلّث تعدل قائمتين

٦ البرهان المستقيم هو ما اثبت صحة قضية ويُسمّى ايضًا البرهان الايجابي

٧ البرهان الغير المستقيم هو ما اثبت صحة قضية باثبات محاليّة فسادها ويسمى ايضًا البرهان السلبي والتحويل الى المحال

٨ العمليّة هي قضية حاوية عملاً مطلوبًا اتمامهُ كقولهم علينا ان نرسم خطًّا عمودًا على آخر او ان نقسم عددًا الى اجزاء مفروضة

[illegible]حلُّ عمليّةٍ هو استخراج جوابها. فان عُبّر عن ذلك باعدادٍ سُمّي حلاًّ عدديًّا او بمبادئ[illegible]هندسيّةٍ فهندسيًّا. وان تمّ بواسطة امتحانات فميكانيكيًّا او صناعيًّا

[illegible]السابقة [illegible]ضيةٌ استعدادية ذُكِرَت قبل اخرى لكي يُختصَر بها برهان الاخرى

١١ الفرع نتيجة تُستنتج بالاستقامة من قضية سابقة لها

١٢ التعليقة قول مبني على قضيةٍ سبقته

١٣ الإفتراض هو ان يسلَّم بصحة قضيةٍ لكي يبنى عليها برهان قضية اخرى

١٤ المقتضيات او الممكنات عمليات يسلَّم بامكان عملها من اول وهلةٍ

١٥ النظام هو صناعة وضع جملة براهين متتابعة على ترتيبٍ مناسب للبحث عن صحة قضية او فسادها او لبرهانها للغير

١٦ التحليل هو استعلام صحة قضية بالتأخُّر من القضية نفسها الى مبدإٍ معلوم ويسمى ايضًا النظام التحليلي وهو المستعمل في علم الجبر والمقابلة

١٧ التركيب هو التقدم شيئًا فشيئًا من مبدإٍ معلوم بسيط الى النتيجة ويسمى ايضًا النظام التركيبي وهو المستعمل في علم الهندسة

١٨ العلامات المستعملة في هذا الكتاب قد تقدم شرحها في كتاب علم الجبر والمقابلة فعليك بالمراجعة

حدود

١ النقطة شيءٌ لهُ وضعٌ فقط وليس لهُ طول ولا عرض ولا عمق

٢ الخطّ طولٌ بدون عرض او عمق

فرعٌ. نهايتا خطٍ نقطتان وموضع تقاطُع خطَّين نقطة

٣ خطَّان لا يتوافقان في نقطتين منهما بدون ان يتوافقا بالكلّيَّة يُسمَّيان مستقيمين. وقيل ايضًا الخط المستقيم هو البعد الاقرب بين نقطتين

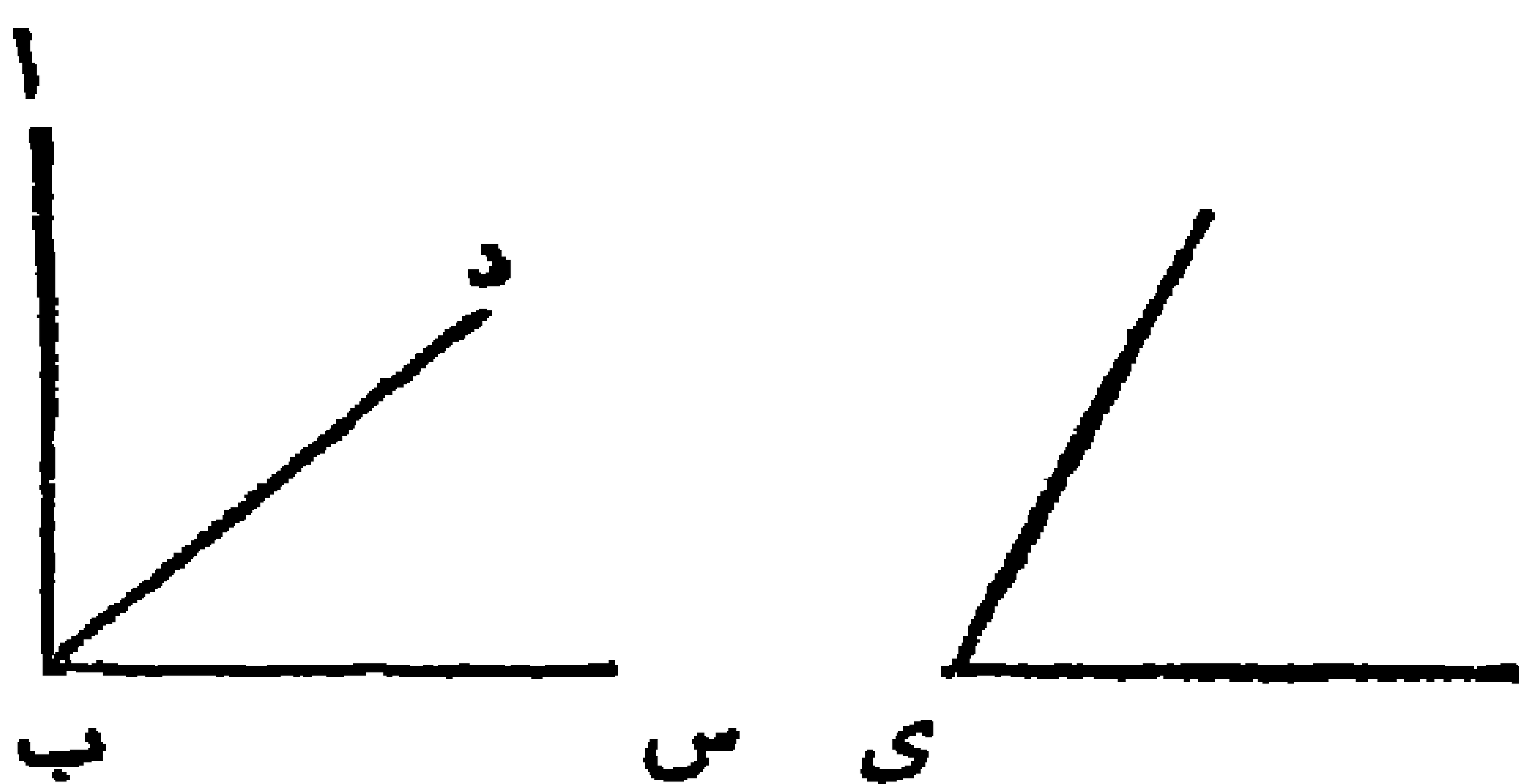
فرعٌ. خطان مستقيمان لا يحيطان بمساحةٍ ولا يتطابقان في جزء منهما ان لم يتطابقا بالكلّيَّة

٤ السطح او البسيط ما كان لهُ طول وعرض بدون عمق

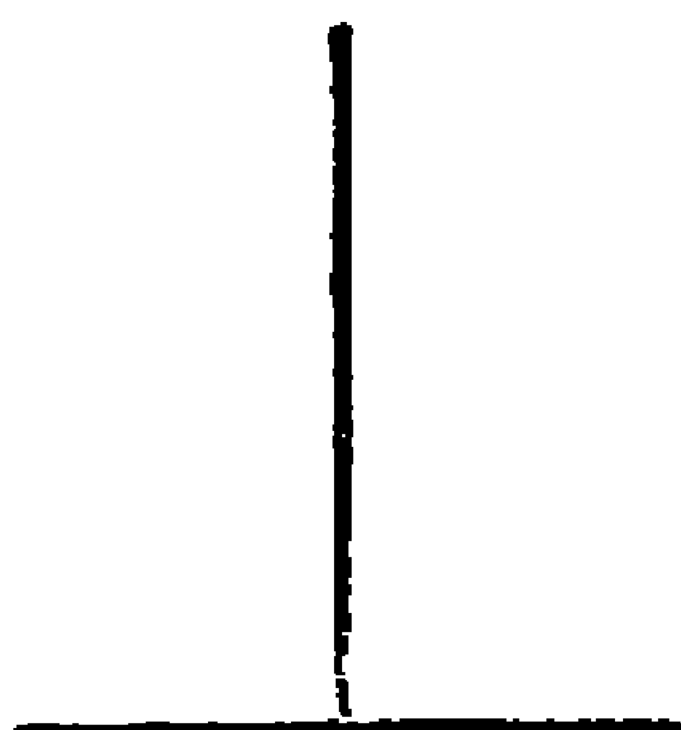
فرعٌ. نهايات سطحٍ خطوطٌ. وموضع تقاطع سطحين خطٌّ

٥ السطح المستوي هو سطحٌ اذا فُرِضَت فيهِ نقطتان فالخط المستقيم الموصل بينهما يقع جميعه في ذلك السطح

٦ الزاوية المستقيمة البسيطة هي انفراج خطَّين مستقيمين التقيا بنقطةٍ وليسا على استقامةٍ واحدةٍ



تنبيهٌ. متى التقت زاويتان فاكثر في نقطةٍ واحدةٍ كما يُرَى عند ب فكل واحدة منها تتعيَّن بثلاثة احرفٍ اوسطها عند راس الزاوية. فالزاوية الواقعة بين خط ا ب وخط د ب تسمى زاوية ا ب د او د ب ا والواقعة بين د ب وس ب تسمى د ب س او س ب د واما الزاوية المفردة فيُدَلُّ عليها بحرف واحد كالزاوية عند ى



٧ اذا قام خطٌّ مستقيم على آخر مستقيمٍ واحدث زاويتين متساويتين على جانبيهِ فالخط القائم يسمى عمودًا وكلُّ زاويةٍ منهما قائمة

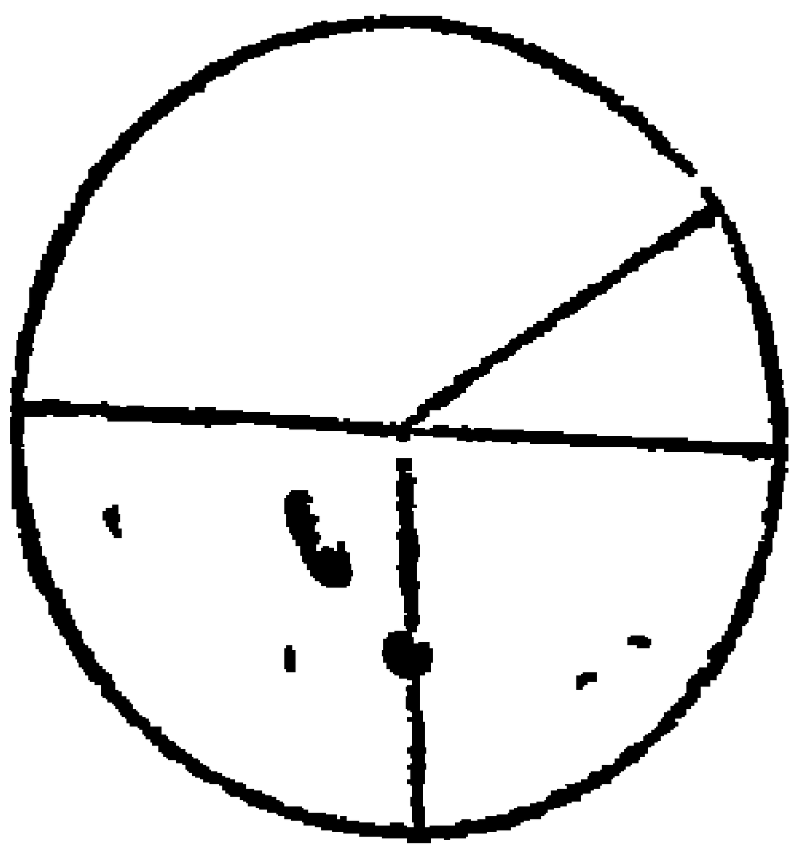
٨ الزاوية المنفرجة هي كل زاوية اكبر من قائمة



٩ الزاوية الحادَّة هي كل زاوية اصغر من قائمة

١٠ الشكل هيئةٌ محدودة. ومساحة الشكل هي الفسحة المنحصرة

في حدوده بدون نظر الى ماهيَّة تلك الحدود



١١ الدائرة شكل مستوٍ يحيط بهِ خط واحد ويسمى المحيط. وفي وسطهِ نقطة جميع الخطوط المستقيمة الخارجة منها الى المحيط متساوية

١٢ النقطة المشار اليها تسمى مركز الدائرة

١٣ قُطرُ الدايرة خط مستقيم مارٌّ بمركزها ونهاياته في محيطها

١٤ نصف الدائرة هو الشكل المحاط بالقطر والجزء من المحيط المقطوع بالقطر

١٥ الاشكال المستقيمة الاضلاع هي المحدودة بخطوط مستقيمة

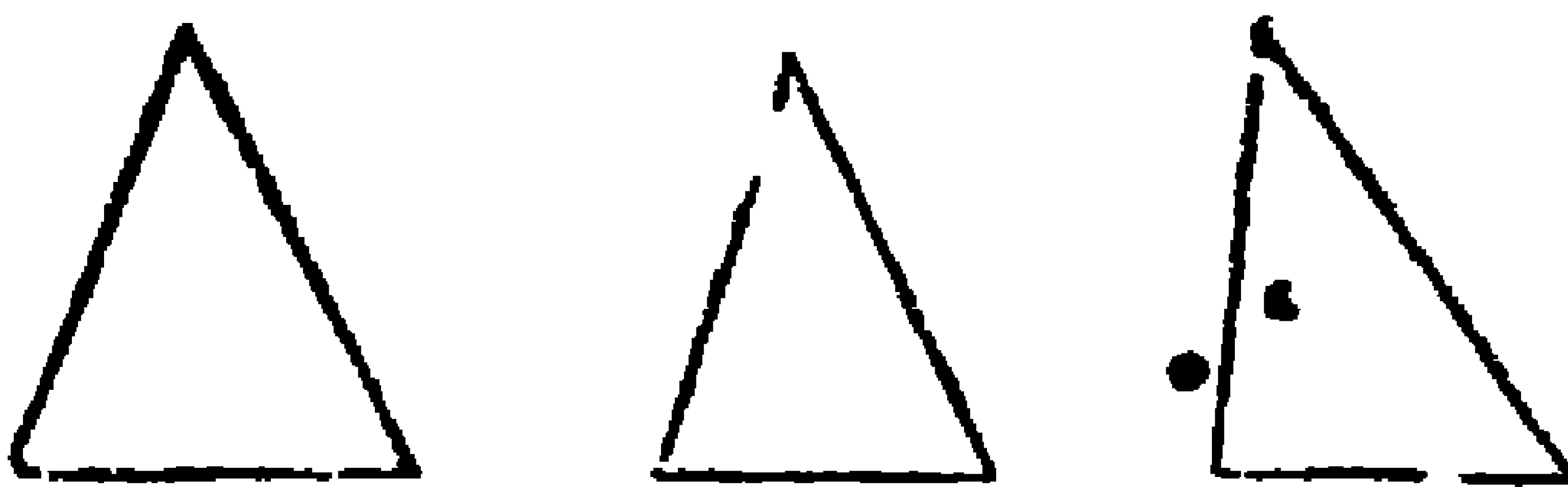
١٦ المثلث شكل يحيط بهِ ثلاثة خطوط

تنبيه. المثلث المستوي هو ما احاط بهِ ثلاثة خطوط مستقيمة والكروي ما احاط بهِ ثلاثة خطوط منحنية

١٧ ذو الاربعة الاضلاع شكل احاط بهِ اربعة خطوط مستقيمة

١٨ الشكل الكثير الاضلاع ما احاط بهِ اكثر من اربعة خطوط مستقيمة

١٩ المثلث المتساوي الاضلاع



هو ما كانت اضلاعهُ الثلاثة متساوية

٢٠ المثلث المتساوي الساقين هو ما كان ضلعان من اضلاعهِ

الثلثة متساويَين

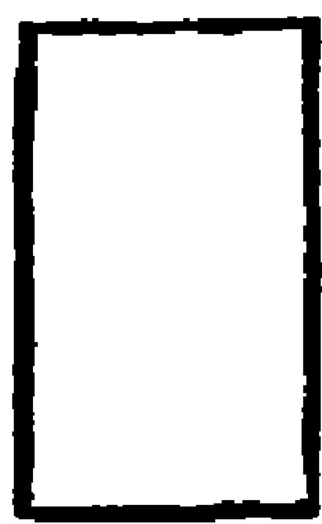
٣١ المثلث المختلف الاضلاع هو ما كانت اضلاعه الثلثة غير متساوية

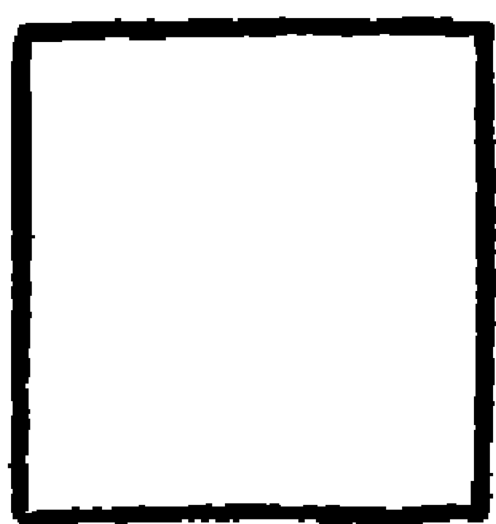


٣٢ المثلث القائم الزاوية هو ما كانت احدى زواياه قائمة

٣٣ المثلث المنفرج الزاوية هو ما كانت احدى زواياهُ منفرجة

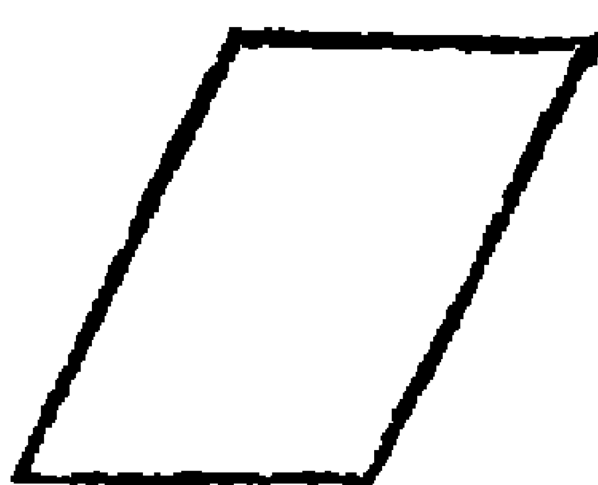
٣٤ المثلث الحادّ الزاوية هو ما كانت زواياهُ الثلاث حادَّة

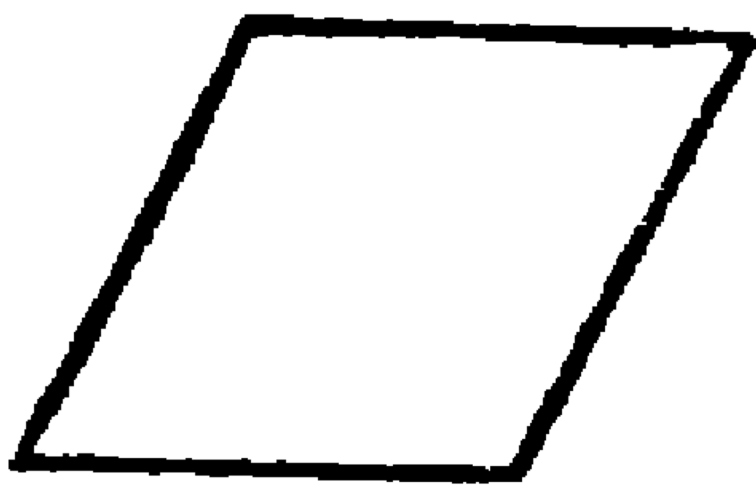




٣٥ المربَّع شكل يحيط بهِ اربعة خطوط مستقيمة متساوية وكل زواياهُ قائمة

٣٦ المستطيل هو ما كانت كل زواياهُ قائمة ولكن ليس كل اضلاعه متساوية





٣٧ المعيَّن ما كانت اضلاعه متساوية ولكن ليست فيهِ قائمة

٣٨ الشبيه بالمعين ما كان ضلعاهُ المتقابلان متساويَين وليست فيهِ قائمة واضلاعهُ الاربعة ليست متساوية

٣٩ كل ذي اربعة اضلاع غير ما ذكر يسمى منحرفًا

٤٠ الخطوط المستقيمة المتوازية هي الواقعة في سطح واحد مستوٍ

ولا تلتقي ولو أُخرجت في جهتيها الى غير نهاية

مقتضيات او ممكنات

١ يمكن ان يوصل بين كل نقطتين بخط مستقيم او بغير مستقيم

٢ يمكن ان يُخرَج خطٌّ مستقيم محدود على استقامتهِ في جهتيهِ الى حدّ ما يُراد

٣ يمكن ان تُرسَم دائرةٌ على اي مركزٍ فُرِض وعلى اي بُعدٍ فُرِض منهُ

اوليات

١ الاشياء المساوية لشيء واحدٍ هي متساوية بعضها لبعض

٢ اذا أُضيفَتْ اشياء متساوية الى اشياء متساوية تكون المجموعات متساوية

٣ اذا طُرِحَت اشياء متساوية من اشياء متساوية تكون البقايا متساوية

٤ اذا اضيفت اشياء متساوية الى اشياء غير متساوية تكون المجموعات غير متساوية

٥ اذا طُرِحَت اشياء متساوية من اشياء غير متساوية تكون البقايا غير متساوية

٦ الاشياء التي هي مضاعف شيء واحدٍ هي متساوية

٧ الاشياء التي تعدل نصف شيء واحد هي متساوية

٨ المقادير المتطابقة اي التي تملأ مساحة واحدة هي متساوية

٩ الكل اعظم من جزئهِ

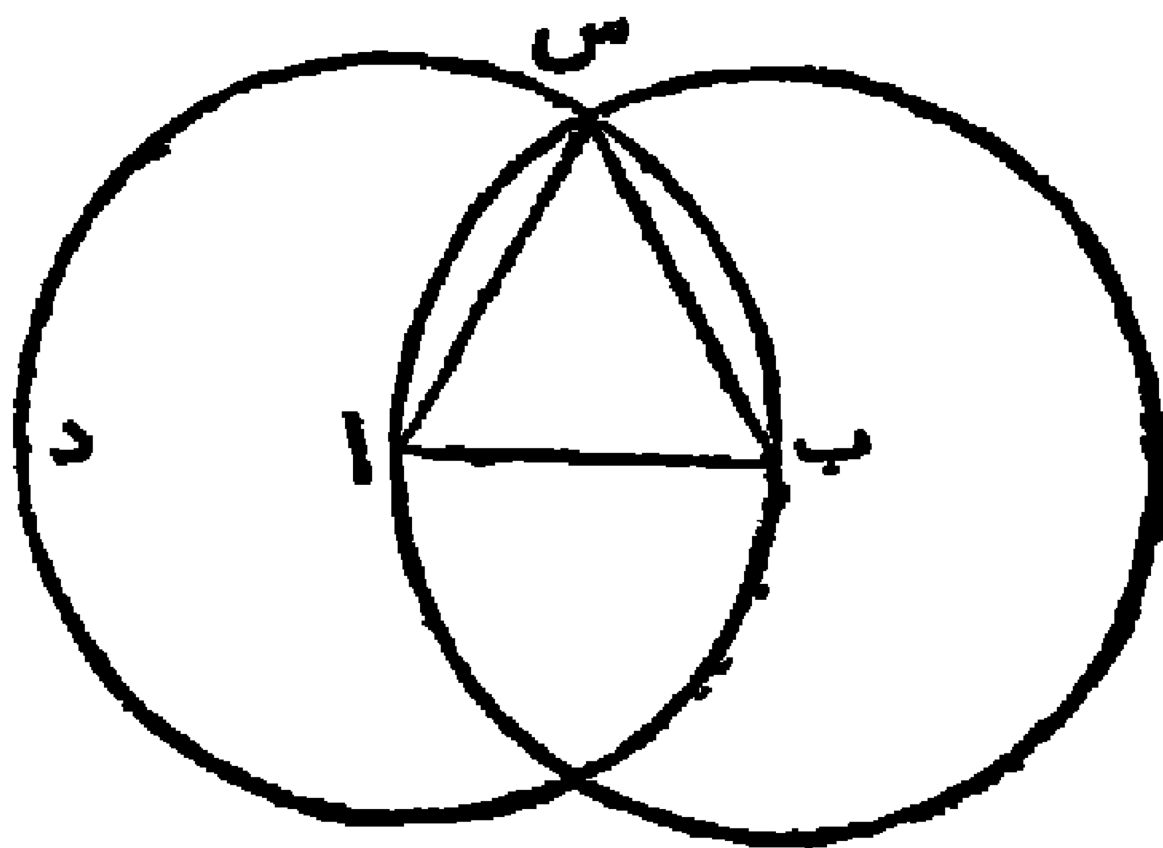
١٠ جميع الزوايا القائمة متساوية

١١ اذا تقاطع خطّان مستقيمان لايكونان موازيَين لخطٍ آخر مستقيم

القضية الاولى. عمليّة

علينا ان نرسم مثلثًا متساوي الاضلاع على خطٍ مستقيم محدود مفروض

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض فعلينا ان نرسم عليه مثلثًا متساوي الاضلاع.



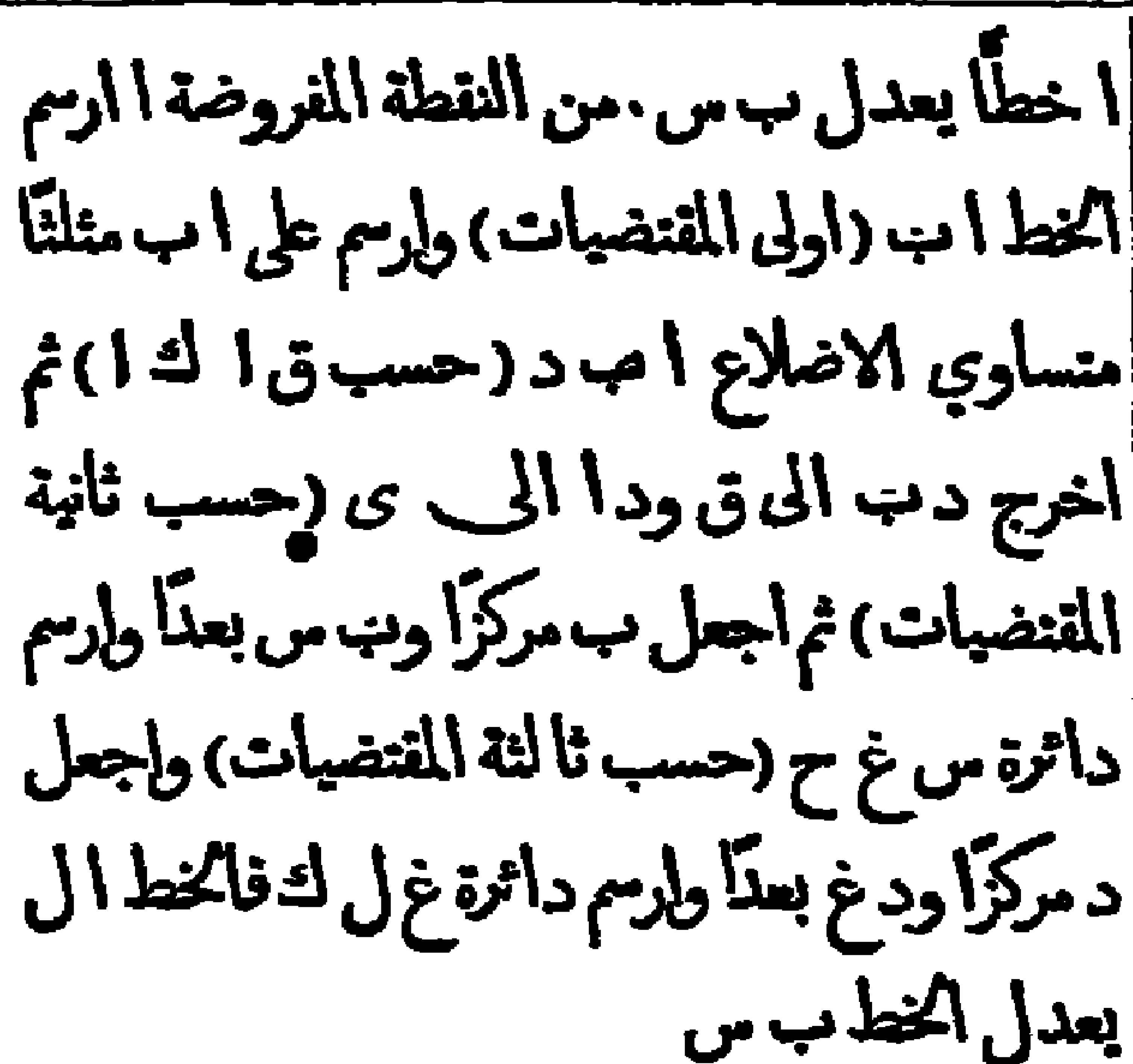
اجعل ا مركزًا و ا ب بُعدًا وارسم دائرة ب س د ثم اجعل ب مركزًا وب ا بُعدًا وارسم دائرة ا س ر (حسب ثالثة الممكنات) ثم من س اي نقطة تقاطع الدائرتين ارسم خطًّا الى ا وآخر الى ب (حسب اولى الممكنات) فيكون ا ب س مثلثًا متساوي الاضلاع

فالنقطة ا هي مركز الدائرة ب س د ولذلك الخط ا س يعدل الخط ا ب (حسب الحد الحادي عشر) و ب مركز الدائرة ا س ر ولذلك ب ا يعدل ب س وقد تبرهن ان ا س يعدل ا ب والاشياء المساوية لشيء واحدٍ هي متساوية بعضها لبعض (اوليّة اولى) فلذلك ب س يعدل ا س فالخطوط الثلاثة ا ب ا س ب س هي متساوية فيكون ا ب س مثلثًا متساوي الاضلاع وقد رسم على ا ب وذلك ما كان علينا ان نعمله

القضية الثانية. ع

علينا ان نرسم من نقطة مفروضة خطًّا مستقيمًا يعدل خطًّا اخر مستقيمًا مفروضًا

لتكن ا النقطة المفروضة وب س الخط المستقيم المفروض فعلينا ان نرسم من

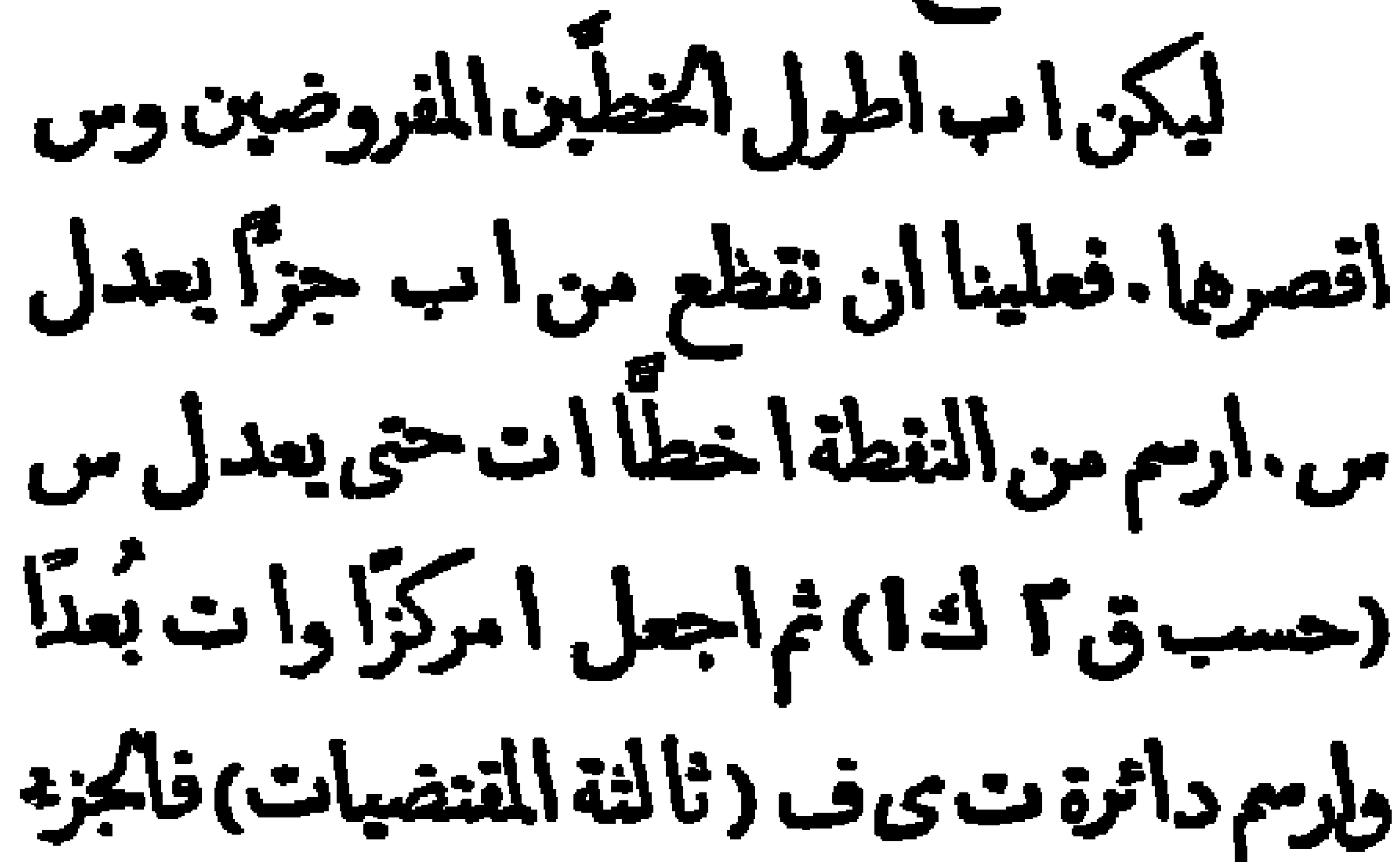


ا خطًّا يعدل ب س. من النقطة المفروضة ا ارسم الخط ا ب (اولى المقتضيات) وارسم على ا ب مثلثًا متساوي الاضلاع ا ب د (حسب ق ا ك ا) ثم اخرج د ب الى ق ود ا الى ى (حسب ثانية المقتضيات) ثم اجعل ب مركزًا وب س بعدًا وارسم دائرة س غ ح (حسب ثالثة المقتضيات) واجعل د مركزًا ود غ بعدًا وارسم دائرة غ ل ك فالخط ا ل يعدل الخط ب س

النقطة ب هي مركز الدائرة غ س ح ولذلك ب س يعدل ب غ (حدّ ١١) والنقطة د هي مركز الدائرة غ ك ل ولذلك الخط د ل يعدل د غ والجزء د ا يعدل الجزء د ب فالبقية ا ل تعدل البقية ب غ (اولية ثالثة) وقد تبرهن ان ب س يعدل ب غ والاشياء المساوية لشيء واحدٍ هي متساوية بعضها لبعض فالخط ا ل يعدل الخط ب س وقد رُسم من ا النقطة المفروضة وذلك ما كان علينا ان نعملهُ

القضية الثالثة. ع

علينا ان نقطع من اطول خطَّين مستقيمين مفروضين جزءًا يعدل اقصرها



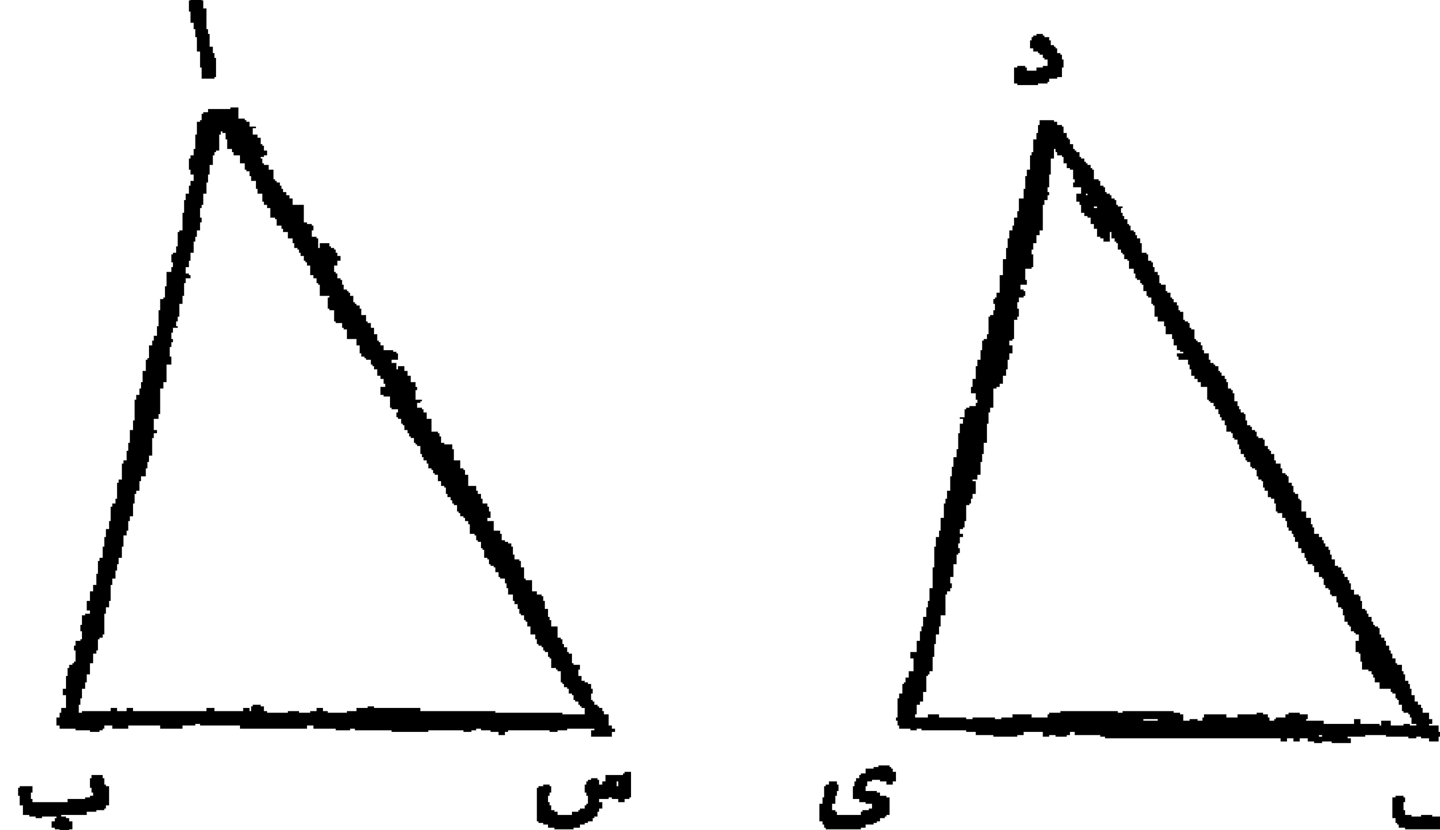
ليكن ا ب اطول الخطَّين المفروضين وس اقصرها. فعلينا ان نقطع من ا ب جزءًا يعدل س. ارسم من النقطة ا خطًّا ا ت حتى يعدل س (حسب ق ٢ ك ا) ثم اجعل ا مركزًا وا ت بُعدًا وارسم دائرة ت ى ف (ثالثة المقتضيات) فالجزء ا ى يعدل ا ت (حد ١١) وا ت يعدل س فلذلك ا ى يعدل س (اولية اولى) وقد قطع من ا ب اطول الخطَّين المفروضين وذلك ما كان علينا ان نعملهُ

القضية الرابعة. نظريَّة

اذا عدل ضلعا مثلثٍ ضلعَي مثلثٍ آخر والزاوية الواقعة بين ضلعَي

احدهما عدلت الواقعة بين ضلعي الآخر فالضلع الثالث من الواحد يعدل الثالث من الآخر ويكون المثلثان متساويين والزاويتان الاخريان من الواحد تعدلان الاخريين من الآخر

ليكن ا ب س د ى ف مثلثين. والضلعان ا ب ا س من الواحد يعدلان د ى د ف من الآخر كل واحد يعدل نظيره والزاوية ب ا س تعدل الزاوية ى د ف فحينئذٍ القاعدة ب س تعدل القاعدة ى ف. والمثلث ا ب س يعدل المثلث د ى ف. وبقية الزوايا ايضًا متساوية اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية كل واحدة تعدل نظيرها. اي ا ب س تعدل د ى ف. وا س ب تعدل د ف ى



لانهُ اذا وُضع المثلث ا ب س على المثلث د ى ف حتى تقع النقطة ا على النقطة د والخط ا ب على الخط د ى فالنقطة ب تقع على النقطة ى لان ا ب يعدل د ى. واذا وقع ا ب على د ى فحينئذٍ ا س يقع على د ف لان الزاوية ب ا س تعدل الزاوية ى د ف والنقطة س تقع على النقطة ف لان ا س يعدل د ف. وقد تبرهن ان النقطة ب تقع على النقطة ى فالقاعدة ب س تقع على القاعدة ى ف وتعدلها (فرع حد ٣) وكذلك كل المثلث ا ب س يقع على كل المثلث د ى ف ويكونان متساويين. والزاويتان الاخريان من الواحد تقع على الاخريين من الآخر. وكل واحدة تعدل نظيرها اي ا ب س تعدل د ى ف وا س ب تعدل د ف ى. وذلك ما كان علينا ان نبرهنهُ

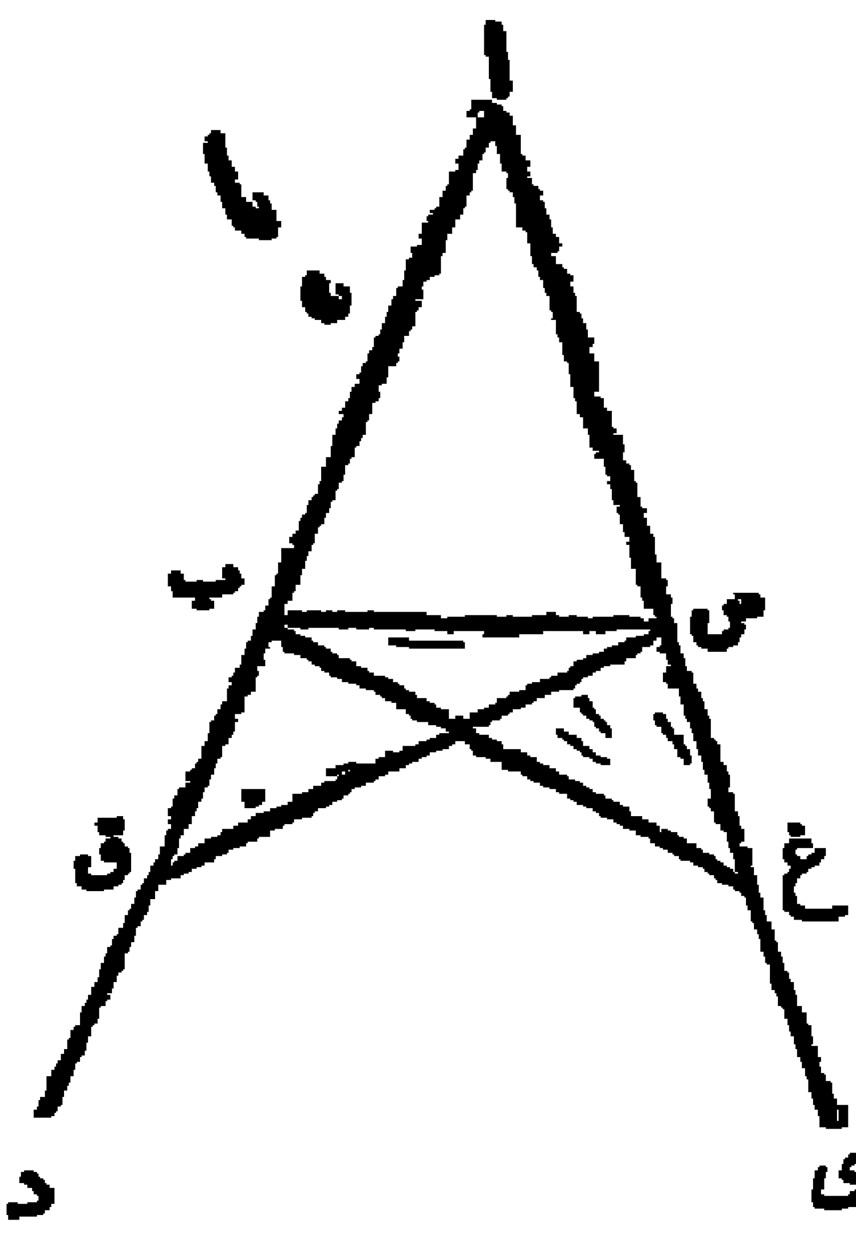
القضية الخامسة. ن

في كل مثلث متساوي الساقين الزاويتان عند القاعدة متساويتان. واذا أُخرج الضلعان المتساويان فالزاويتان الحادثتان على الجانب الآخر من القاعدة متساويتان ايضًا

ليكن ا ب س مثلثًا متساوي الساقين اي الساق ا ب يعدل الساق ا س. وليخرج

الضلع ا ب الى د والضلع ا س الى ى. فالزاوية ا ب س تعدل الزاوية ا س ب والزاوية س ب د تعدل الزاوية ب س ى

عيّن ايّ نقطة شئتَ في ب د كالنقطة ق مثلاً. ومن ا ى اطول خطّين اقطع ا غ حتى يعدل ا ق اقصرها (حسب ق ٣ ك ١) وارسم الخطّ ق س والخطّ غ ب. فالخطّ ا ق يعدل ا غ وكذلك ا ب يعدل ا س. فالخطّان ق ا ا س يعدلان غ ا ا ب وبينهما الزاوية ق ا غ المشتركة بين المثلثين ا ق س ا غ ب فالقاعدة ق س تعدل القاعدة غ ب (حسب ق ٤ ك ١) والمثلث ا ق س يعدل المثلث ا غ ب فبقية الزوايا من الواحد تعدل بقية الزوايا من الاخر (ق ٤ ك ١)



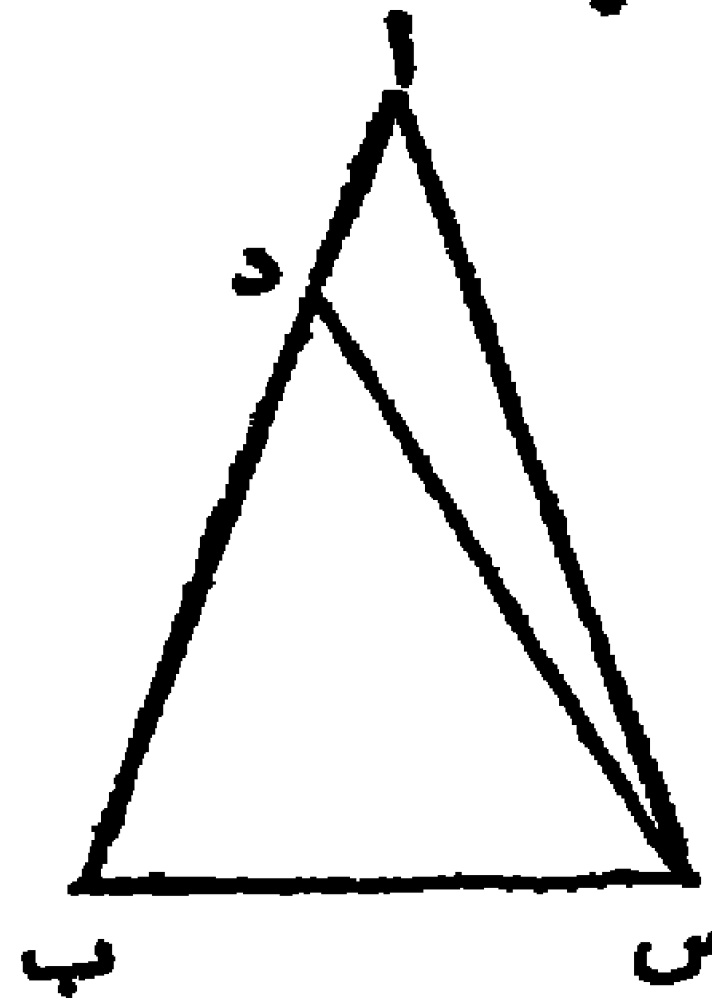
كل واحدة تعدل نظيرها اي التي تحاذيها الاضلاع المتساوية اي الزاوية ا س ق تعدل ا ب غ والزاوية ا ق س تعدل ا غ ب. وقد تقدم ان ا ق يعدل ا غ وان ا ب يعدل ا س فالبقية ب ق تعدل البقية س غ (اولية ثالثة) وقد تبرهن ان ق س يعدل غ ب فالضلعان ب ق ق س يعدلان الضلعين س غ غ ب وتبرهن ان الزاوية ب ق س تعدل الزاوية س غ ب فالمثلث ب ق س يعدل المثلث س غ ب (ق ٤ ك ١) وبقية الزوايا من الواحد تعدل بقية الزوايا من الاخر اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية اي الزاوية ق ب س تعدل الزاوية غ س ب والزاوية ب س ق تعدل الزاوية س ب غ وقد تبرهن ان كل الزاوية ا س ق تعدل الكل ا ب غ وان الجزء ب س ق يعدل الجزء س ب غ فالبقية ا س ب تعدل البقية ا ب س وهما الزاويتان عند قاعدة المثلث ا ب س وقد تبرهن ان الزاوية ق ب س تعدل غ س ب وهما الزاويتان على الجانب الاخر من القاعدة. وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

فرع. اذ ذاك يكون كل مثلث متساوي الاضلاع متساوي الزوايا ايضًا

القضية السادسة . ن

اذا كانت زاويتان من مثلثٍ متساويتين فالضلعان اللذان يقابلانهما هما متساويان ايضًا

ليكن ا ب س مثلثًا لهُ زاويتان ا ب س ا س ب متساويتان فضلعاهُ ا ب ا س هما متساويان ايضًا



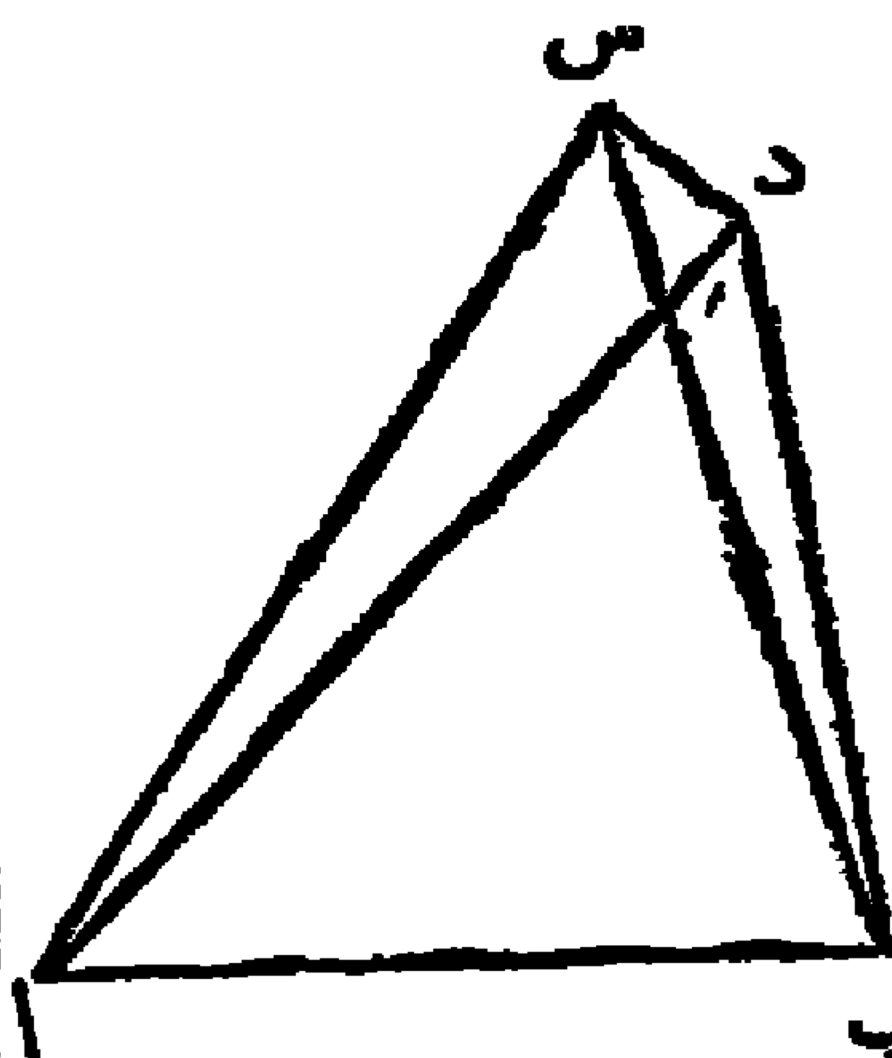
والاَّ فاحدهما اطول من الاخر. فلنفرض ا ب اطولهما ولنقطع منهُ جزءًا د ب يعدل ا س اقصرهما (ق ٣ ك ١) فلنا في المثلثين د ب س ا ب س ضلعٌ من الواحد د ب يعدل ضلعًا من الآخر ا س والقاعدة ب س مشتركة بينهما فالضلعان د ب ب س يعدلان ا س س ب كل واحدٍ نظيرهُ . والزاوية د ب س تعدل ا س ب فالقاعدة د س تعدل القاعدة ا ب والمثلث د ب س يعدل المثلث ا ب س (ق ٤ ك ١) اي الاصغر يعدل الاكبر وذلك محال فلا يمكن ان يكون ا ب ا س غير متساويين بل هما متساويان . وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

فرعٌ . كل مثلث متساوي الزوايا هو متساوي الاضلاع ايضًا

القضية السابعة . ن

لا يكون على قاعدة واحدة وعلى جانب واحد منها مثلثان الضلعان منهما المنتهيان في طرف واحد من القاعدة متساويان والمنتهيان في طرفها الآخر متساويان ايضًا

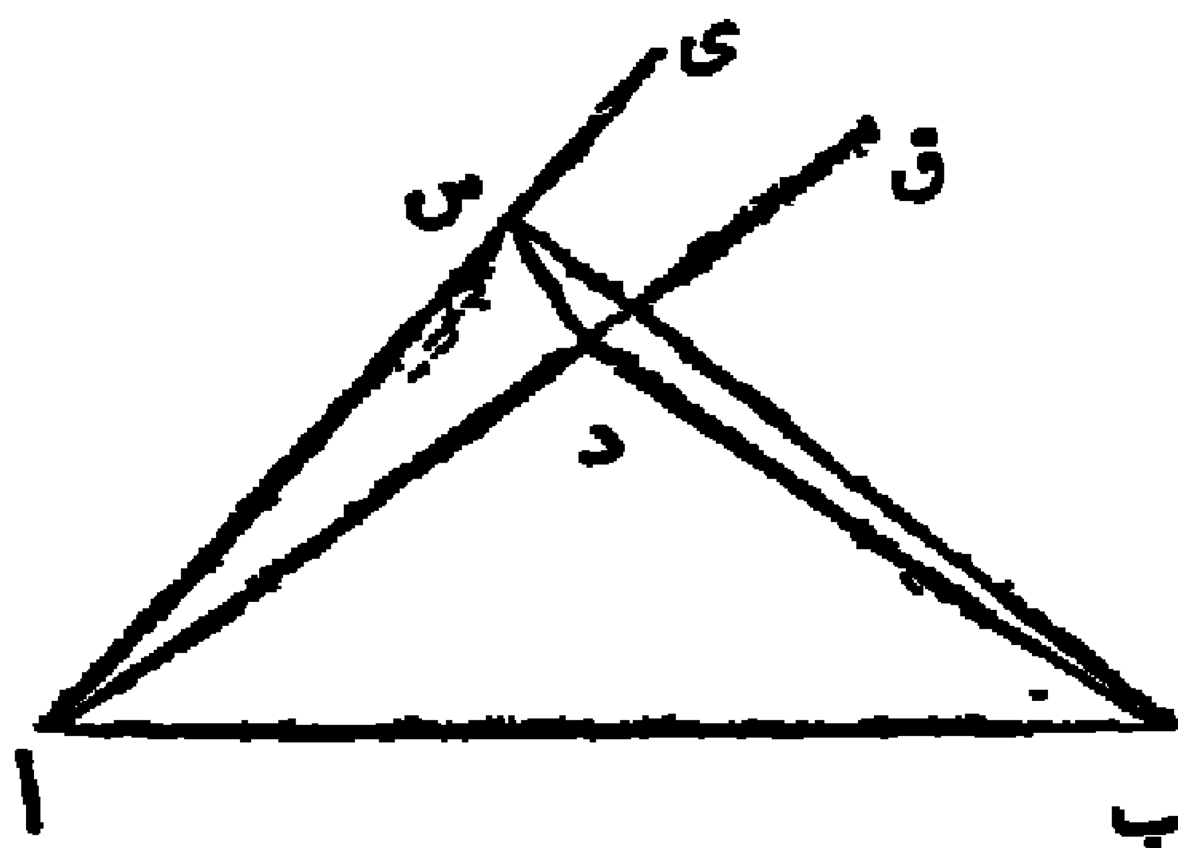
ليكن ا س ب ا د ب مثلثين على قاعدة واحدة ا ب وعلى جانب واحد منها والضلعان ا س ا د المنتهيان في ا متساويان فالمنتهيان في ب الطرف الآخر من القاعدة لا يكونان متساويين



ارسم الخطَّ س د (حسب اولى الممكنات) فاذا كان ب س ب د متساويين وكان راس احد المثلثين خارج الاخر فلنا ا س ا د متساويان فالزاوية ا س د تعدل الزاوية ا د س (حسب ق ٥ ك ١) والزاوية ا س د انما هي اكبر من الزاوية ب س د فالزاوية ا د س ايضًا اكبر من ب س د وبالاحرى الزاوية ب د س اكبر من ب س د وعلى

ما فُرِض ان س ب يعدل د ب فالزاوية ب د س تعدل ب س د (ق ٥ ك ١) وقد تبرهن انها اكبر من ب س د

ثم اذا وقع راس احد المثلثين مثل د داخل الاخر ا س ب. فاخرج ا س الى ى واخرج ا د الى ق فبما ان ا س ا د متساويان فالزاويتان ى س د ق د س على الجانب الاخر من القاعدة س د هما متساويتان (ق ٥ ك ١) والزاوية ى س د انما هي اكبر من الزاوية ب س د فالزاوية ق د س ايضاً اكبر من ب س د وبالاحرى ب د س اكبر من ب س د واذا كان ب د ب س متساويين فالزاوية ب د س تعدل الزاوية ب س د (ق ٥ ك ١)



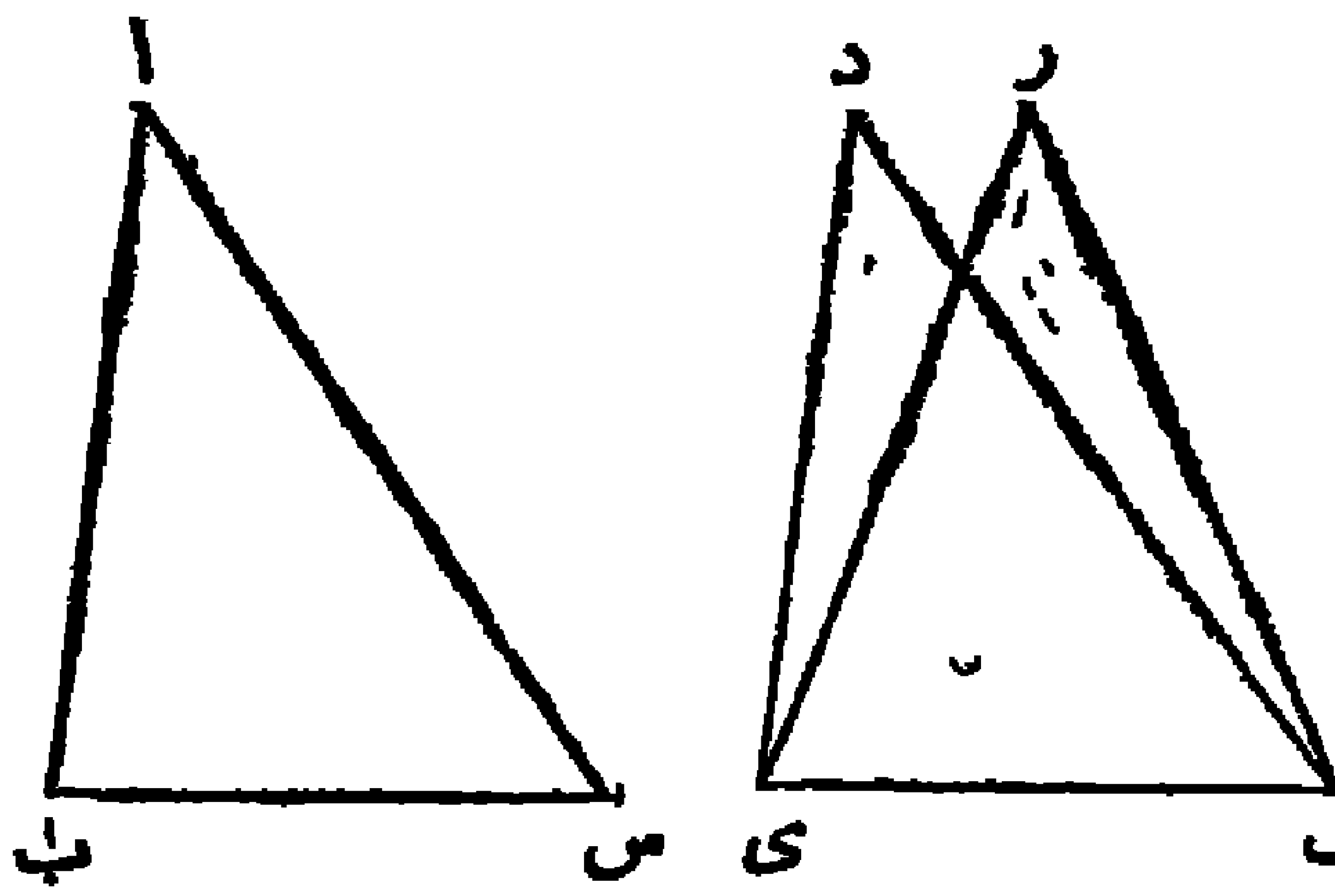
وقد تبرهن ان ب د س اكبر من ب س د وذاك محال. وهكذا اذا وقع راس احد المثلثين بجانب الاخر فلا يمكن ان يكون على قاعدة واحدة وعلى جانب واحد منها مثلثان الضلعان منهما المنتهيان الى طرف واحد من القاعدة متساويان والمنتهيان الى طرفها الاخر متساويان ايضاً

القضية الثامنة. ن

اذا عدل ضلعا مثلثٍ ضلعَي مثلثٍ آخر وكانت القاعدتان متساويتين ايضاً فالزاوية الحادثة بين ضلعَي الواحد تعدل الحادثة بين ضلعي الاخر

ليكن ا ب س د ى ف مثلثين والضلعان ا ب ا س يعدلان د ى د ف كل واحد يعدل نظيره. والقاعدة ب س تعدل القاعدة ى ف فالزاوية ب ا س تعدل الزاوية ى د ف

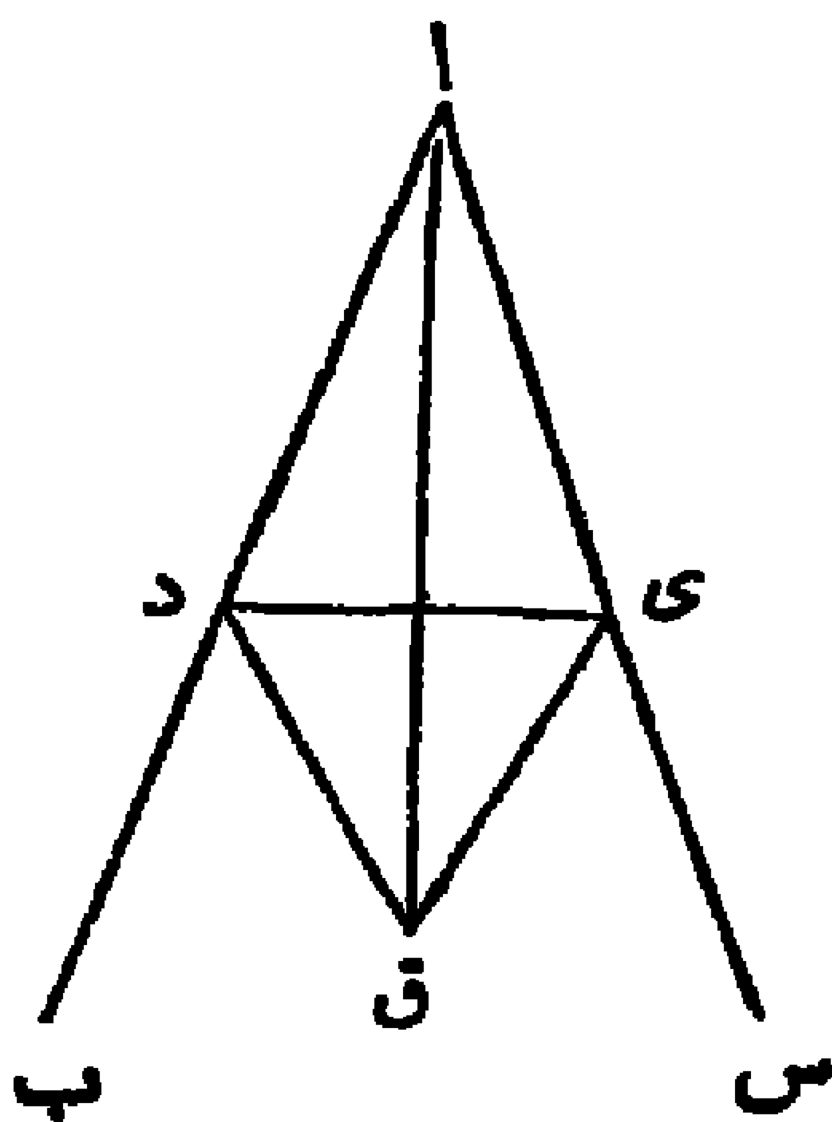
لانهُ اذا وضع المثلث ا ب س على المثلث د ى ف حتى تقع النقطة ب على النقطة ى والخط ب س على الخطّ ى ف فالنقطة س تقع على النقطة ف لان الخط ب س يعدل



ى ف واذ ذاك فالخط ب ا يقع على الخط ى د والخط ا س يقع على د ف والاَّ فلنفرض وقوعها على ى ر ر ف فعند ذلك يكون على قاعدة واحدة وعلى جانب واحدٍ منها مثلثان الضلعان منها المنتهيان في طرف واحد من القاعدة متساويان والمنتهيان في طرفها الاخر متساويان ايضاً وذلك لا يمكن (ق ٧ ك ١) فاذا طبق ب س على ى ف فالخطان ب ا ا س يطبقان على ى د د ف والزاوية ب ا س تطبق على الزاوية ى د ف وتعدلها (اولية ٨) وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

القضية التاسعة. ع

علينا ان ننصّف زاوية بسيطة مستقيمة مفروضة اي ان تقسمها الى قسمين متساويين



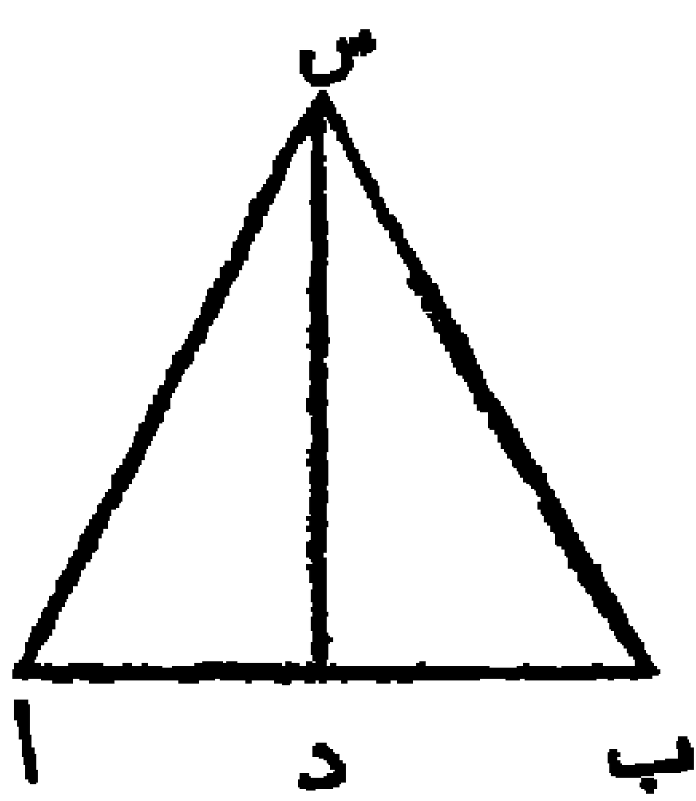
ليكن ب ا س الزاوية المفروض ان ننصفها عيّن ايّة نقطة شئت في الخط ا ب كالنقطة د ومن ا س اطول خطّين اقطع جزءًا اى حتى يعدل ا د اقصرها (ق ٣ ك ١) ارسم الخطّ د ى وابنِ عليهِ مثلثاً متساوي الاضلاع د ق ى (ق ١ ك ١) وارسم الخط ا ق فهو ينصّف الزاوية ب ا س

لان الخط ا د يعدل الخط ا ى والخط ا ق مشترك بين المثلثين د ا ق ى ا ق فالضلعان د ا ا ق يعدلان الضلعين ى ا ا ق كل واحد يعدل نظيرهُ. والقاعدة د ق تعدل القاعدة ق ى فالزاوية د ا ق تعدل الزاوية ى ا ق (ق ٨ ك ١) فقد تنصفت الزاوية ب ا س بالخط ا ق المستقيم وذلك ما كان علينا ان نعملهُ

تعليقة . على هذه الكيفيّة تنصّف كلا النصفين ذ ا ق ي ا ق وعلى هذا النسق
يقسم زاوية مفروضة الى اربعة او ثمانية اجزاء او الى ستة عشر جزءًا متساوية وهلمّ جرًّا

القضية العاشرة . ع

علينا ان ننصّف خطًّا مستقيمًا محدودًا مفروضًا اي ان نقسمهُ الى قسمين متساويين



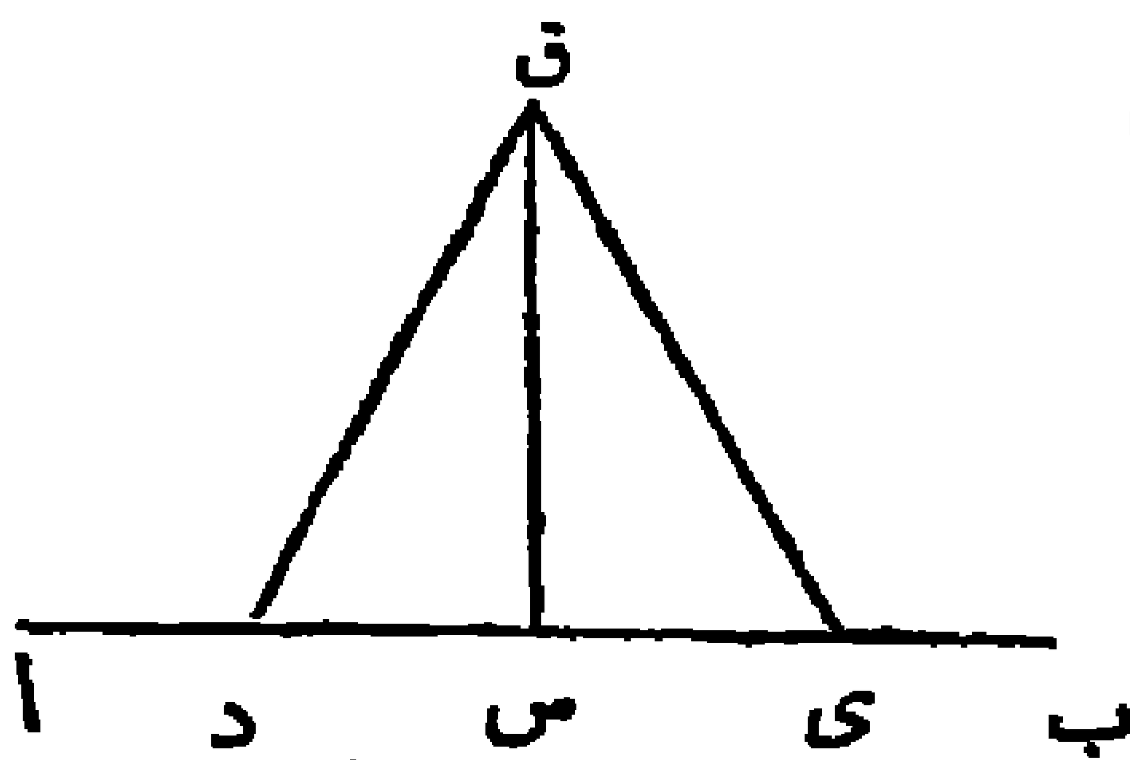
ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض علينا ان ننصفه

ارسم على الخط اب مثلثًا متساوي الاضلاع ا س ب (ق ١ ك ١) ونصّف الزاوية ا س ب بالخط المستقيم س د (ق ٩ ك ١) فالخط ا ب قد انتصف في النقطة د

فلأنَّ الخطّ ا س يعدل س ب والخط س د مشترك بين المثلثين ا س د ب س د فالضلعان ا س س د يعدلان الضلعين ب س س د والزاوية ا س د تعدل الزاوية ب س د فلذلك القاعدة ا د تعدل القاعدة ب د (ق ٤ ك ١) فقد انتصف الخط ا ب في النقطة د وذلك ما كان علينا ان نعملهُ

القضية الحادية عشرة . ع

علينا ان نرسم من نقطة مفروضة في خط مستقيم محدود مفروض خطًّا مستقيمًا يُحدِث مع الاول زاويتين قائمتين



ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض وس النقطة المفروضة فيهِ . فعلينا ان نرسم من النقطة س خطًّا مستقيمًا يُحدِث مع ا ب قائمتين

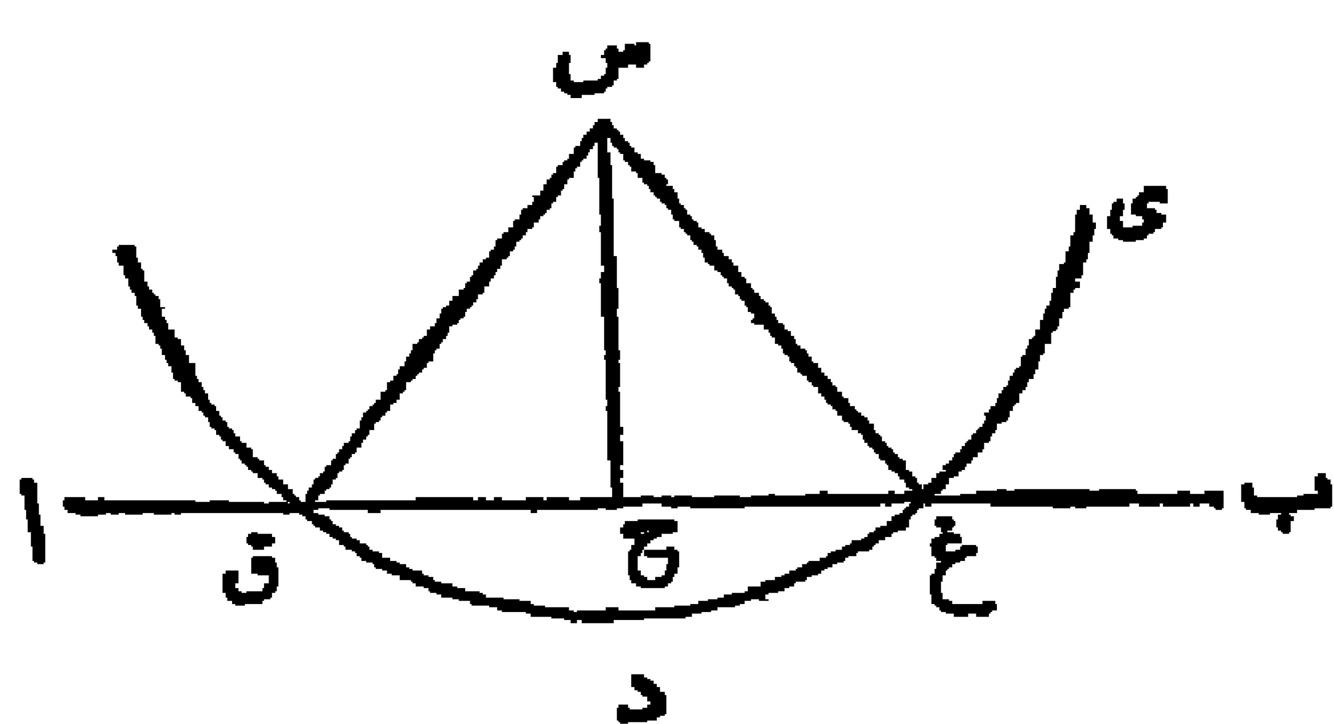
عيِّنْ ايَّة نقطة شئت في ا س كالنقطة د مثلًا ومن س ب اقطع جزءًا س ى حتى يعدل س د (ق ٣ ك ١) وعلى د ى ابنِ مثلثًا متساوي الاضلاع (ق ١ ك ١) د ق ى

ثم ارسم الخط ق س فهو يُحدِث مع ا ب قائمتين

فلأنَّ د س يعدل ى س والخط ق س هو مشترك بين المثلثين د س ق ى س ق فالضلعان د س س ق يعدلان الضلعين ى س س ق كل واحد يعدل نظيره. والقاعدة د ق تعدل القاعدة ى ق فالزاوية د س ق تعدل الزاوية ى س ق (ق ٨ ك ١) وهما متواليتان. واذا قام خط مستقيم على آخر مستقيم وجعل الزاويتين المتواليتين متساويتين فكل واحدة منها قائمة (حدّ ٧) فكل واحدة من د س ق ى س ق هي قائمة. فقد رُسِمَ من النقطة المفروضة س خطٌ ق س وهو يحدث مع ا ب قائمتين وذلك ما كان علينا ان نعملهُ

القضية الثانية عشرة. ع

علينا ان نرسم خطًّا عموديًّا على خط مستقيم مفروض غير محدود وذلك من نقطة مفروضة خارج ذلك الخط



ليكن ا ب خطًّا مستقيمًا يمكن اخراجه الى جهتيهِ الى غير نهاية. ولتكن س نقطةً خارجةً فعلينا ان نرسم من س خطًّا عموديًّا على ا ب

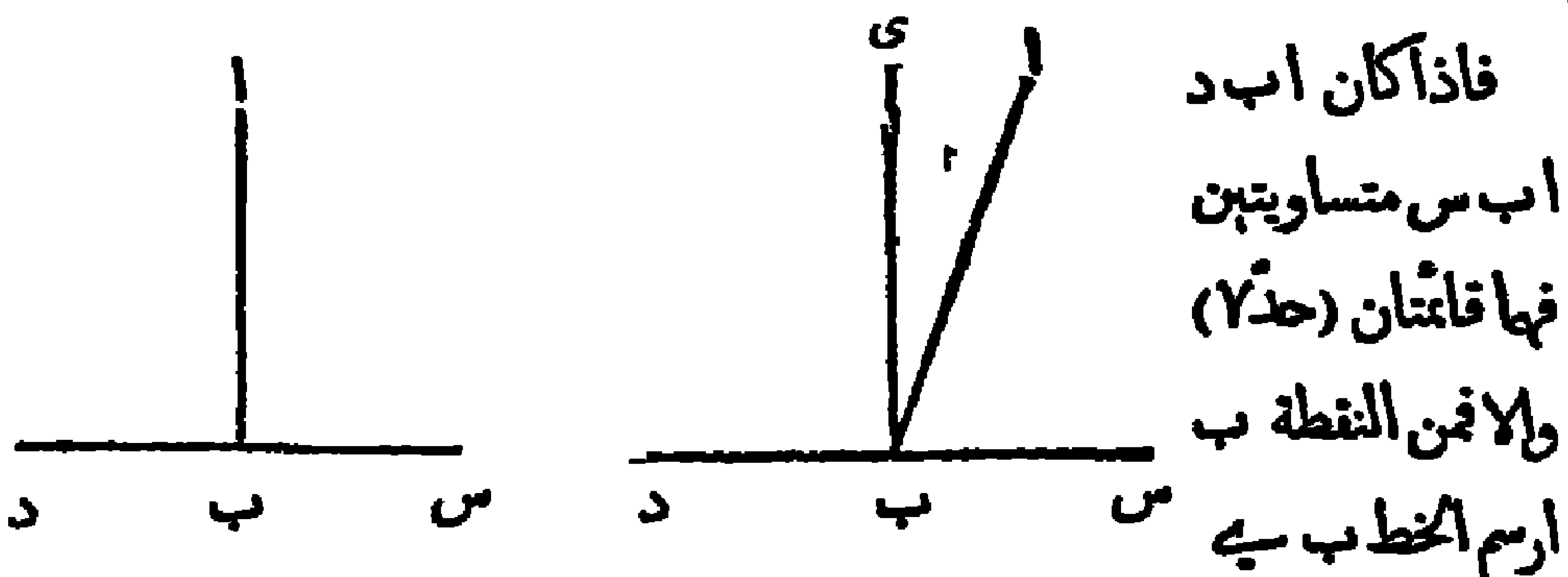
عيِّنْ اية نقطة شيئت على الجانب الاخر من ا ب مثل د ثم اجعل س مركزًا وس د بعدًا وارسم الدائرة ى غ ق (ثالثة المكنات) التي تقطع ا ب في النقطتين غ وق. نصِّف ق غ في ح (ق ١٠ ك ١) ثم ارسم س ح فهو عموديٌّ على ا ب. ارسم س ق س غ ولان ق ح يعدل ح غ والخط س ح مشترك بين المثلثين ق ح س غ ح س فالضلعان ق ح ح س يعدلان الضلعين غ ح ح س كل واحد يعدل نظيره. والقاعدة س ق تعدل القاعدة س غ (حد ١١) فالزاوية ق ح س تعدل الزاوية غ ح س (ق ٨ ك ١) وهما متواليتان. فالخط س ح عموديٌّ على ا ب (حد ٧) وقد رُسِم من النقطة المفروضة س وذلك ما كان علينا ان نعملهُ

القضية الثالثة عشرة ·ن

الزاويتان الحادثتان من وقوع خط مستقيم على آخر مستقيم على جانب واحد منه هما قائمتان او تعدلان قائمتين

ليقع الخط المستقيم ا ب على الخط المستقيم د س حتى تحدث الزاويتان ا ب د ا ب س فهما قائمتان او تعدلان قائمتين

فاذا كان ا ب د ا ب س متساويتين فهما قائمتان (حدّ ٧) والا فمن النقطة ب ارسم الخط ب ي



عموديًا على د س (ق ١١ ك ١) فالزاويتان ي ب د ي ب س قائمتان والزاوية س ب ى تعدل س ب ا مع ا ب ى اضف الى كل واحدة منهما الزاوية ى ب د فالزاويتان س ب ى ى ب د تعدلان الثلاث زوايا س ب ا ا ب ى ى ب د (اولية ٢) والزاوية د ب ا تعدل د ب ى مع ى ب ا اضف الى كل واحدة منهما ا ب س فالزاويتان د ب ا ا ب س تعدلان الثلاث د ب ى ى ب ا ا ب س وقد تبرهن ان د ب ى س ب ى تعدل هذه الثلاث زوايا ايضًا. والاشياء المساوية لشيء واحد هي متساوية بعضها لبعض (اولية ١) اى الزاويتان س ب ى د ب ى تعدلان الزاويتين د ب ا ا ب س ولكن س ب ى ى ب د هما قائمتان فالزاويتان د ب ا ا ب س تعدلان قائمتين

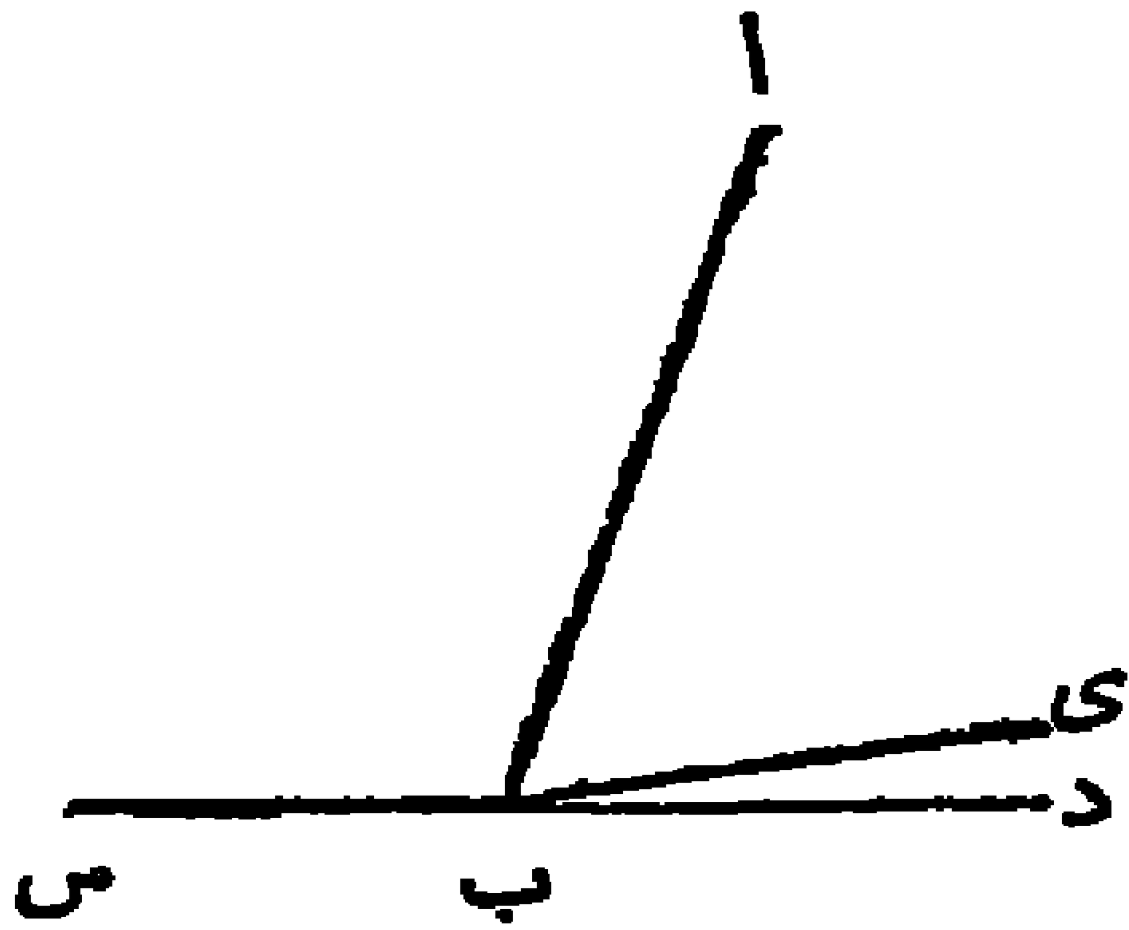
فرع. مجتمع جميع الزوايا الحادثة على جانب واحد من د س يعدل قائمتين لانه يعدل مجتمع المتواليتين د ب ا ا ب س

القضية الرابعة عشرة ·ن

اذا وقع خطان مستقيمان على نقطة واحدة من خطٍ اخر مستقيم عن

جانبيهِ واحدثا زاويتين متواليتين تعدلان قائمتين فالخطّان على استقامة واحدة كانّهما خطٌّ واحدٌ

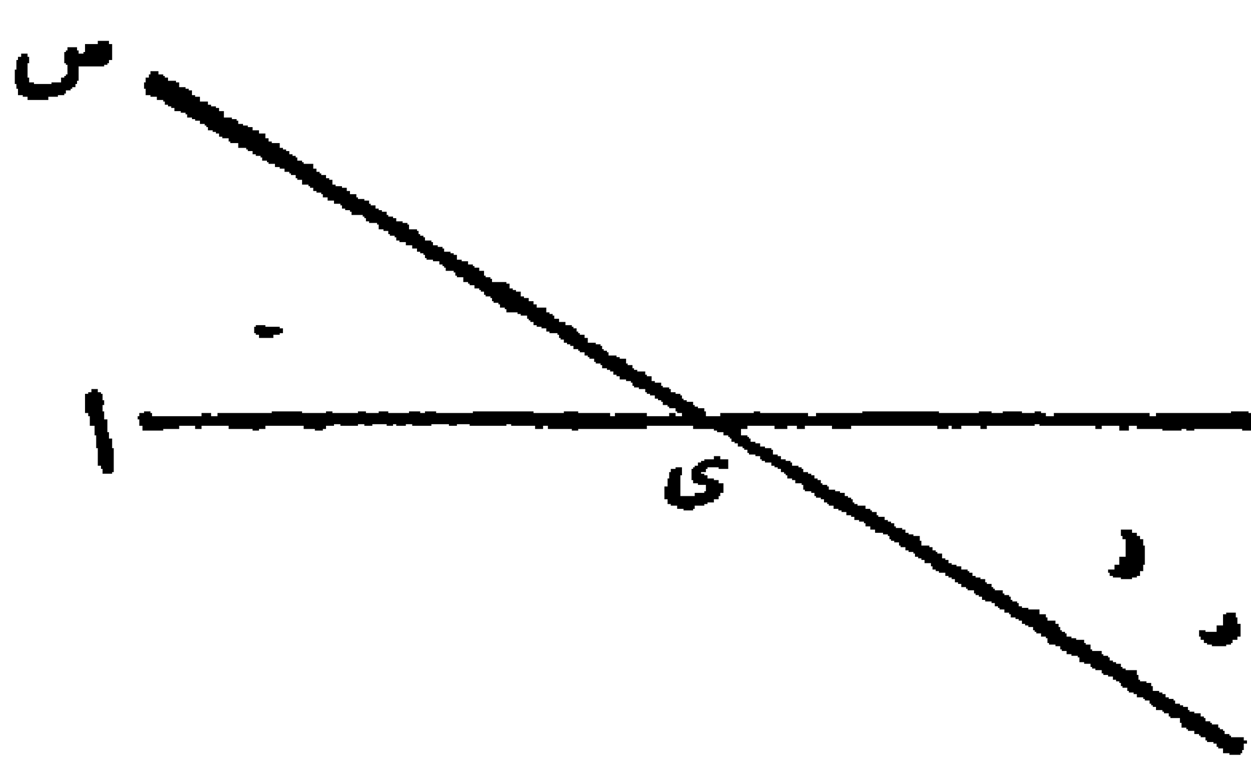
ليقع خطّان س ب د ب على النقطة ب من الخط ا ب من جانبيه وليحدثا زاويتين متواليتين تعدلان قائمتين ا ب س ا ب د فالخطّان س ب ب د على استقامة واحدة كانّهما خطٌّ واحدٌ



والاّ فارسم ب ى حتى يكون س ب ب ي على استقامة واحدة فالخط المستقيم ا ب الواقع على خطّ اخر مستقيم س ى على جانب واحد منه يحدث زاويتين ا ب س ا ب ى تعدلان قائمتين (ق١٢ ك١) ولكن قد فُرِض ان ا ب س ا ب د تعدلان قائمتين فالزاويتان ا ب س ا ب ى تعدلان ا ب س ا ب د اطرح الزاوية المشتركة ا ب س فالباقية ا ب ى تعدل الباقية ا ب د (اولية ٣) اي الجزء يعدل الكل وذلك محال فلا يمكن ان يكون س ب ب ى على استقامة واحدة . وهكذا في كل خط غير ب د فالخطان س ب ب د المحدثان مع ا ب زاويتين تعدلان قائمتين هما على استقامة واحدة وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

القضية الخامسة عشرة . ن

اذا تقاطع خطّان مستقيمان فالزوايا المتقابلة متساوية



ليكن ا ب خطًّا مستقيمًا وليقطعه خطٌّ آخر س د في النقطة ي فالزاوية س ى ا تعدل ب ى د والزاوية س ى ب تعدل ا ى د لانّ الزاويتين س ى ا ا ى د الحادثتين من وقوع اى على س د تعدلان قائمتين (ق١٢ ك١) وا ى د د ى ب الحادثتان من وقوع د ى على ا ب ايضًا تعدلان قائمتين (ق١٢ ك١) فالزاويتان

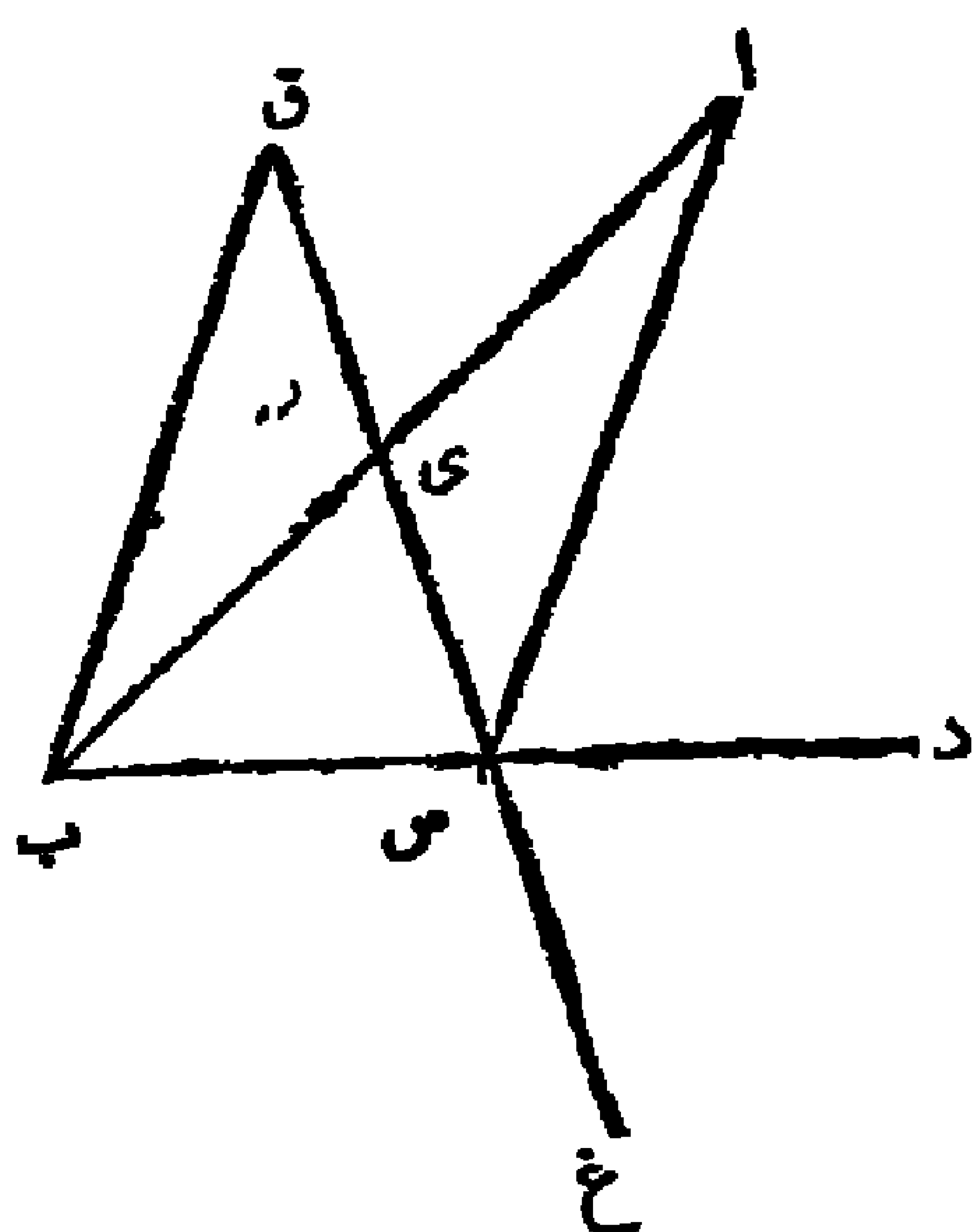
س ی ا ا ی د تعدلان ا ی د د ی ب اطرح المشتركة ا ی د فالباقية س ی ا تعدل الباقية د ی ب (اولية ٣) وهكذا ايضاً يبرهن ان س ی ب تعدل ا ی د

فرعٌ اولٌ. يتضح من هذه القضية ان مجمع جميع الزوايا الحادثة من تقاطع خطّين مستقيمين يعدل اربع زوايا قائمة

فرعٌ ثانٍ. مجمع الزوايا الحادثة من تقاطع خطوط مستقيمة في نقطة واحدة يعدل اربع زوايا قائمة

القضية السادسة عشرة · ن

اذا أُخرِجَ ضلعٌ من مثلث فالزاوية الخارجة الحادثة من ذلك هي اكبر من احدى الداخلتين المتقابلتين



ليكن ق ب س مثلثاً ولنخرج الضلع ب س الى د فالزاوية الخارجة ق س د هي اكبر من احدى الداخلتين المتقابلتين

س ب ق ب ق س

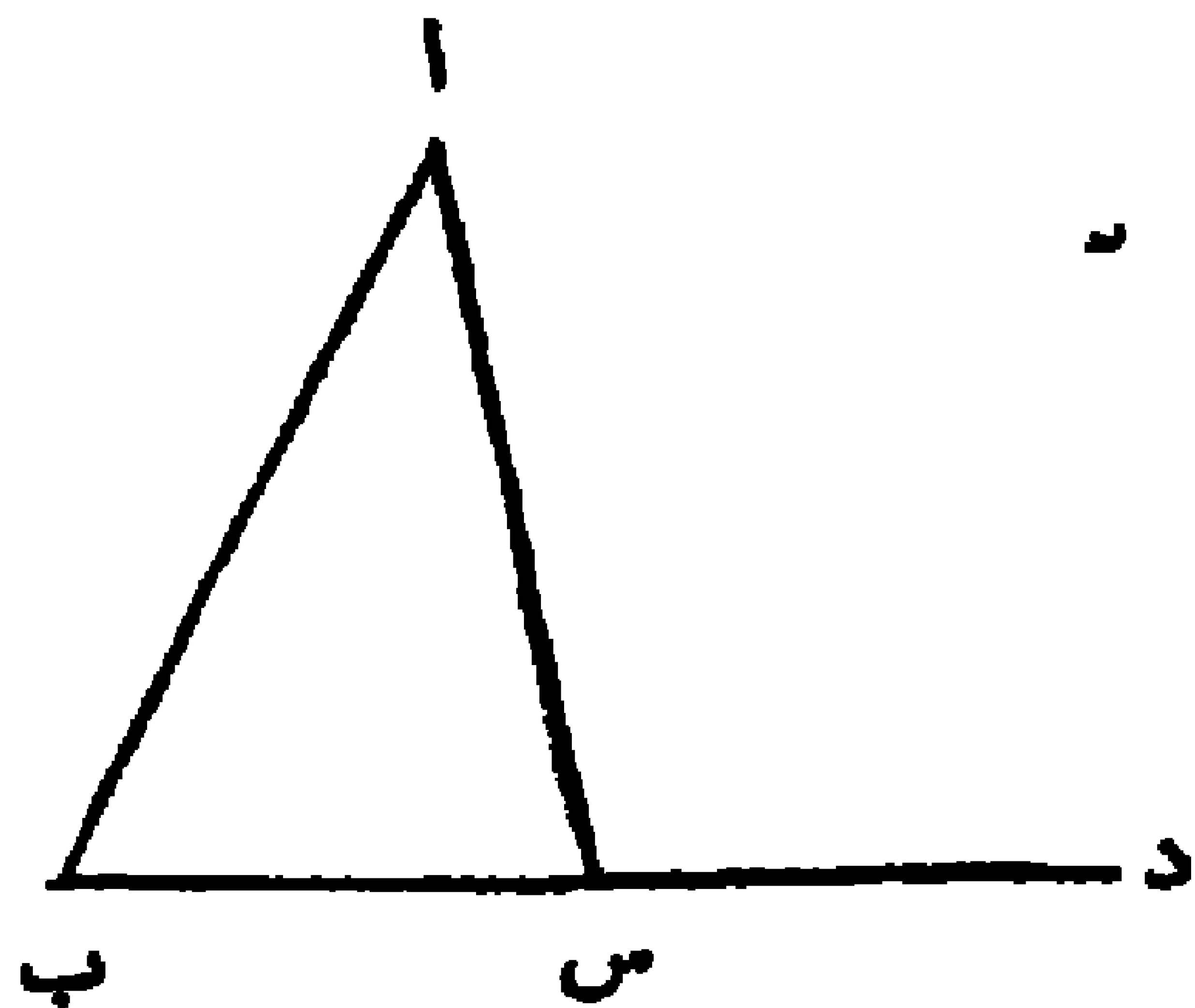
نصِّف ق س في ی (ق ١٠ ك ١)

ارسم ب ی واخرجه الى ا واجعل ی ا حتى يعدل ب ی (ق ٢ ك ١) ارسم ا س واخرج ق س الى غ

فلأنَّ ق ی يعدل ی س و ب ی يعدل ی ا فالخطَّان ق ی ی ب يعدلان ا ی ی س كل واحد يعدل نظيرهُ. والزاوية ق ی ب تعدل ا ی س (ق ١٥ ك ١) فالقاعدة ق ب تعدل القاعدة ا س (ق ٤ ك ١) والمثلث ق ی ب يعدل المثلث ا ی س وبقية الزوايا من الواحد تعدل بقية الزوايا من الاخر. يعني التي تقابلها الاضلاع المتساوية فالزاوية ب ق ی تعدل الزاوية ی س ا والزاوية ی س د اي ق س د هي اكبر من ی س ا فهي ايضاً اكبر من ب ق ی او ب ق س وعلى هذا النسق اذا نُصِّف ب س يبرهن ان الزاوية ب س غ او ق س د (ق ١٥ ك ١) هي اكبر من ق ب س

القضية السابعة عشرة . ن

زاويتان من مثلث هما معًا اصغر من قائمتين

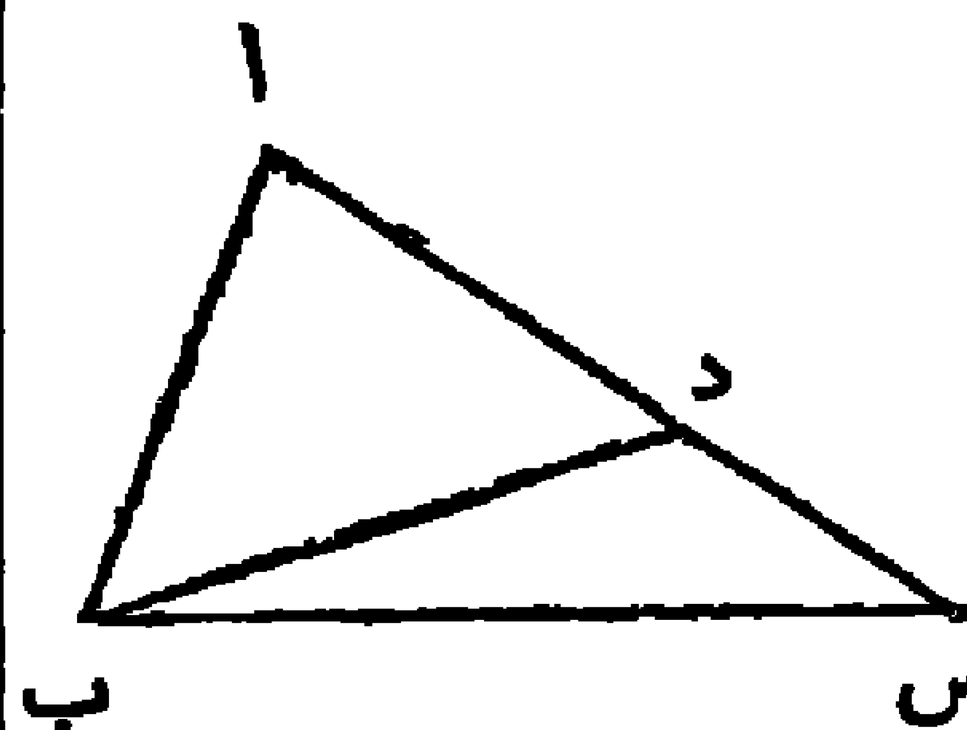


ليكن ا ب س مثلثًا فزاويتان منه معًا اصغر من قائمتين

اخرج ب س الى د فالزاوية الخارجة ا س د هي اكبر من الداخلة ا ب س (ق١٦ ك ١) اضف الى كل واحدة منها ا س ب فالزاويتان ا س د ا س ب معًا اكبر من ا ب س ا س ب معًا ولكن ا س د ا س ب معًا تعدلان قائمتين (ق١٣ ك١) واذ ذاك فالزاويتان ا ب س ا س ب معًا اصغر من قائمتين. وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان ب ا س ا س ب معًا و س ا ب ا ب س معًا اصغر من قائمتين

القضيّة الثامنة عشرة . ن

الضلع الاطول من كل مثلث تقابلهُ الزاوية الكبرى

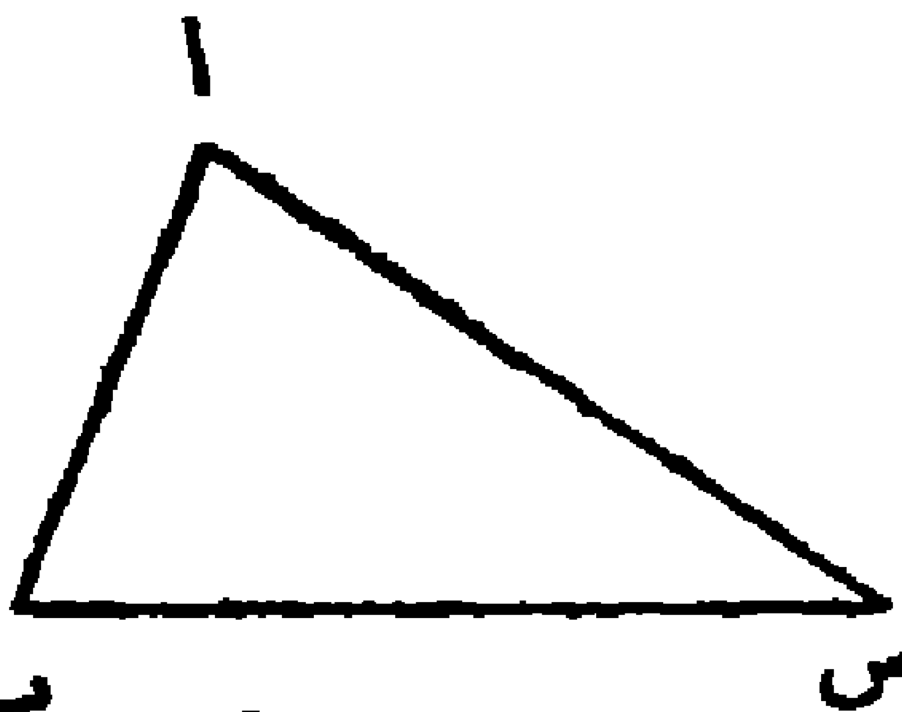


ليكن ا ب س مثلثًا وليكن الضلع ا س اطول من الضلع ا ب فتكون الزاوية ا ب س اكبر من الزاوية ب س ا

من ا س اقطع ا د حتى يعدل ا ب (ق ٣ ك١) وارسم ب د ففي المثلث د ب س الزاوية الخارجة ا د ب هي اكبر من الداخلة د س ب ولكن ا د ب تعدل ا ب د (ق ٥ ك ١) فالزاوية ا ب د ايضًا اكبر من د س ب وبالاحرى ا ب س اكبر من د س ب اي ا س ب

القضية التاسعة عشرة . ن

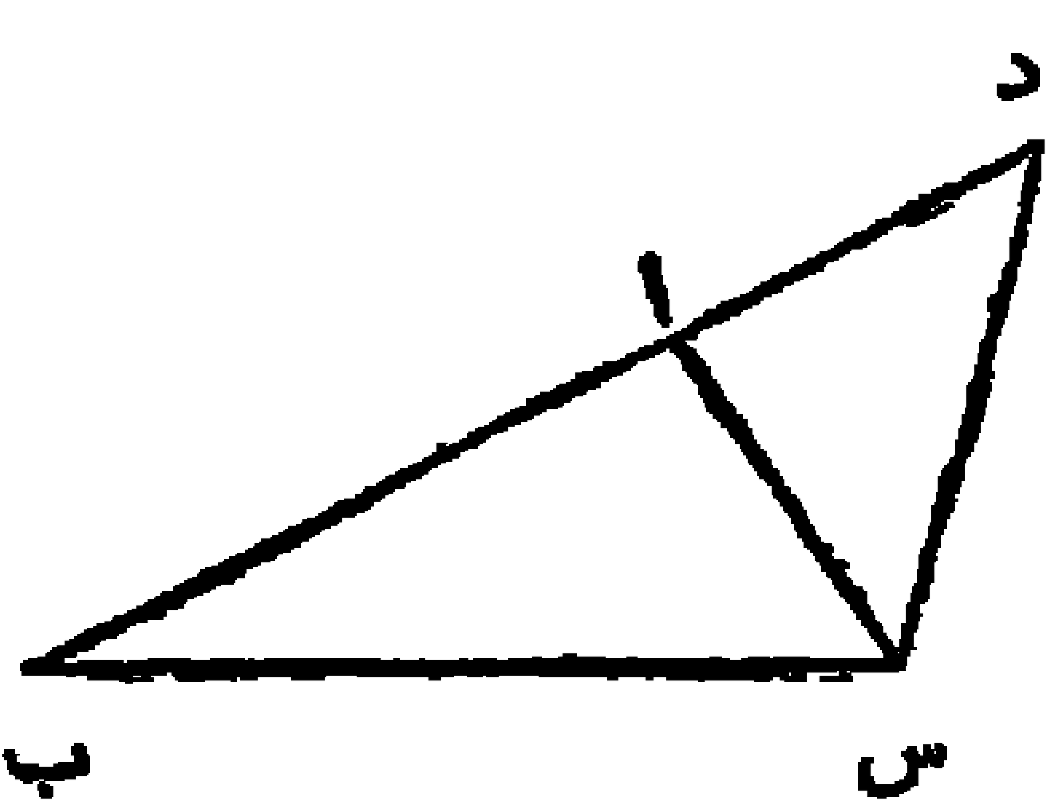
الزاوية الكبرى من كل مثلث يقابلها الضلع الاطول



ليكن ا ب س مثلثًا ولتكن الزاوية ا ب س اكبر من ا س ب فيكون الضلع ا س اطول من ا ب والاَّ فالضلع ا س يعدل ا ب او هو اقصر منه ولا يمكن ان يعدل ا ب لانه عند ذلك كانت الزاويتان ا س ب ا ب س متساويتين (ق ٥ ك ١) وقد فُرِض ان ا ب س اكبر من ا س ب ولو كان اقصر لكانت ا ب س اصغر من ا س ب (ق ١٨ ك ١) فبالضرورة يكون ا س اطول من ا ب

القضية العشرون . ن

ضلعان من مثلث هما معًا اطول من ضلعهِ الثالث



ليكن ا ب س مثلثًا فضلعان منهُ معًا اطول من ضلعه الثالث . اي الضلعان ب ا ا س معًا اطول من ب س وا ب ب س معًا اطول من ا س وب س س ا معًا اطول من ا ب

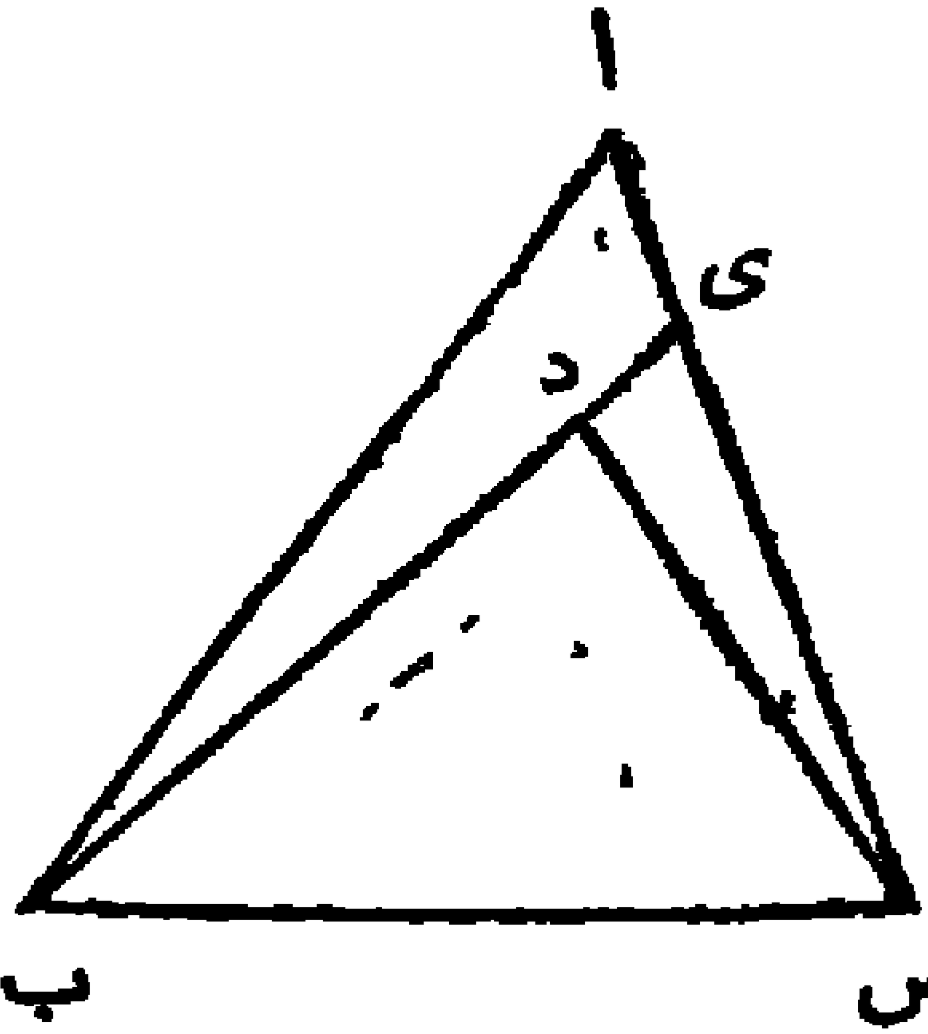
اخرج ب ا الى د واجعل ا د يعدل ا س (ق ٣ ك ١) وارسم د س فبما ان اد يعدل ا س فالزاوية ا د س تعدل ا س د (ق ٥ ك ١) وب س د هي اكبر من ا س د فهي ايضًا اكبر من ا د س فيكون الضلع ب د اطول من ب س (ق ١٩ ك ١) ولكن ب د يعدل ب ا مع ا س فالضلعان ب ا ا س معًا هما اطول من ب س وهكذا في كل ضلعين من المثلث

تعليقة . يبرهن ذلك بدون اخراج ضلعٍ من المثلث لان ب س هو البعد الاقرب بين النقطة ب والنقطة س فيكون ب س اقصر من ب ا ا س اي ب ا ا س معًا اطول من ب س

القضية الحادية والعشرون . ن

اذا رُسِمَ من طرفَي ضلع مثلثٍ خطان مستقيمان الى نقطة داخل المثلث

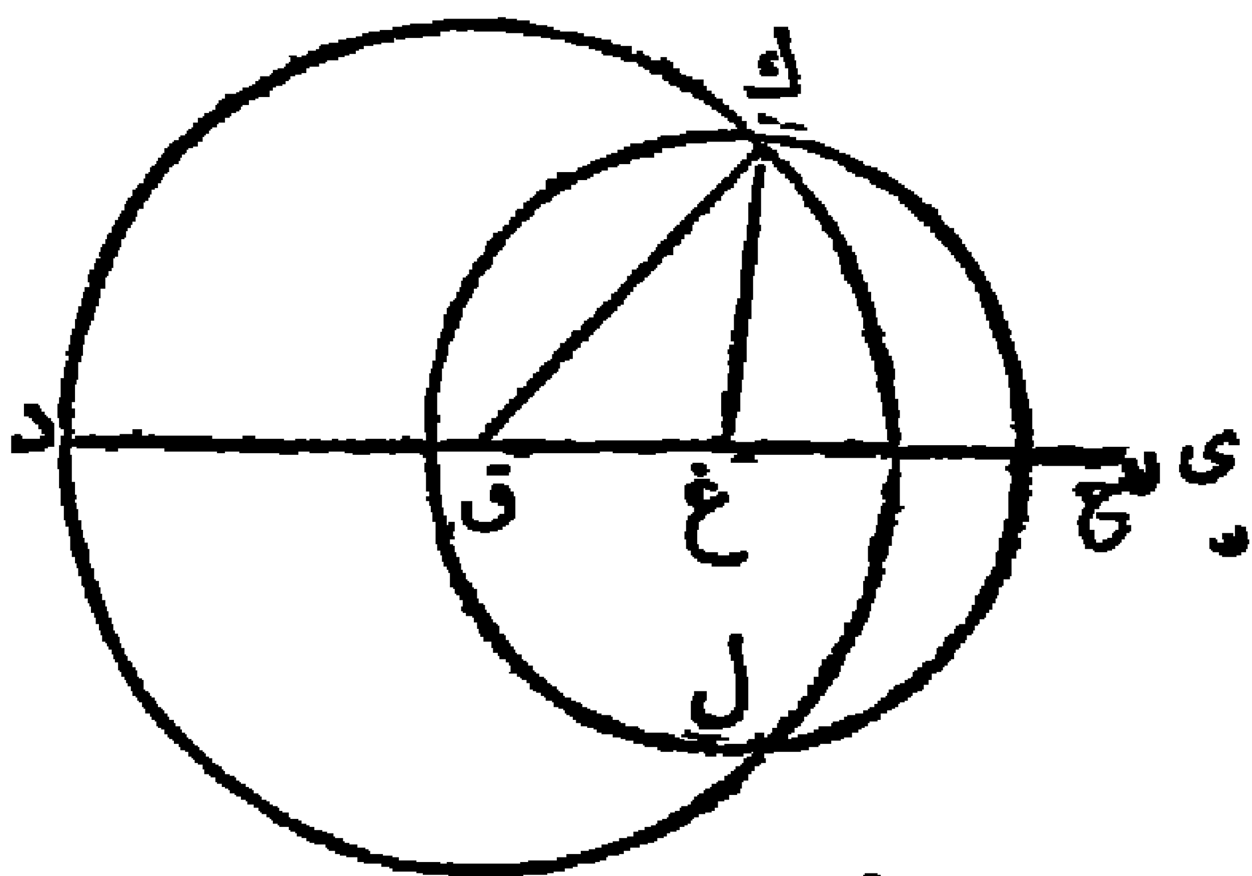
فهما اقصر من ضلعَي المثلث الآخرَين ولكن يحيطان بزاوية اكبر من التي بين الآخرين



ليكن ا ب س مثلثًا. وليُرسَم من طرفَي ب س خطان الى النقطة د داخل المثلث. مثل ب د س د فهما اقصر من ب ا ا س ولكن الزاوية ب د س هي اكبر من ب ا س. اخرج ب د الى ى. فالضلعان ب ا اى معًا من المثلث ب ا ى هما اطول من ب ى (ق ٢٠ ك ١) اضف لها ى س فالضلعان ب ا ا س اطول من ب ى ى س وفي المثلث س ى د الضلعان س ى ى د هما معًا اطول من س د. اضف لها د ب فالضلعان س ى ى ب معًا اطول من س د د ب. وقد تبرهن ان ب ا ا س هما معًا اطول من ب ى ى س فبالاحرى ب ا ا س اطول من ب د د س ثم الزاوية الخارجة ب د س من المثلث س د ى هي اكبر من الداخلة س ى د (ق ١٦ ك ١) ولذات هذا السبب س ى د هي اكبر من ى ا ب او س ا ب وقد تبرهن ان س د ب هي اكبر من س ى ب فبالاحرى هي اكبر من س ا ب

القضية الثانية والعشرون ع

علينا ان نرسم مثلثًا اضلاعهُ تعدل ثلاثة خطوط مستقيمة مفروضة وكل اثنين منها معًا اطول من الثالث



ليكن ا وب وس الخطوط المستقيمة المفروضة كل اثنين منها معًا اطول من الثالث. فعلينا ان نرسم مثلثًا اضلاعه تعدل هذه الخطوط الثلاثة

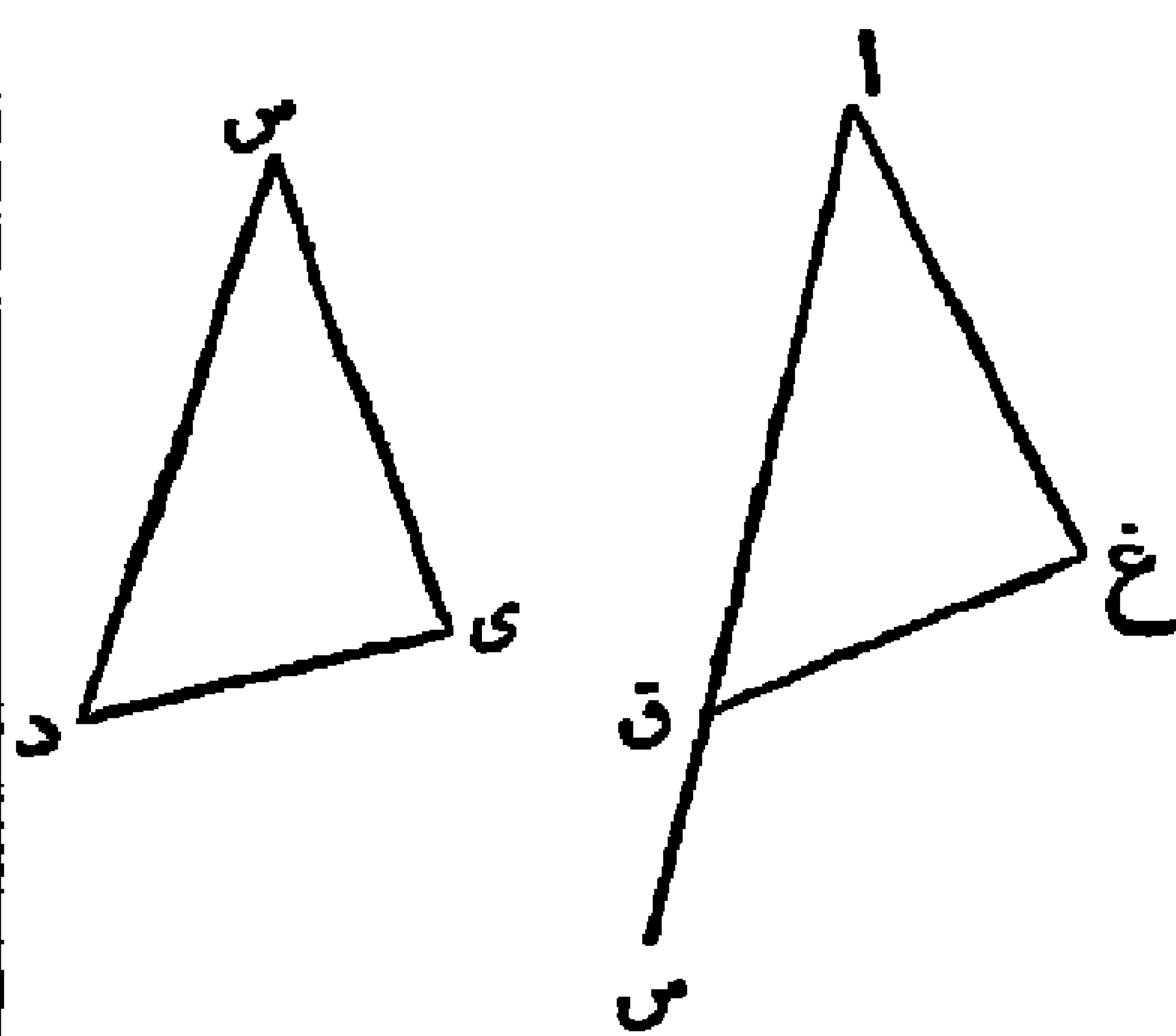
خذ خطًّا مستقيمًا ينتهي في نقطة د وغير محدود من جهة ى واقطع منه د ق حتى يعدل ا (ق ٣ ك ١) وق غ حتى

يعدل ب وغ ح حتى يعدل س ثم اجعل ق مركزًا وق د بعدًا (ثالثة الممكنات) وارسم دائرة د ك ل واجعل غ مركزًا وغ ح بعدًا وارسم دائرة ك ح ل (ثالثة الممكنات) ومن ك اي نقطة تقاطع الدايرتين ارسم ك ق ك غ فالمثلث ق ك غ هو المطلوب واضلاعه تعدل الخطوط الثلاثة المفروضة ا وب وس. فقد جعلنا ق غ حتى يعدل ب ومن حيث ان النقطة ق هي مركز الدائرة د ك ل فالخط ق ك يعدل ق د (حد ١١) ولكن ق د يعدل ا فالخط ق ك يعدل ا ايضًا. ومن حيث ان النقطة غ هي مركز الدائرة ك ح ل فالخط غ ح يعدل غ ك (حد ١١) ولكن غ ح يعدل س ولذلك غ ك يعدل س ايضًا فقد رُسِم مثلث اضلاعه تعدل ثلاثة خطوط مستقيمة مفروضة

تعليقة. لو كان احد الاضلاع اطول من مجتمع الآخرين لما تقاطعت الدائرتان والقضية صحيحة كل ما كان مجتمع ضلعين اطول من الثالث

القضية الثالثة والعشرون. ع

علينا ان نرسم من نقطة مفروضة في خط مستقيم مفروض زاوية مستقيمة بسيطة حتى تعدل زاوية اخرى مستقيمة بسيطة مفروضة

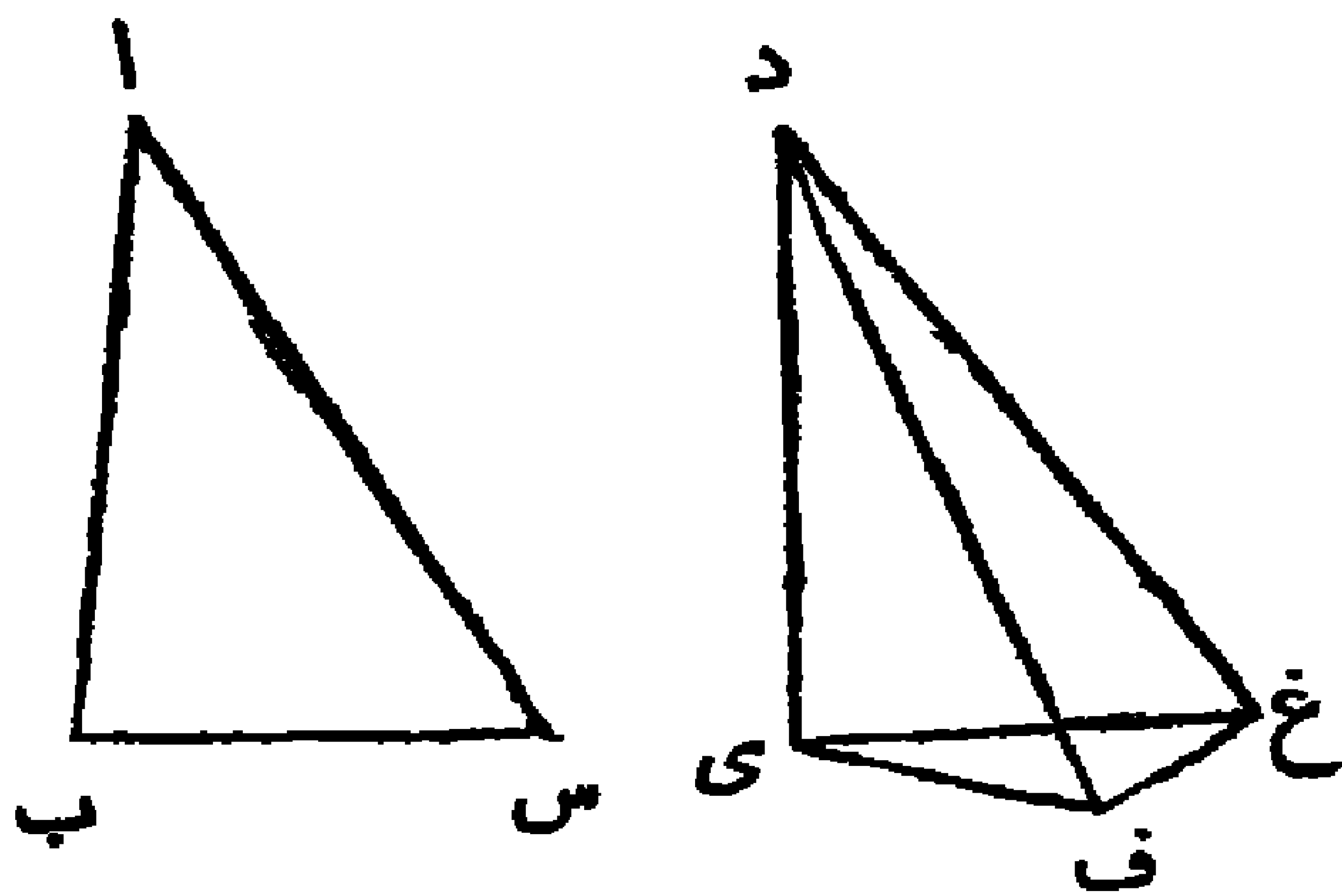


ليكن ا س الخط المستقيم المفروض وا النقطة المفروضة منه ود س ى الزاوية البسيطة المفروضة فعلينا ان نرسم من النقطة ا زاوية بسيطة تعدل د س ى. في س د عيّن اية نقطةٍ شئت مثل د. كذلك عيّنْ ى في س ى. ارسم د ى وارسم المثلث ا ق غ حتى يعدل المثلث س د ى (ق ٢٢ ك ١) اي الضلع ا ق يعدل س د والضلع ا غ يعدل س ى والضلع ق غ يعدل د ى فبما ان الضلعين ق ا ا غ يعدلان د س س ى والقاعدة ق غ تعدل القاعدة د ى فالزاوية ق ا غ تعدل الزاوية د س ى (ق ٨ ك ١) وقد رُسِمت من النقطة ا في الخط المفروض ا س

القضية الرابعة والعشرون . ن

في مثلثين اذا عدل ضلعان من الواحد ضلعين من الاخر وكانت الزاوية الحادثة بين ضلعَي الاول اكبر من الحادثة بين ضلعَي الاخر فالذي لهُ الزاوية الكبرى لهُ ايضاً القاعدة الطولى

لِيكن ا ب س د ى ف مثلثين ولنفرض ان الضلع ا ب يعدل د ى والضلع ا س يعدل د ف ولكن الزاوية ب ا س اكبر من ى د ف فتكون القاعدة ب س اطول من القاعدة ى ف

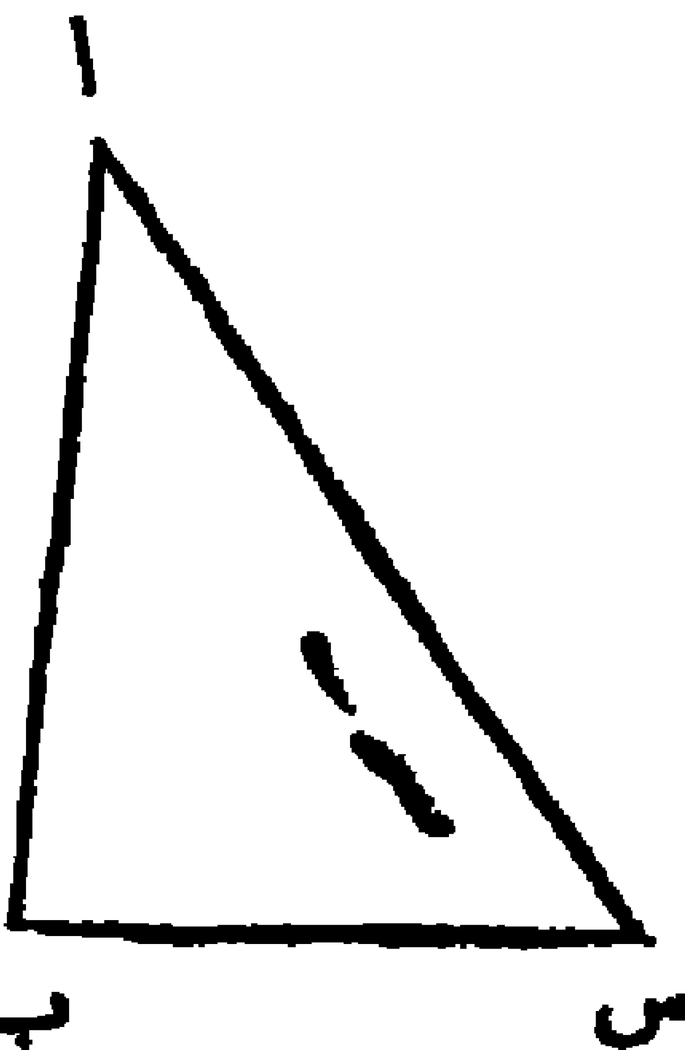


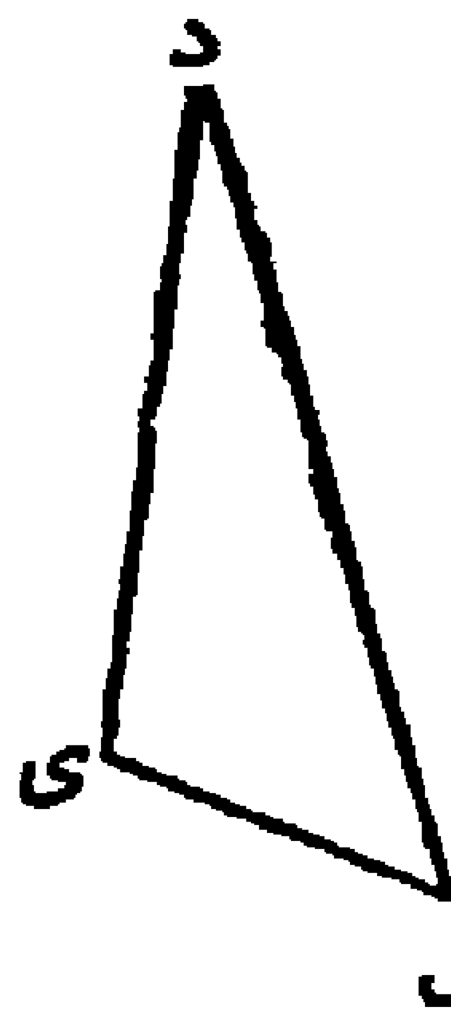
لِيكن د ف اطول من د ى ومن النقطة د ارسم الزاوية ى د غ حتى تعدل ب ا س (ق ٢٣ ك ١) واجعل د غ حتى يعدل ا س او د ف ارسم ى غ ف غ

فمن حيث ان ا ب يعدل د ى وا س يعدل د غ والزاوية ب ا س تعدل ى د غ فالقاعدة ب س تعدل القاعدة ى غ (ق ٤ ك ١) ومن حيث ان د ف يعدل د غ فالزاوية د ف غ تعدل د غ ف (ق ٥ ك ١) ولكن الزاوية د غ ف هي اكبر من ى غ ف فتكون د ف غ ايضاً اكبر من ى غ ف فكم بالاحرى تكون ى ف غ اكبر من ى غ ف وفي المثلث ى غ ف فمن حيث ان الزاوية ى ف غ هي اكبر من ى غ ف فيكون الضلع ى غ اطول من ى ف (ق ١٩ ك ١) ولكن ى غ يعدل ب س فالقاعدة ب س اطول من القاعدة ى ف

القضية الخامسة والعشرون . ن

اذا عدل ضلعا مثلثٍ ضلعَي مثلثٍ آخر ولكن كانت قاعدة احدهما اطول من قاعدة الآخر فالزاوية الكبرى هي لذي القاعدة الطولى

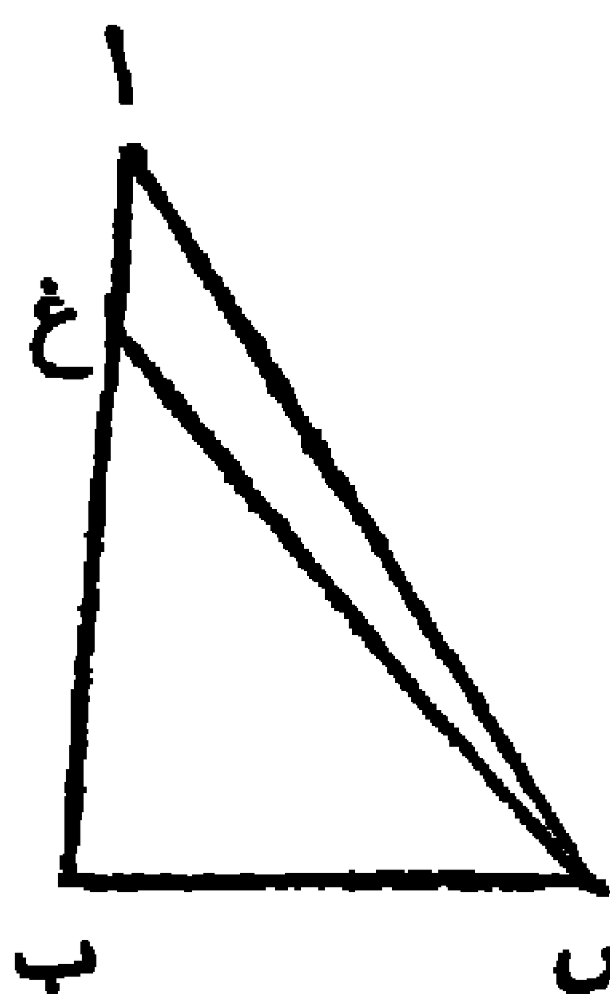




ليكن ا ب س د ى ف مثلثين ولنفرض ان ضلعين من الواحد ا ب ا س عدلا ضلعين من الاخر د ى د ف ولكن القاعدة ب س اطول من القاعدة ى ف فتكون الزاوية ب ا س اكبر من الزاوية ى د ف والّا فاما ان تعدلها او تكون اصغر منها فالزاوية ب ا س لا تعدل ى د ف لانه عند ذلك كانت القاعدة ب س تعدل القاعدة ى ف (ق ٤ ك ١) وقد فرض ب س الاكبر ولا يمكن ان تكون اصغر منها لانه عند ذلك كانت القاعدة ب س اصغر من ى ف (ق ٢٤ ك ١) وقد فرض ب س اكبر وقد تبرهن انها لا تعدلها فبالضرورة تكون الزاوية ب ا س اكبر من الزاوية ى د ف

القضية السادسة والعشرون · ن

اذا عدلت زاويتان من مثلثٍ زاويتين من مثلثٍ آخر اي كل واحدة عدلت نظيرَها. وضلعٌ من الواحد عدل ضلعًا من الآخر ان كانا المتواليين للزوايا المتساوية او المتقابلَين لها فالضلعان الاخران من الواحد يعدلان الاخرين من الآخر والزاوية الثالثة من الواحد تعدل الثالثة من الآخر



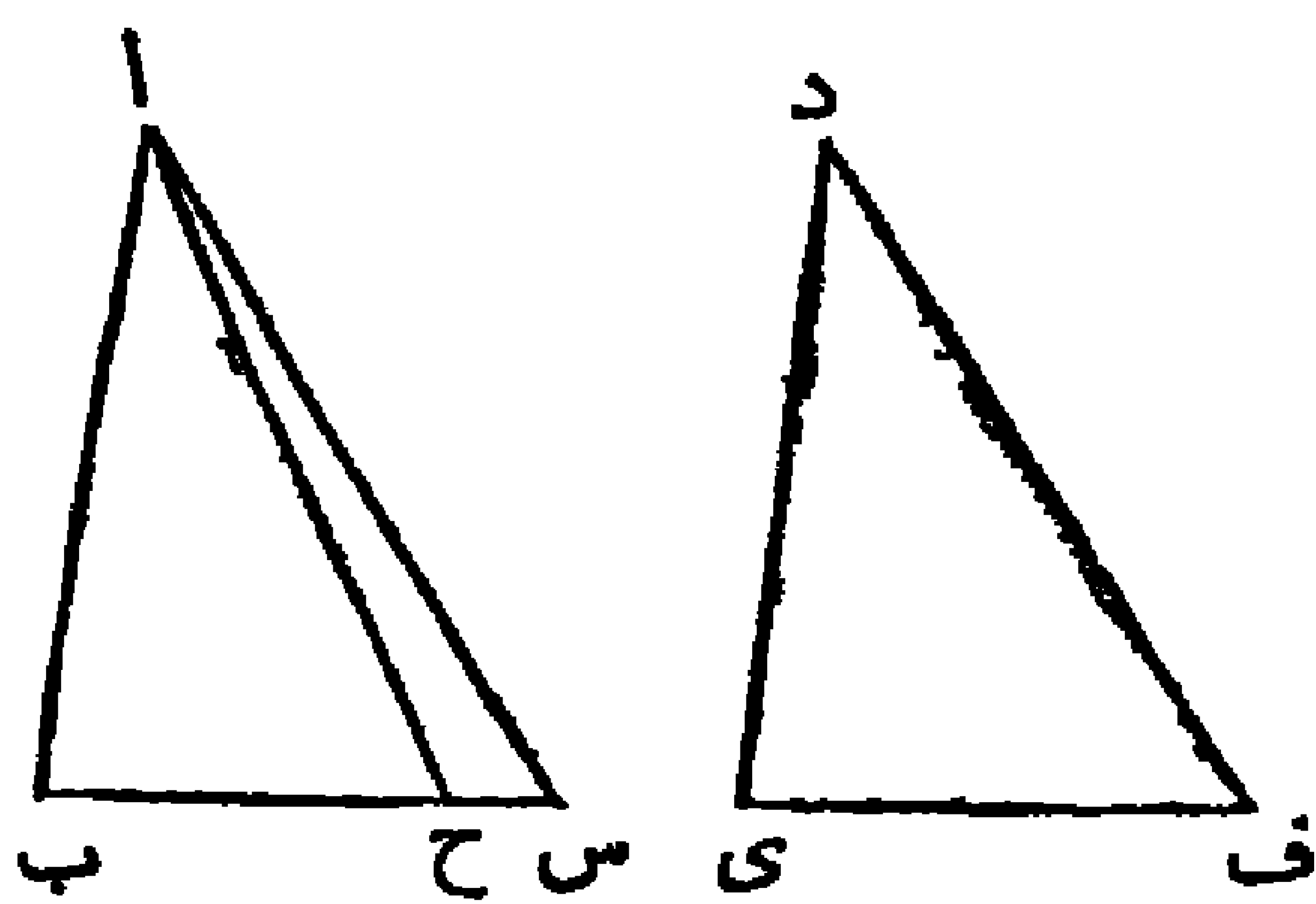


ليكن ا ب س د ى ف مثلثين والزاوية ا ب س فلتعدل د ى ف والزاوية ب س ا فلتعدل ى ف د والضلع ب س فليعدل ي ف وهما المتواليان للزوايا المتساوية فالضلعان الاخران من الواحد ا ب ا س يعدلان الاخرين من الاخر د ى د ف والزاوية الثالثة من الواحد

ب ا س تعدل الثالثة من الاخر ى د ف

وان لم يكن ا ب ود ى متساويين فبالضرورة يكون احدهما اطول من الاخر فلنفرض ا ب الاطول ولنفصل منه ب غ حتى يعدل د ى (ق٣ ك١) ولنرسم غ س فمن حيث ان غ ب يعدل د ى وب س يعدل ى ف فالضلعان غ ب ب س يعدلان الضلعين د ى ى ف كل واحد يعدل نظيره والزاوية غ ب س تعدل د ي ف فالقاعدة غ س تعدل القاعدة د ف (ق٤ ك١) والمثلث غ ب س يعدل المثلث د ى ف وبقية الزوايا من الواحد تعدل بقية الزوايا من الاخر كل واحدة تعدل نظيرها اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية. فالزاوية غ س ب تعدل د ف ى وقد فرض ان د ف ى تعدل ا س ب فالزاوية غ س ب ايضًا تعدل ا س ب اي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فلا يمكن ان يكون ا ب ود ى غير متساويين اي هما متساويان وب س يعدل ى ف فالضلعان ا ب ب س يعدلان الضلعين د ى ى ف والزاوية ا ب س تعدل د ى ف فالقاعدة ا س تعدل القاعدة د ف (ق ٤ ك١) والزاوية ب ا س تعدل الزاوية ى د ف

ثم لنفرض مساواة الضلعين اللذين يقابلان الزوايا المتساوية في كلا المثلثين يعني ان ا ب يعدل د ى فعلى هذا المفروض ايضًا لنا مساواة بقية الاضلاع يعني ا س يعدل د ف وب س يعدل ى ف والزاوية الثالثة من الواحد ب ا س تعدل الثالثة من الاخر ى د ف

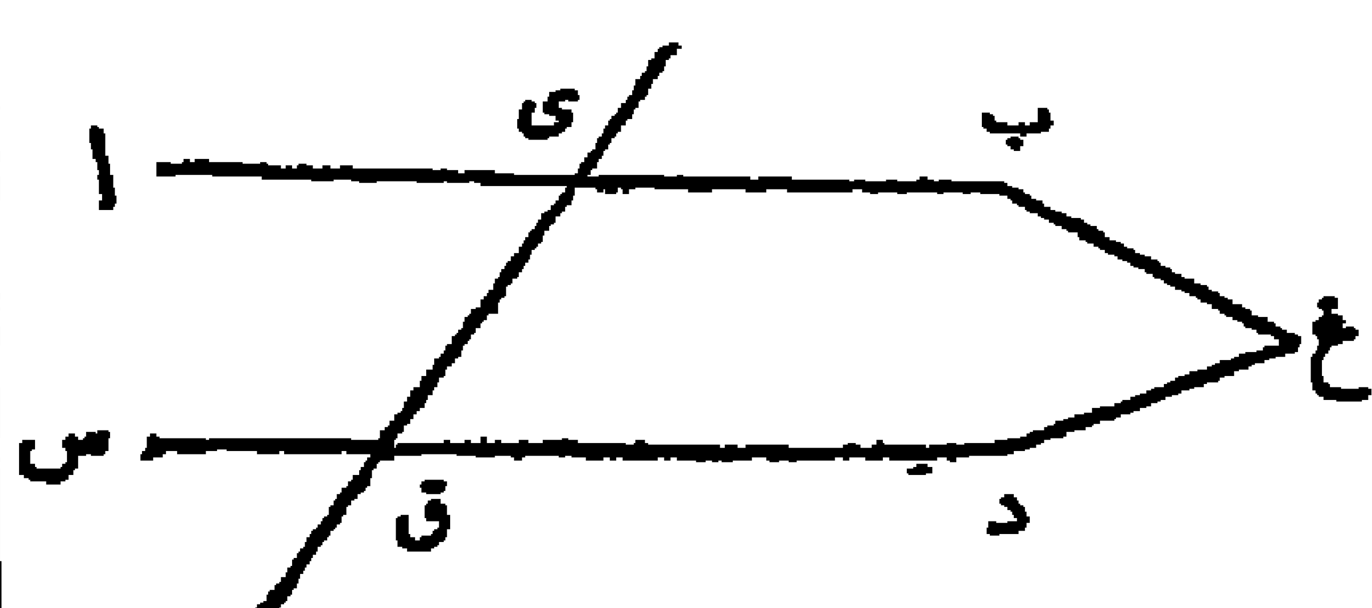


فان لم يكن ب س وى ف متساويين فليكن ب س اطولها. افصل منه ب ح حتى يعدل ى ف (ق٣ ك١) وارسم ا ح فمن حيث ان ب ح يعدل ى ف وا ب يعدل د ى فالضلعان ا ب ب ح يعدلان الضلعين د ى ى ف والزاوية ا ب ح تعدل د ى ف فالقاعدة ا ح تعدل القاعدة د ف (ق ٤ ك ١) والمثلث ا ب ح يعدل المثلث د ى ف وبقية الزوايا ايضًا متساوية اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية فالزاوية ب ح ا تعدل ى ف د ولكن ى ف د تعدل ب س ا فالزاوية ب س ا تعدل ب ح ا اي الزاوية

الخارجة ا ح ب تعدل الداخلة المتقابلة ا س ب وذلك لا يمكن (ق ١٦ ك ١) فلا يمكن ان يكون ب س وى ف غير متساويين اي هما متساويان وا ب يعدل د ى فالضلعان ا ب ب س يعدلان د ى ى ف والزاوية ا ب س تعدل د ى ف فالقاعدة ا س تعدل القاعدة د ف والزاوية الثالثة ب ا س تعدل الثالثة ى د ف

القضية السابعة والعشرون . ن

اذا وقع خطٌ مستقيم على خطين آخرين مستقيمين وجعل الزاويتين المتبادلتين متساويتين فالخطان متوازيان

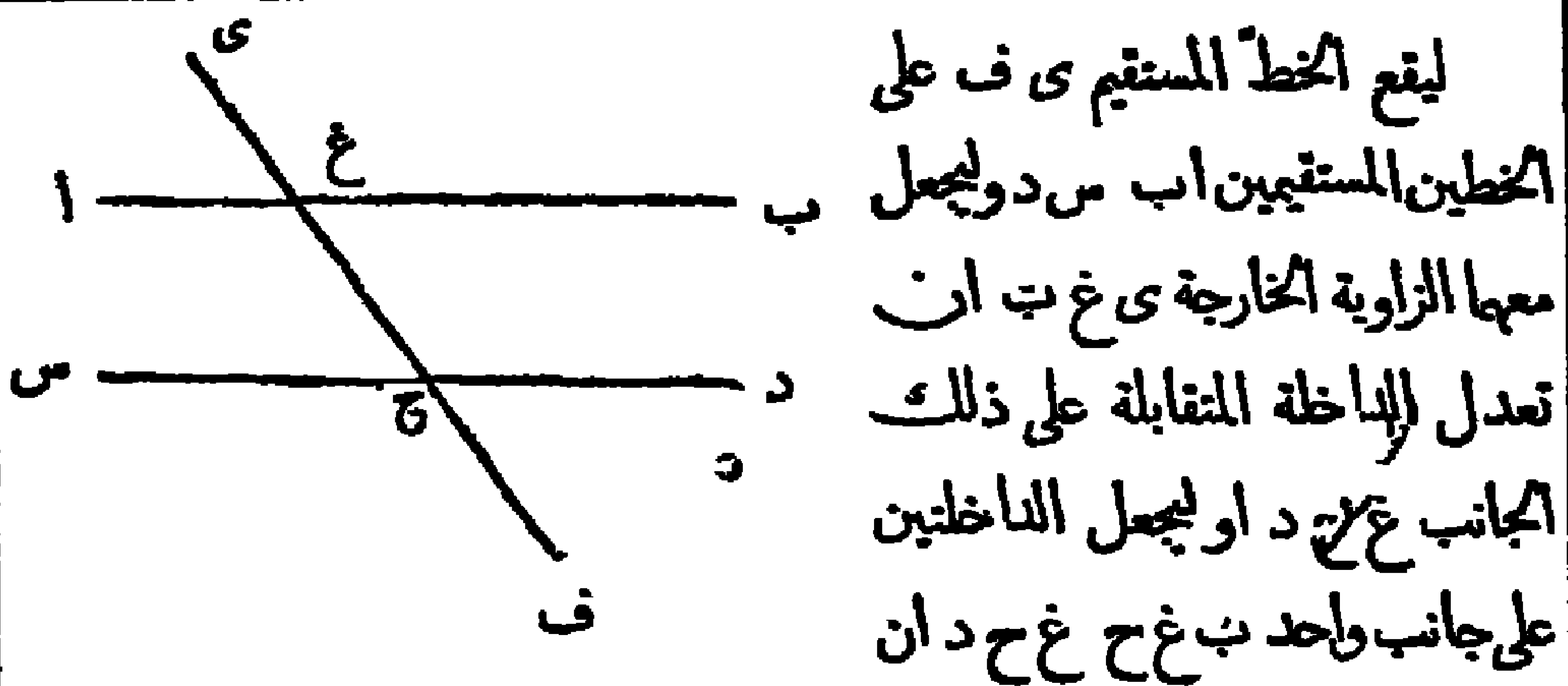


ليقع الخط المستقيم ى ق على الخطّين المستقيمين ا ب س د وليجعل معهما الزاويتين المتبادلتين ا ى ق ى ق د متساويتين فالخطان ا ب س د متوازيان

والاَّ فيلتقيان اذا اخرجا . فلنفرض التقاءهما في النقطة غ فيكون غ ى ق مثلثًا وزاويتهُ الخارجة ا ى ق تكون اكبر من الداخلة المتقابلة ى ق غ (ق ١٦ ك ١) وقد فرض مساواتهما فلا تكون احداهما اكبر من الاخرى فلا يلتقي ا ب وس د اذا اخرجا الى جهة ب ود. وهكذا يبرهن انهما لا يلتقيان اذا اخرجا الى جهة ا وس فهما اذًا متوازيان (حد ٣٠)

القضية الثامنة والعشرون . ن

اذا وقع خطٌ مستقيم على خطّين مستقيمين واحدث زاويةً خارجةً تعدل الداخلة المتقابلة على جانب واحد منهُ او داخلتين على جانب واحد منه تعدلان معًا قائمتين فالخطان متوازيان

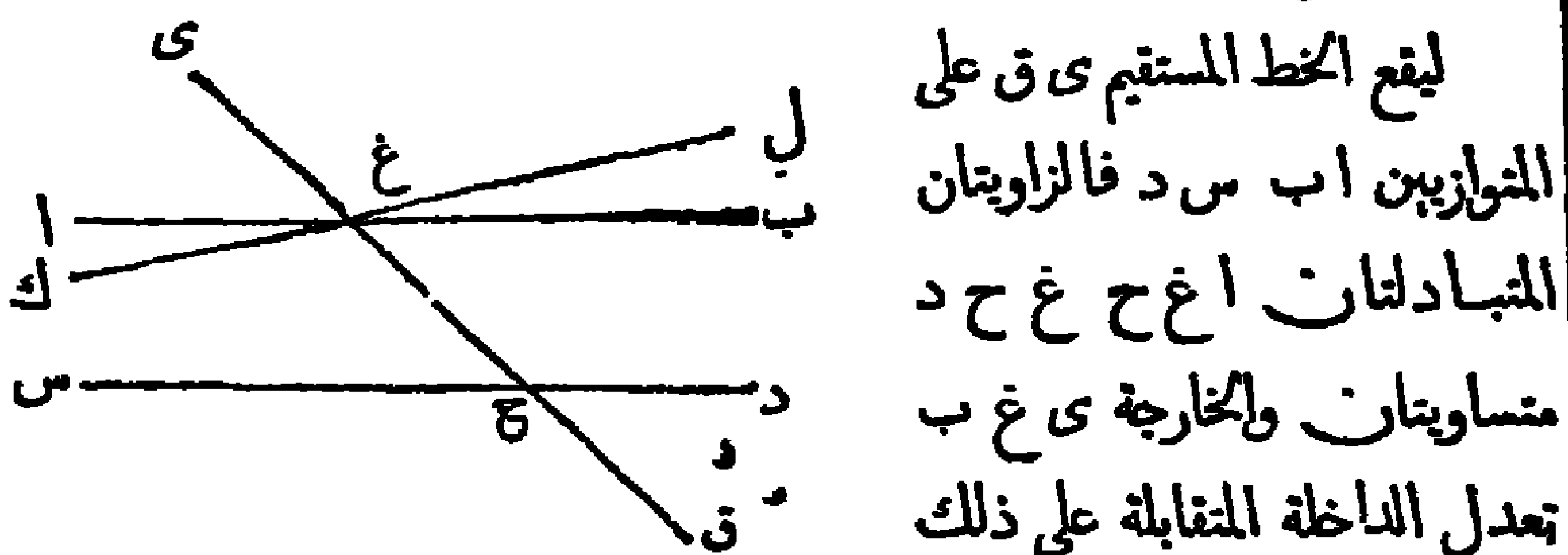


ليقع الخطّ المستقيم ى ف على الخطين المستقيمين اب س د وليجعل معها الزاوية الخارجة ى غ ب ان تعدل الداخلة المتقابلة على ذلك الجانب غ ح د او ليجعل الداخلتين على جانب واحد ب غ ح غ ح د ان تعدلا قائمتين فالخطان ا ب س د متوازيان. فمن حيث ان ى غ ب تعدل غ ح د وتعدل ايضًا ا غ ح (ق ١٥ ك ١) فالزاوية ا غ ح تعدل غ ح د وهما متبادلتان ولذلك (ق ٢٧ ك ١) ا ب يوازي س د وايضًا من حيث ان ب غ ح غ ح د تعدلان قائمتين حسب المفروض وا غ ح ب غ ح تعدلان قائمتين (ق ١٣ ك ١) فالزاويتان ب غ ح ا غ ح تعدلان ب غ ح غ ح د اطرح المشتركة ب غ ح فالباقية ا غ ح تعدل الباقية غ ح د وهما متبادلتان. ولذلك ا ب وس د متوازيان

فرعٌ. اذًا ان كان خطان مستقيمان عمودّيين على خط مستقيم ثالث فهما متوازيان

القضية التاسعة والعشرون. ن

اذا وقع خطٌ مستقيم على خطّين مستقيمين متوازيين فالزاويتان المتبادلتان الحادثتان متساويتان والزاوية الخارجة تعدل الداخلة المتقابلة على جانب واحد والداخلتان على جانب واحد تعدلان قائمتين



ليقع الخط المستقيم ى ق على المتوازيين ا ب س د فالزاويتان المتبادلتان ا غ ح غ ح د متساويتان والخارجة ى غ ب تعدل الداخلة المتقابلة على ذلك الجانب غ ح د والداخلتان على جانب واحد ب غ ح غ ح د تعدلان قائمتين

فان لم تكن ا غ ح غ ح د متساويتين فليرسم الخط ك غ حتى ان ك غ ح تعدل غ ح د واخرج ك غ الى ل فالخط ك ل يوازي س د (ق ٢٧ ك ١) وا ب ايضًا

يوازي س د فقد رُسِم خطان مستقيمان مارّان بنقطة واحدة غ يوازيان س د من غير ان يتطابقا وذلك محال (اولية ١١) فلا تكون الزاويتان ا غ ح غ ح د غير متساويتين اي هما متساويتان. والزاوية ى غ ب تعدل ا غ ح (ق١٥ ك١) ولذلك ى غ ب ايضاً تعدل غ ح د (اولية اولى) اضف اليهما ب غ ح فالزاويتان ى غ ب ب غ ح تعدلان ب غ ح غ ح د ولكن ى غ ب ب غ ح تعدلان قائمتين (ق١٣ ك١) ولذلك ب غ ح غ ح د تعدلان قائمتين ايضاً

فرعٌ اول. اذا جعل الخطان ك ل س د مع ى ق الزاويتين ك غ ح غ ح س معاً اصغر من قائمتين فالخطان ك غ س ح يلتقيان على ذلك الجانب من ى ق الذي فيه كانت الزاويتان اصغر من قائمتين

والاّ فهما متوازيان. او يلتقيان على الجانب الاخر من الخط ى ق ولكنهما غير متوازيين. والاّ لكانت ك غ ح غ ح س معاً تعدلان قائمتين ولا يلتقيان على الجانب الاخر من الخط ى ق والاّ لكانت ل غ ح غ ح د زاويتين من زوايا مثلث واصغر من قائمتين وذلك لا يمكن لان الاربع زوايا ك غ ح ح غ ل س ح غ غ ح د تعدل اربع زوايا قائمة (ق١٣ ك١) واثنتان منها اي ك غ ح غ ح س هما بالمفروض اصغر من قائمتين فبالضرورة الاخريان ل غ ح غ ح د اكبر من قائمتين فمن حيث ان ك ل س د غير متوازيين ولا يلتقيان من جهة ل و د فبالضرورة يلتقيان اذا اخرجا الى جهة ك و س

فرعٌ ثانٍ. اذا كان ب غ ح قائمة تكون غ ح د ايضاً قائمة فالخط العمودي على احد خطّين متوازيين هو عموديٌ على الاخر ايضاً

فرعٌ ثالث. من حيث ان ا غ ى = ب غ ح ود ح ق = س ح غ تكون الاربع الزوايا الحادّة ا غ ى ب غ ح س ح غ د ح ق متساوية. وهكذا الاربع الزوايا المنفرجة ى غ ب ا غ ح غ ح د س ح ق هي ايضاً متساوية. واذا اضيفت احدى الحادّات الى احدى المنفرجات فالمجموع يعدل قائمتين

تعليقة. الزوايا المذكورة لها اسماءٌ مختلفة باعتبار نسبة بعضها الى بعض فالزاويتان ب غ ح غ ح د هما الداخلتان على جانب واحد وكذلك ا غ ح غ ح س. والزاويتان ا غ ح غ ح د هما الداخلتان المتبادلتان او المتبادلتان فقط. وكذلك ب غ ح غ ح س. والزاويتان ى غ ب غ ح د هما الخارجة والداخلة وكذلك ى غ ا غ ح س

والزاويتان ى غ ب س ح ق هما الخارجتان المتبادلتان وكذلك ا غ ى د ح ق

القضية الثلثون ن

الخطوط المستقيمة المتوازية لخطٍ واحدٍ مستقيم هي متوازية بعضها لبعض

ليكن الخطان ا ب س د متوازيين للخط ى ف فهما متوازيان ايضًا

ليقع على ا ب ى ف س د الخط المستقيم غ ح ك فمن حيث ان ا ب ى ف متوازيان فالزاوية ا غ ح تعدل الزاوية غ ح ف (ق ٢٩ ك ١) ومن حيث ان ى ف س د متوازيان فالزاوية غ ح ف تعدل غ ك د (ق ٢٩ ك ١) وقد تبرهن ان ا غ ح تعدل غ ح ف فلذلك ا غ ح تعدل غ ك د ايضًا وهما متبادلتان فالخط ا ب يوازي الخط س د (ق ٢٧ ك ١)

القضية الحادية والثلثون ع

علينا ان نرسم خطًّا مستقيمًا يمرّ في نقطة مفروضة ويوازي خطًّا مستقيمًا مفروضًا

لتكن ا النقطة المفروضة و ب س الخط المستقيم المفروض. علينا ان نرسم خطًّا مستقيمًا يوازي ب س ويمرّ بالنقطة ا

عيّن اية نقطة شئت في ب س كالنقطة د مثلاً. ارسم ا د وفي النقطة ا من الخط ا د ارسم الزاوية د ا ى واجعلها ان تعدل الزاوية ا د س (ق ٢٣ ك ١) واخرج ى ا الى ف

فمن حيث ان الخط المستقيم ا د يلاقي الخطين المستقيمين ى ف ب س ويجعل معهما الزاويتين المتبادلتين ى ا د ا د س متساويتين فالخط ى ف يوازي ب س (ق ٢٧ ك ١) وقد رُسم حتى يمرّ في النقطة ا المفروضة

القضية الثانية والثلثون · ن

اذا أُخرج ضلعٌ من اضلاع مثلثٍ فالزاوية الخارجة تعدل الداخلتين المتقابلتين · والزوايا الثلاث الداخلة من كل مثلث تعدل قائمتين

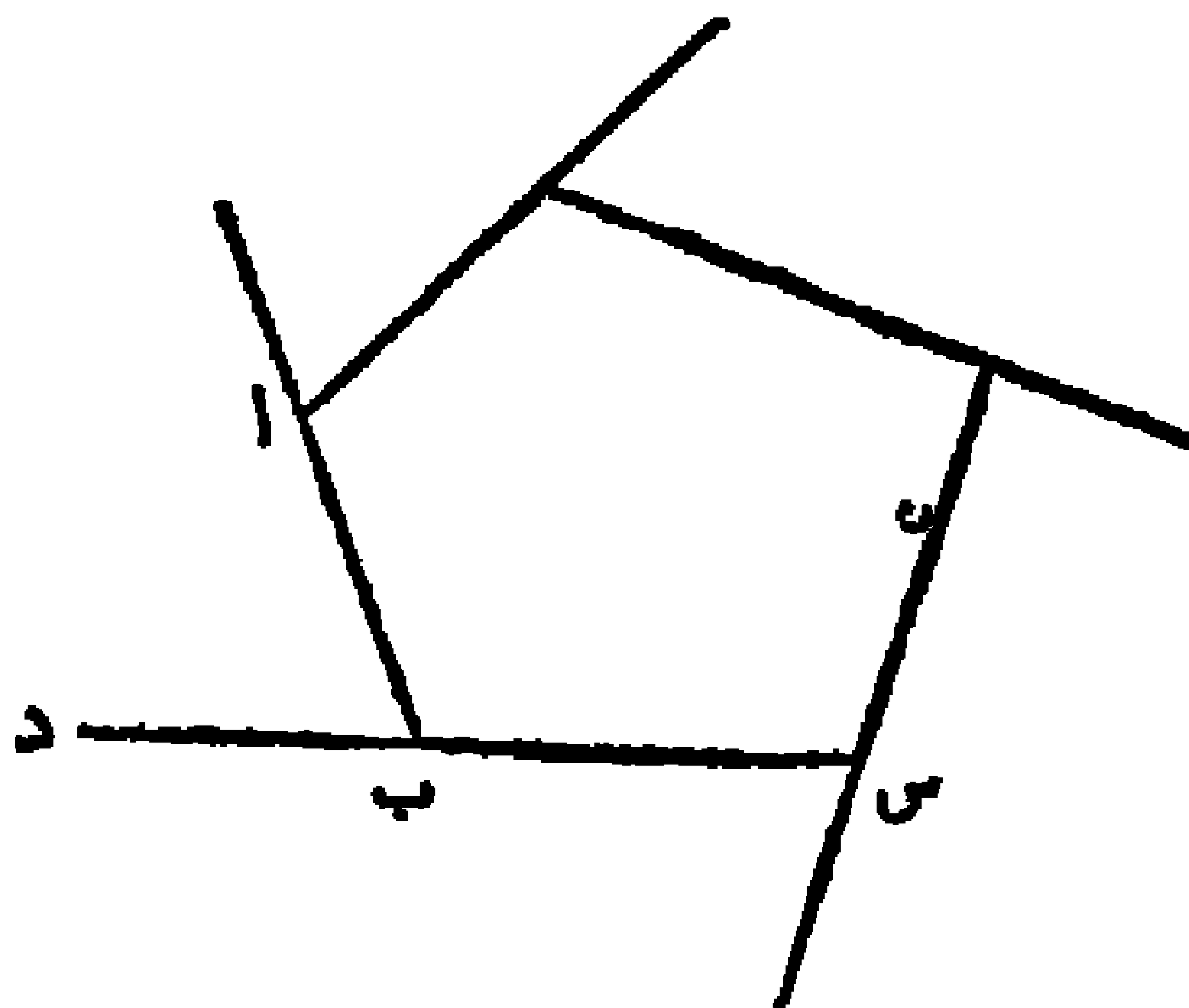
ليكن ا ب س مثلثاً وليخرج منه الضلع ب س الى د فالزاوية الخارجة ا س د تعدل الداخلتين المتقابلتين س ا ب ا ب س والزوايا الثلاث الداخلة ا ب س ب س ا س ا ب معاً تعدل قائمتين

من النقطة س ارسم الخط المستقيم س ى حتى يوازي ا ب (ق ٣١ ك ١) فمن حيث ان الخط ا س يلاقي الخطين المتوازيين ا ب س ى فالزاويتان المتبادلتان ا س ى ب ا س متساويتان (ق ٢٩ ك ١) ومن حيث ان ب د يلاقي المتوازيين ا ب س ى فالزاوية الخارجة ى س د تعدل الداخلة المتقابلة ا ب س وقد تبرهن ان ا س ى تعدل ب ا س فكل الخارجة ا س د تعدل الداخلتين المتقابلتين ب ا س ا ب س · اضف الى هذه الزوايا الزاوية ا س ب فالزاويتان ا س د ا س ب تعدلان الثلاث زوايا ا ب س ب ا س ا س ب ولكن ا س د ا س ب معاً تعدلان قائمتين (ق ١٣ ك ١) فالزوايا الثلاث ا ب س ب ا س ا س ب ايضاً تعدل قائمتين

فرعٌ اول · جميع الزوايا الداخلة في كل شكل ذي اضلاع مستقيمة تعدل من الزوايا القائمة ما يماثل مضاعف عدد اضلاع الشكل الاّ اربع زوايا قائمة

لان كل شكل ذي اضلاع مستقيمة مثل ا ب س د ى ينقسم الى مثلثات تماثل عدد اضلاعه برسم خط مستقيم من كل زاوية الى نقطة داخلةً مثل ق فحسب هذه القضية زوايا كلّ مثلث تعدل قائمتين فجميع زوايا جميع المثلثات يعدل قائمتين في عدد اضلاع الشكل ولكن الزوايا عند ق تعدل اربع زوايا قائمة (ق ١٥ ك ١ فرع ٢) فزوايا الشكل تعدل قائمتين في عدد

اضلاع الشكل الأ اربع زوايا قائمة



فرعٌ ثانٍ . مجموع الزوايا الخارجة من كل شكل ذي اضلاع مستقيمة يعدل اربع زوايا قائمة. لان كل زاوية داخلة ا ب س مع الخارجة المتوالية ا ب د تعدل قائمتين (ق١٣ ك ١) فجميع الداخلة مع جميع الخارجة تعدل قائمتين في عدد اضلاع الشكل والداخلة تعدل قائمتين في عدد اضلاع الشكل الأ اربع قائمات حسب الفرع الاول فالخارجة تعدل اربع قائمات

فرعٌ ثالث. اذا فُرِضَت زاويتان من زوايا مثلث او مجموعها فتستعلم الثالثة بطرح المجموع من قائمتين

فرعٌ رابع . اذا عدلت زاويتان من مثلث زاويتين من مثلث آخر فالثالثة من الواحد تعدل الثالثة من الاخر والمثلثان متساويا الزوايا

فرعٌ خامس. لا يكون في مثلث اكثر من زاوية واحدة قائمة. لانهُ لو كانت لهُ قائمتان لكانت الثالثة لا شيء. وبالاحرى لا يكون لمثلث اكثر من زاوية واحدة منفرجة

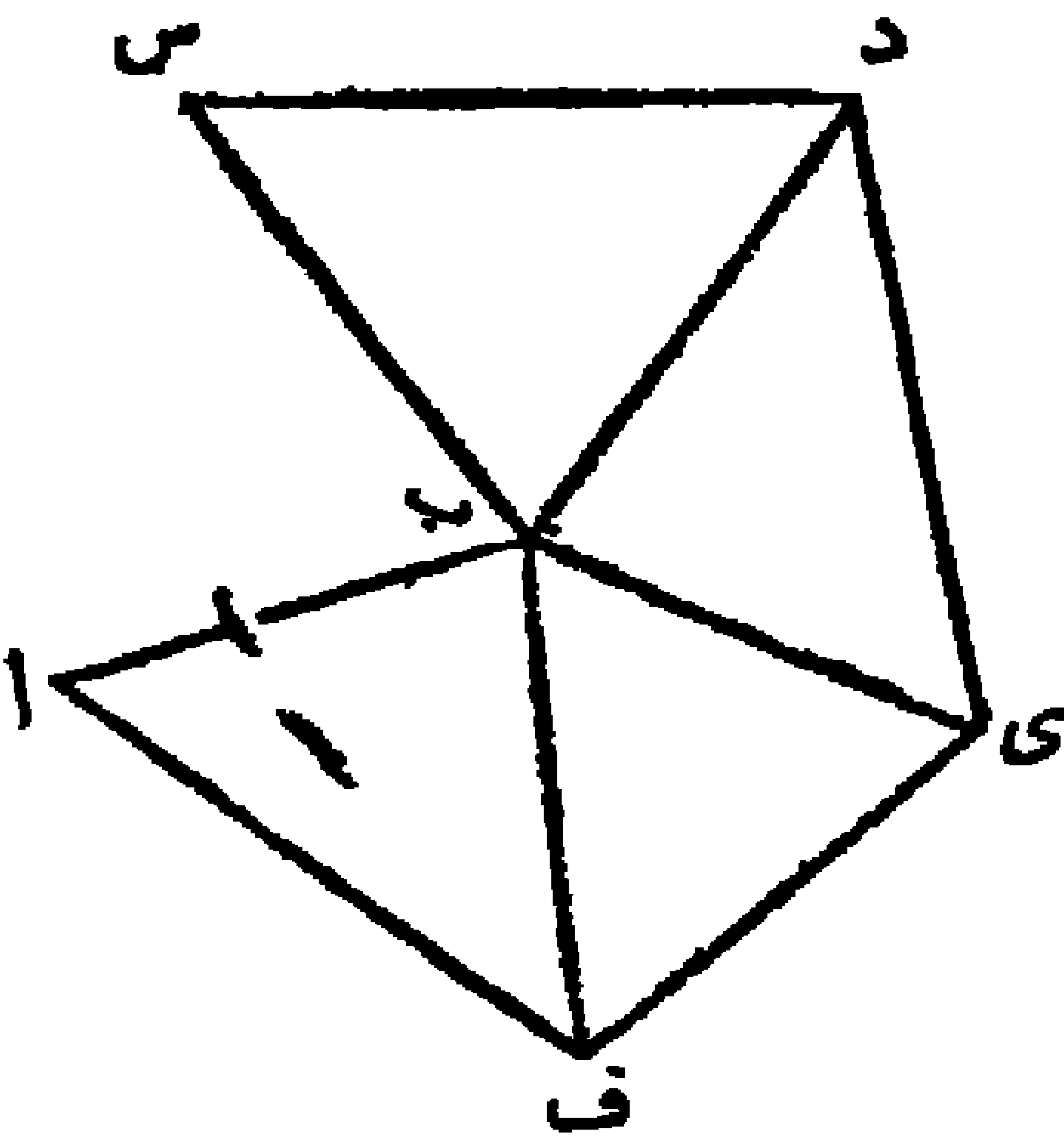
فرعٌ سادس. في كل مثلث قائم الزاوية مجموعُ الحادتين يعدل قائمة

فرعٌ سابع . من حيث ان كل مثلث متساوي الاضلاع هو متساوي الزوايا ايضاً (فرع ق ٥ ك١) فكل زاوية من زواياه تعدل ثُلث قائمتين او ثُلثَي قائمة

فرعٌ ثامن . مجموع زوايا ذي اربعة اضلاع يعدل قائمتين في ٤ – ٢ اي اربع قائمات فاذا كانت زواياه متساوية تكون كل واحدة قائمة وذلك يؤيد الحدّ الخامس والعشرين والسادس والعشرين

فرعٌ تاسع . مجموع زوايا ذي خمسة اضلاع يعدل قائمتين في ٥ – ٢ اي ستّ قائمات فاذا كانت زواياه متساوية تكون كل واحدة خُمس ست قائمات اي ٦/٥ قائمة

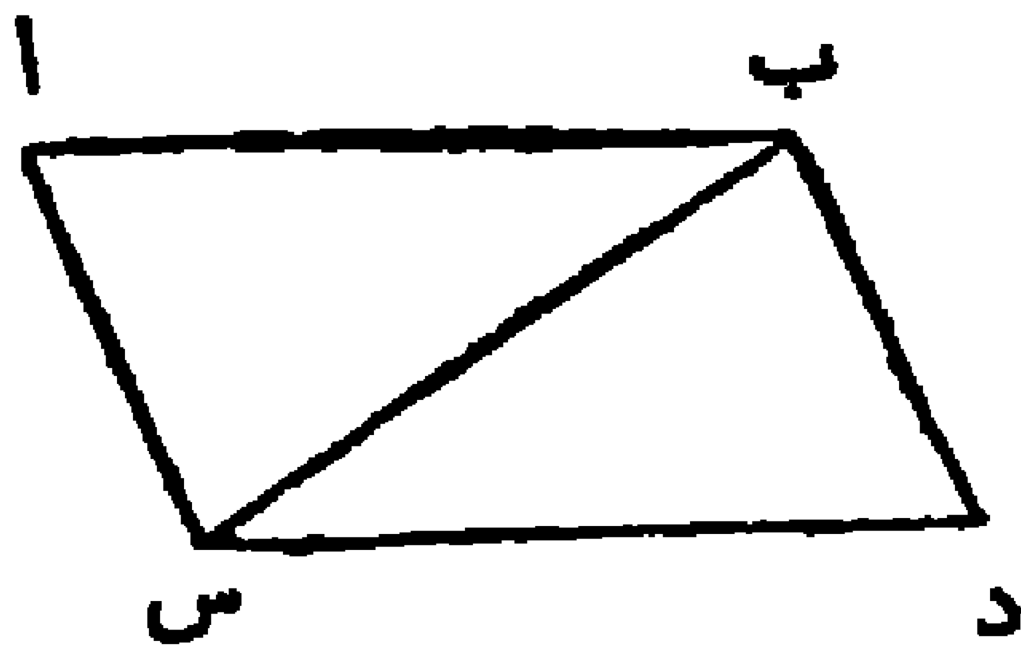
فرعٌ عاشر. مجموع زوايا ذي ستة اضلاع تعدل ٢ × (٦ – ٢) اي ثمان قائمات فاذا كانت زواياهُ متساوية تكون كل واحدة سدس ثمان قائمات اي ٨/٦ قائمة



تعليقة. متى استعمل الفرع الاول في اشكال كثيرة الاضلاع لها زوايا متداخلة مثل ا ب س فيجب ان تحسب كل متداخلة اكبر من قائمتين واذا رسم ب د ب ى ب ف ينقسم الشكل الى اربع مثلثات لها ثماني قائمات اي قائمتان في عدد الاضلاع الأ اثنين

القضية الثالثة والثلثون . ن

الخطان المستقيمان الموصلان بين اطراف خطّين مستقيمين متوازيين متساويين هما متوازيان ومتساويان



ليكن ا ب وس د خطّين مستقيمين متساويين متوازيين وليوصل بين اطرافهما بالخطين المستقيمين ا س ب د فهذان الخطان ايضًا متوازيان متساويان

ارسم ب س فمن حيث ان ب س يلاقي الخطّين المتوازيين ا ب س د فالزاويتان المتبادلتان ا ب س ب س د هما متساويتان (ق ٢٩ ك ١) ومن حيث ان ا ب يعدل س د والخط ب س مشترك بين المثلثين ا ب س ب س د فالضلعان ا ب ب س يعدلان الضلعين ب س س د والزاوية ا ب س تعدل ب س د فالقاعدة ا س تعدل القاعدة ب د (ق ٤ ك ١) وبقية الزوايا من الواحد تعدل بقية الزوايا من الاخر اي ا س ب تعدل س ب د. ومن حيث ان الخط ب س يلاقي الخطّين ا س ب د ويجعل الزاويتين المتبادلتين ا س ب س ب د متساويتين فالخطّان ا س ب د متوازيانِ (ق ٢٧ ك ١) وقد تبرهن انهما متساويان

فرعٌ اول. في كل شكل ذي اربعة اضلاع اذا كان ضلعان متقابلان متوازيين ومتساويين يكون الضلعان الاخران كذلك ويكون الشكل ذا اضلاع متوازية

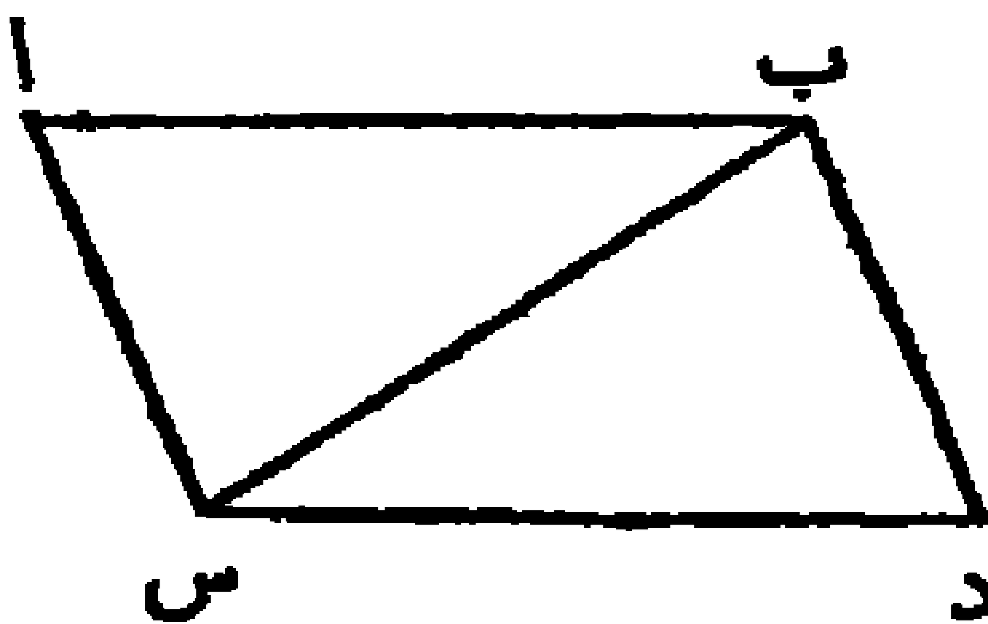
فرعٌ ثانٍ. كل ذي اربعة اضلاع ضلعاهُ المتقابلان متساويان هو ذو اضلاع متوازية

فرعٌ ثالث. في كل ذي اربعة اضلاع اذا كانت الزوايا المتقابلة متساوية تكون الاضلاع المتقابلة متساوية ومتوازية

القضية الرابعة والثلثون. ن

في شكلٍ ذي اضلاعٍ متوازيةٍ الاضلاعُ المتقابلة والزوايا المتقابلة هي متساوية. والقطر ينصفهُ اي يقسمهُ الى جزئين متساويين

ليكن ا ب د س متوازي الاضلاع وب س قطرهُ فالاضلاع المتقابلة والزوايا المتقابلة متساوية والقطر ب س ينصفهُ



فمن حيث ان الخط ب س يلاقي الخطين المتوازيين ا ب س د فالزاويتان المتبادلتان ا ب س ب س د متساويتان (ق ٢٩ ك ١) وايضًا لانّ ب س يلاقي المتوازيين ا س ب د فالمتبادلتان ا س ب س ب د متساويتان (ق ٢٩ ك ١) ففي المثلثين ا ب س ب س د زاويتان من الواحد تعدل زاويتين من الاخر والضلع ب س مشترك بين المثلثين فالضلعان الاخران من الواحد يعدلان الضلعين الاخرين من الآخر والزاوية الثالثة من الواحد تعدل الثالثة من الاخر (ق ٢٦ ك ١) اي ا ب يعدل س د وا س يعدل ب د والزاوية ب ا س تعدل س د ب ولان الزاوية ا ب س تعدل ب س د وا س ب تعدل س ب د فكل الزاوية ا ب د تعدل كل الزاوية ا س د وقد تبرهن ان ب ا س تعدل ب د س فالزوايا المتقابلة والاضلاع المتقابلة من ذي اضلاع متوازية هي متساوية وايضًا القطر ينصفهُ فلان ا ب يعدل س د وب س مشترك بين المثلثين والزاوية ا ب س تعدل ب س د فالمثلثان متساويان (ق ٤ ك ١) وقد انتصف الشكل بالقطر

فرعٌ اول. خطّان متوازيان بين خطّين متوازيين متساويان

فرعٌ ثانٍ. خطان متوازيان هما على بعد واحد بعضهما من بعض ابدًا

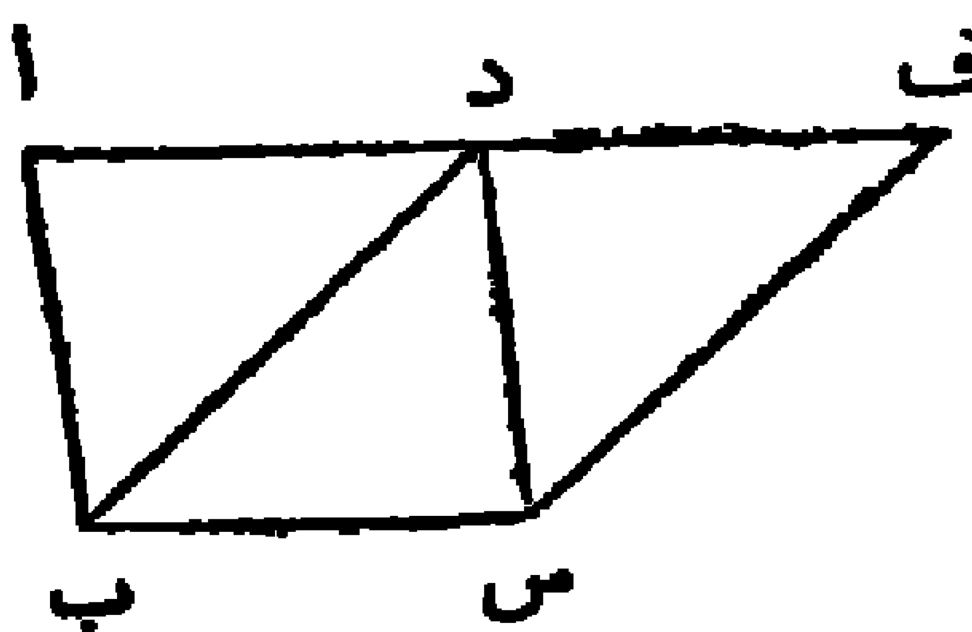
فرعٌ ثالث. مجتمع زاويتين متواليتين من ذي اضلاع متوازية يعدل قائمتين

القضية الخامسة والثلثون ٠ ن

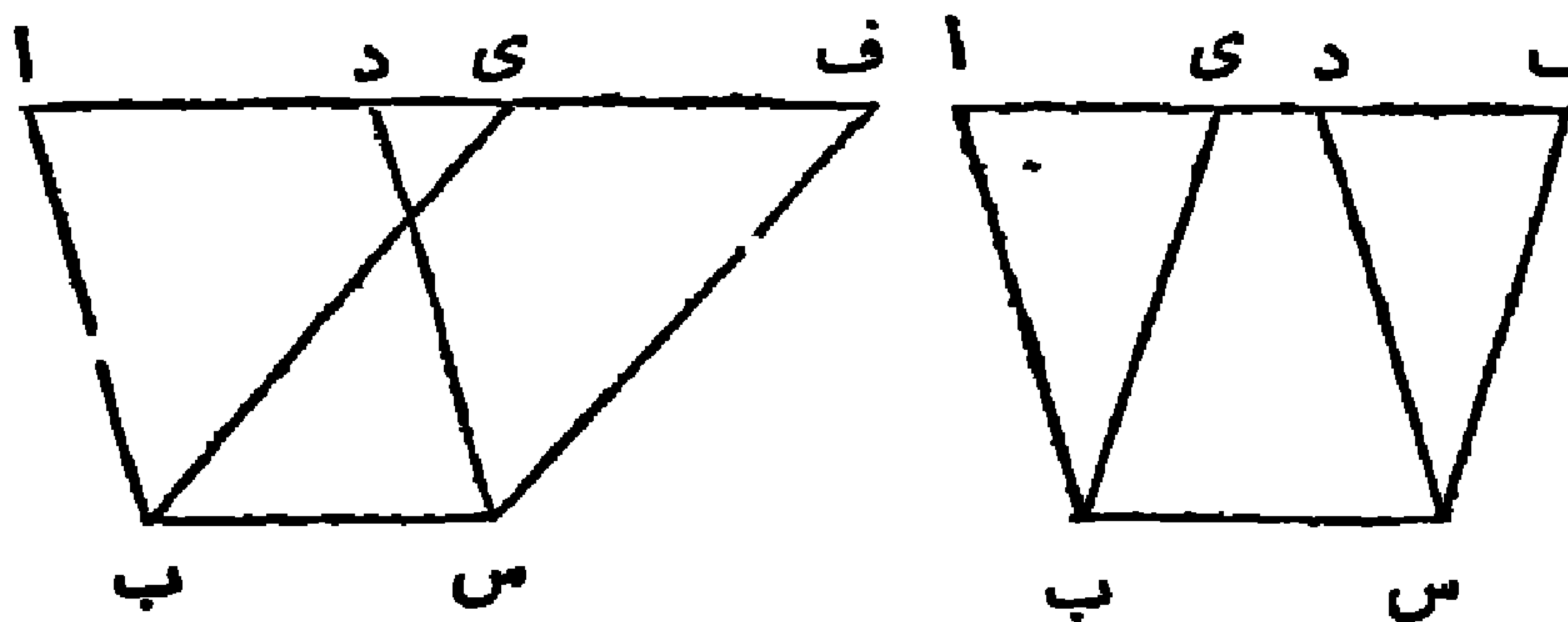
اشكال ذات اضلاع متوازية على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين هي متساوية

انظر الشكل الثاني والثالث

ليكن ا ب س د وى ب س ف شكلين متوازيي الاضلاع على قاعدة واحدة ب س وبين خطين متوازيين ا ف ب س فالشكل ا ب س د يعدل الشكل ى ب س ف. اذا انتهى الضلعان ا د د ف من الشكلين ا ب س د د ب س ف



المتقابلان للقاعدة ب س في نقطة واحدة د فالامر واضح ان كل واحد من الشكلين انما هو مضاعف المثلث ب د س (ق٣٤ ك١) واذ ذاك فهما متساويان ولئن لم ينتهِ في نقطة واحدة الضلعان ا د ى ف من الشكلين ا ب س د ى ب س ف المتقابلان للقاعدة ب س

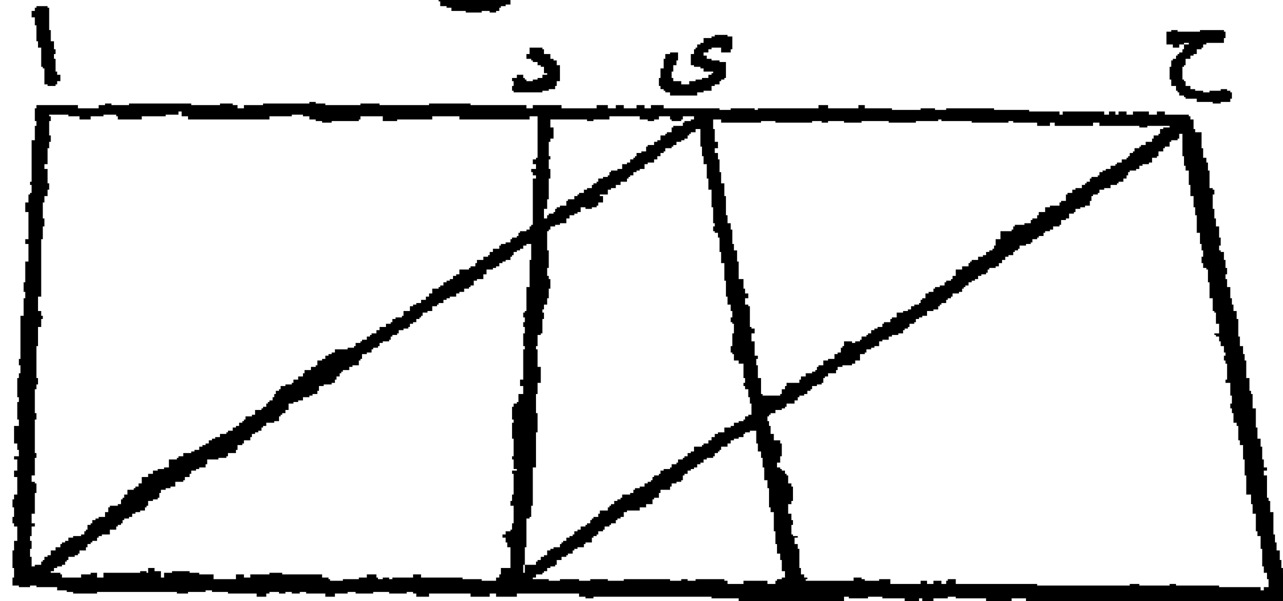


فثمَّ من حيث ان ا ب س د متوازي الاضلاع فالضلع ا د يعدل ب س (ق٣٤ ك١) ولهذا السبب ايضاً ى ف يعدل ب س ولذلك ا د يعدل ى ف (اولية اولى) ود ى مشترك فالكل او البقية ا ى يعدل الكل او البقية د ف (اولية ثانية وثالثة) وا ب يعدل د س فالضلعان ى ا ا ب يعدلان الضلعين ف د د س كل واحد يعدل نظيرهُ والزاوية الخارجة ف د س تعدل الداخلة المتقابلة ى ا ب (ق٢٩ ك١) فالقاعدة ى ب تعدل القاعدة ف س والمثلث ى ا ب يعدل المثلث ف د س (ق٤ ك١) اطرح المثلث ف د س من الشكل ا ب س ف واطرح منهُ ايضاً ى ا ب فتكون البقايا متساوية (اولية٣) اي الشكل ا ب س د يعدل الشكل ى ب س ف

القضية السادسة والثلثون . ن

اشكالٌ ذات اضلاع متوازية على قواعد متساوية وبين خطَّين متوازيين هي متساوية

ليكن ا ب س د وى ف غ ح شكلين متوازيي الاضلاع على قاعدتين متساويتين ب س وف غ وبين خطَّين متوازيين ا ح وب غ فهما متساويان

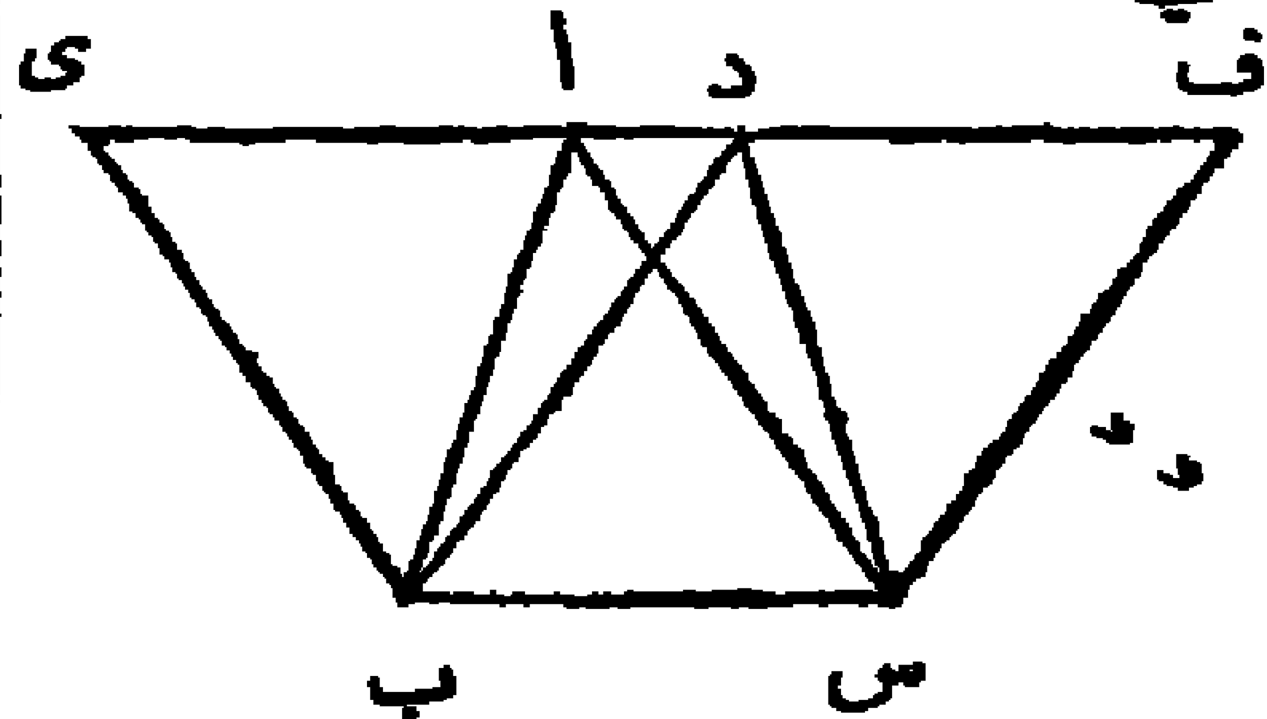


ارسم ب ى وس ح فمن حيث ان ب س يعدل ف غ وف غ يعدل ى ح (ق٣٤ ك١) فلذلك ى ح يعدل ب س ايضًا وهما متوازيان وقد أُوصل بينهما الى جهة واحدة بالخطين ب ى س ح والخطوط الموصلة بين خطين متوازيين متساويين الى جهة واحدة هي متوازية ومتساوية (ق٣٣ ك١) فالخطان ب ى س ح متساويان متوازيان والشكل ى ب س ح متوازي الاضلاع وهو يعدل الشكل ا ب س د (ق٣٥ ك١) لانهما على قاعدة واحدة ب س وبين خطين متوازيين ب س ا ح ولهذا السبب ايضًا الشكل ى ف غ ح يعدل ى ب س ح فالشكلان ا ب س د ى ف غ ح متساويان

القضية السابعة والثلثون . ن

مثلثات على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين هي متساوية

ليكن ا ب س د ب س مثلثين على قاعدة واحدة ب س وبين خطَّين متوازيين ا د وب س فهما متساويان



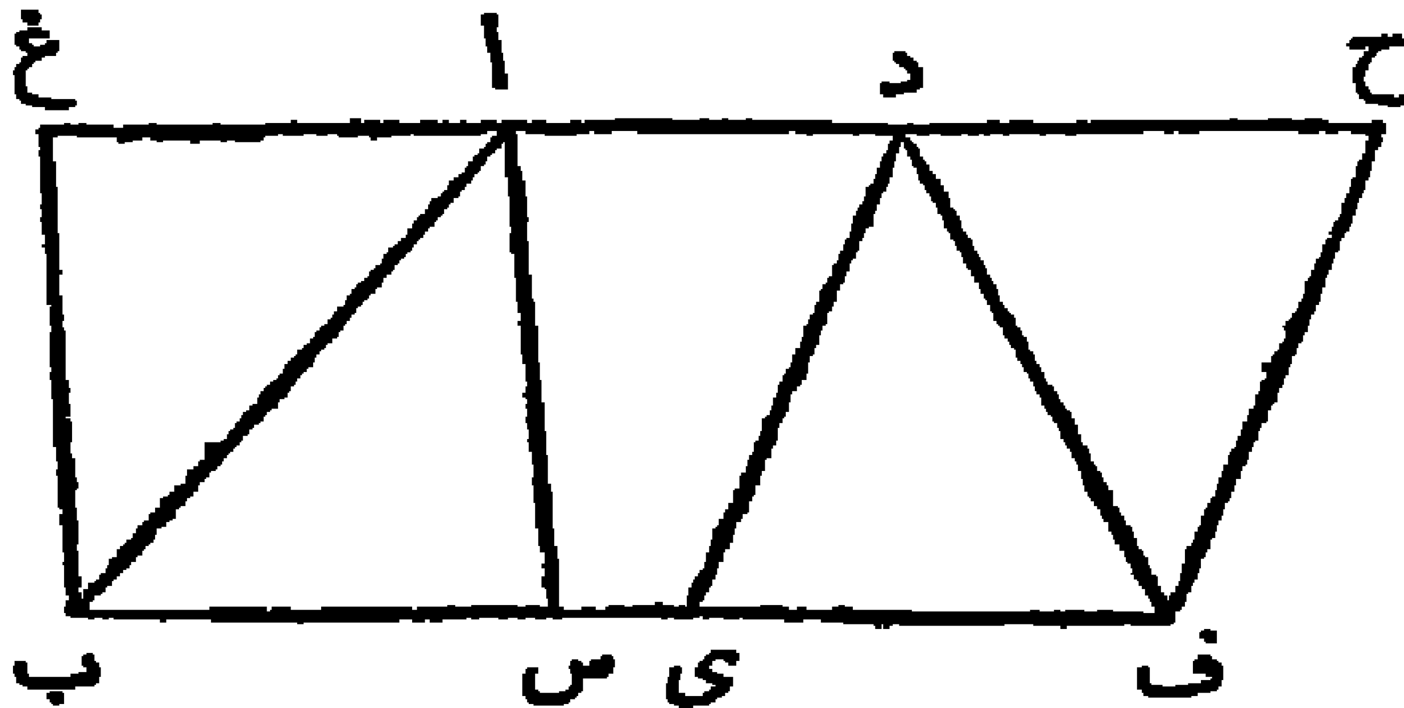
اخرج ا د الى الجهتين الى ف وى ومن ب ارسم ب ى حتى يوازي ا س (ق٣١ ك١) ومن س ارسم س ف حتى يوازي ب د فكل واحد من الشكلين ا ى ب س د ب س ف متوازي الاضلاع وهما متساويان (ق٣٥ ك١) لانهما على قاعدة واحدة ب س وبين خطين

متوازيين ى ف وب س والمثلث ا ب س هو نصف الشكل ا ى ب س لان القطر ا ب ينصفهُ (ق ٣٤ ك ١) والمثلث د ب س هو نصف الشكل د ب س ف لان القطر د س ينصفهُ وانصاف اشياء متساوية هي متساوية بعضها لبعض (اولية ٧) فالمثلث ا ب س يعدل المثلث د ب س



القضية الثامنة والثلثون . ن

مثلثات على قواعد متساوية وبين خطّين متساويين هي متساوية



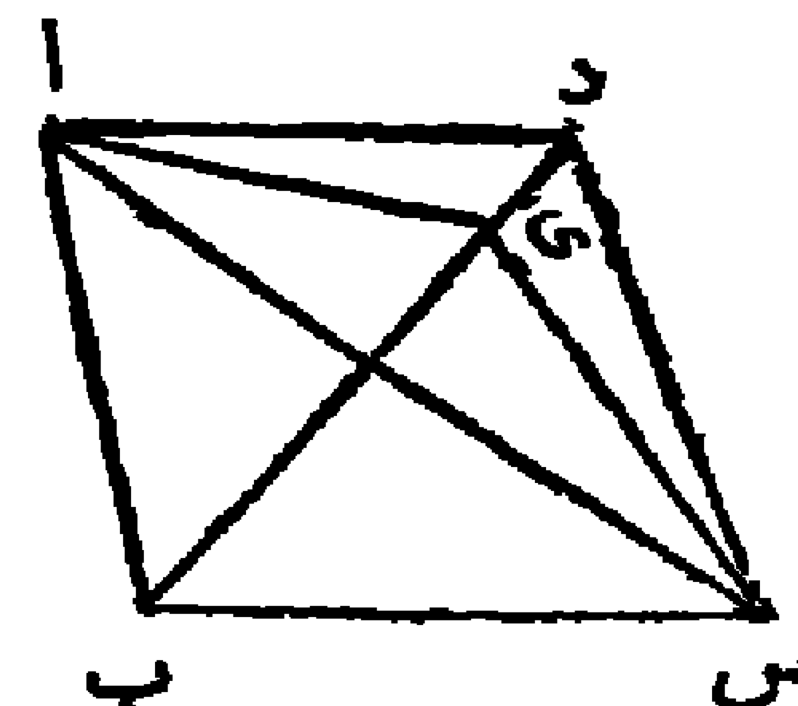
ليكن ا ب س ود ى ف مثلثين على قاعدتين متساويتين ب س ى ف وبين خطين متوازيين ا د وب ف فهما متساويان

اخرج ا د الى الجهتين الى ح وغ وارسم ب غ حتى يوازي ا س (ق ٣١ ك ١) ومن ف ارسم ف ح حتى يوازي د ى فكل واحد من الشكلين ا غ ب س د ى ف ح متوازي الاضلاع وهما متساويان (ق ٣٦ ك ١) لانهما على قاعدتين متساويتين ب س ى ف وبين خطين متوازيين غ ح ب ف والمثلث ا ب س هو نصف الشكل ا غ ب س (ق ٣٤ ك ١) لان القطر ا ب ينصفه ود ى ف هو نصف الشكل د ى ف ح (ق ٣٤ ك ١) لان القطر د ف ينصفه وانصاف اشياء متساوية هي متساوية (اولية ٧) فالمثلث ا ب س يعدل المثلث د ى ف



القضية التاسعة والثلثون . ن

مثلثات متساوية على قاعدة واحدة وعلى جانب واحد منها هي بين خطين متوازيين



ليكن ا ب س ود ب س مثلثين متساويين على قاعدة واحدة ب س وعلى جانب واحد منها فهما بين خطين متوازيين

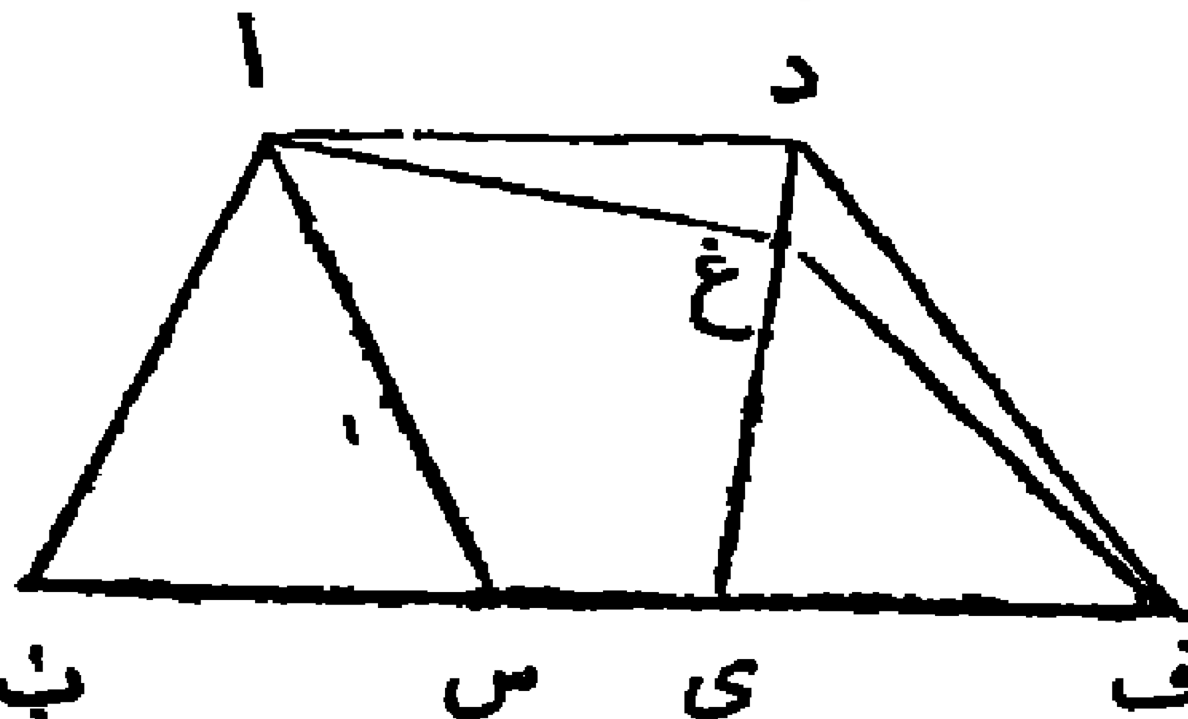
ارسم ا د فالخط ا د يوازي ب س والا فمن

النقطة ا ارسم ا ى حتى يوازي ب س (ق ٣١ ك ١) وارسم ى س فالمثلث ا ب س يعدل المثلث ى ب س (ق ٣٧ ك ١) لانهما على قاعدة واحدة ب س وبين خطين متوازيين ب س ا ى والمثلث ا ب س يعدل د ب س فالمثلث ى ب س يعدل د ب س اي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فلا يمكن ان يكون ب س وا ى متوازيين وهكذا يبرهن في كل خط الاَّ الخط ا د فهو يوازي ب س

القضية الاربعون . ن

مثلثات متساوية على قواعد متساوية وعلى جانب واحد منها هي بين خطَّين متوازيين اذا كانت القواعد على استقامة واحدة

ليكن ا ب س د ى ف مثلثين متساويين على قاعدتين متساويتين وعلى استقامة واحدة ب س ى ف وعلى جانب واحد منها فهما بين خطَّين متوازيين

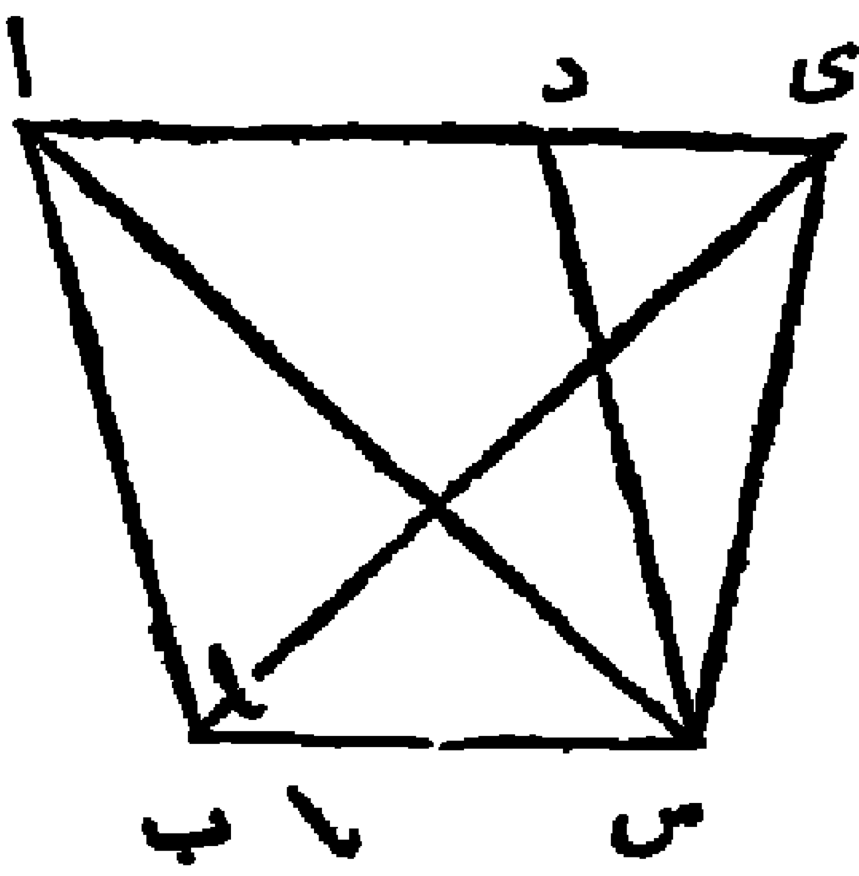


ارسم ا د فهو يوازي ب ف والاَّ فارسم ا غ حتى يوازي ب ف (ق ٣١ ك ١) وارسم غ ف فالمثلث ا ب س يعدل المثلث غ ى ف (ق ٣٨ ك ١) لانهما على قاعدتين متساويتين ب س ى ف وبين خطَّين متوازيين ب ف ا غ ولكن المثلث ا ب س يعدل المثلث د ى ف فلذلك المثلث د ى ف يعدل المثلث غ ى ف اي الاكبر يعدل الاصغر وذاك محال فالخط ا غ لا يوازي ب ف وهكذا يبرهن في كل خط ما عدا ا د فهو يوازي ب ف

القضية الحادية والاربعون . ن

اذا كان شكلٌ ذو اضلاع متوازيةٍ ومثلثٌ على قاعدة واحدة وبين خطَّين متوازيين فالشكل مضاعف المثلث

ليكن الشكل ذو الاضلاع المتوازية ا ب س د والمثلث ى ب س على قاعدة

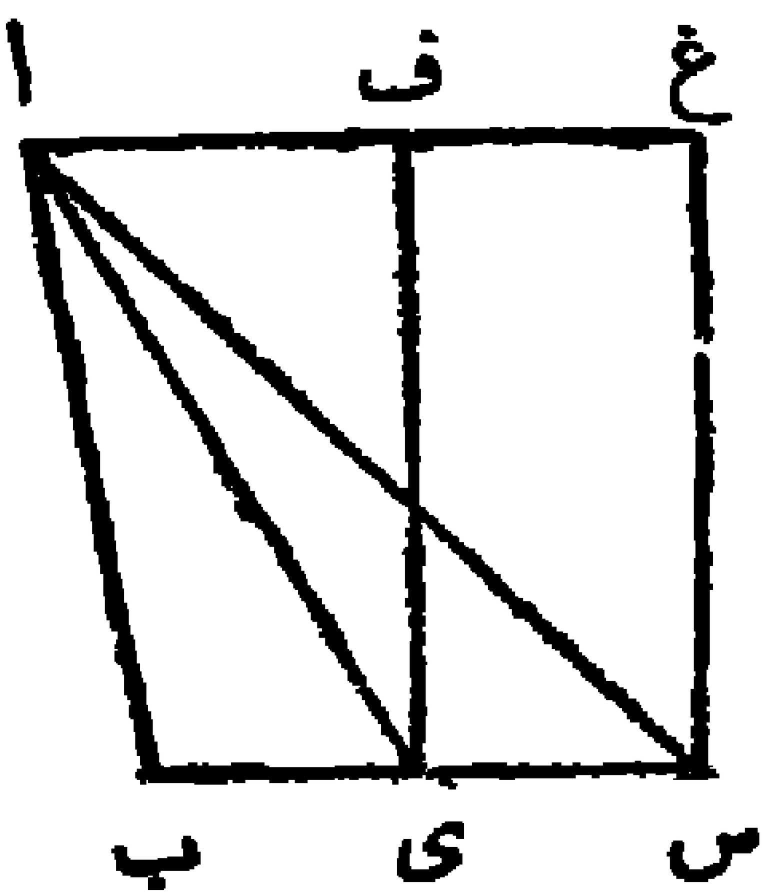


واحدة ب س وبين خطّين متوازيين ا ى ب س فالشكل ا ب س د مضاعف المثلث ى ب س ارسم ا س فالمثلث ا ب س يعدل المثلث ى ب س (ق٣٧ ك١) لانهما على قاعدة واحدة ب س وبين خطّين متوازيين ا ى بْ س ولكن الشكل ا ب س د هو مضاعف المثلث ا ب س (ق٣٤ ك١) لان القطر ا س ينصفهُ فالشكل ا ب س د هو مضاعف المثلث ى ب س ايضاً

القضية الثانية والاربعون.ع

علينا ان نرسم شكلاً ذا اضلاع متوازية حتى يعدل مثلثاً مفروضاً وزاوية من زواياه تعدل زاوية مستقيمة بسيطة مفروضة

ليكن ا ب س المثلث المفروض ود الزاوية البسيطة المفروضة علينا ان نرسم شكلاً ذا اضلاع متوازية حتى يعدل المثلث ا ب س وزاوية من زواياهُ تعدل د



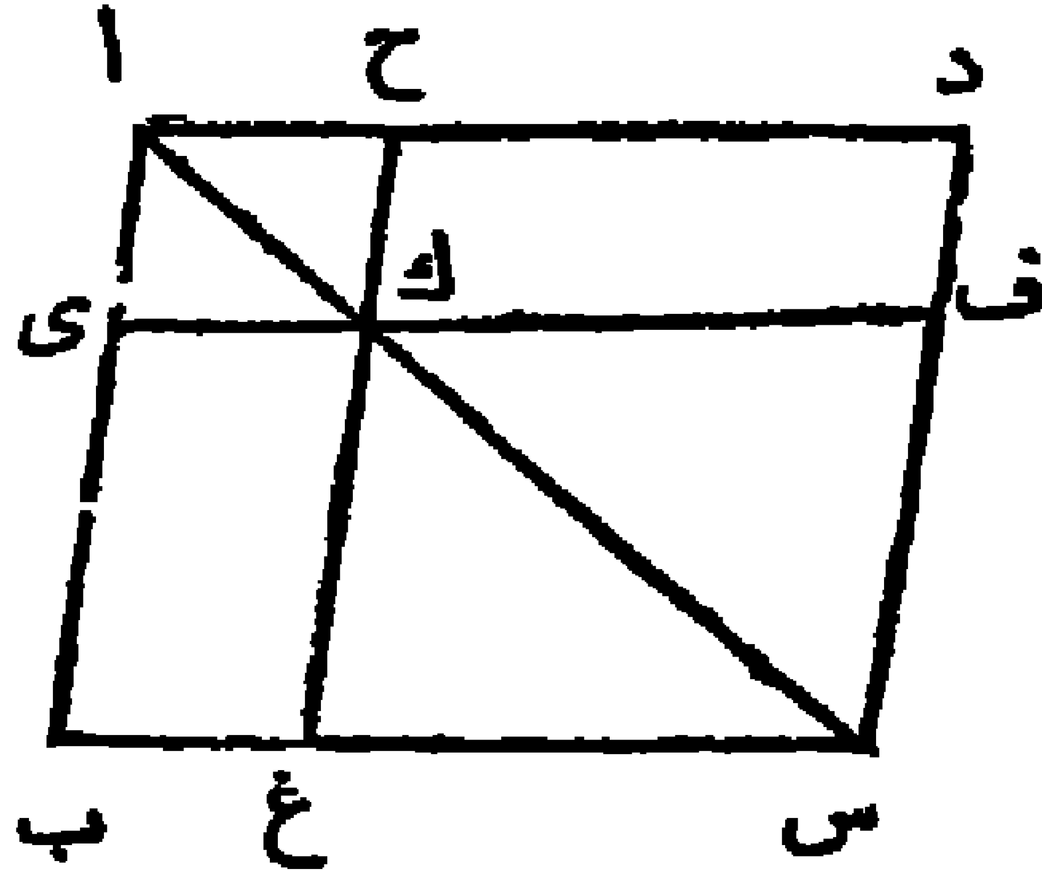
نَصِّفْ ب س في ى (ق١٠ ك١) ارسم ا ى ومن النقطة ى في الخط المستقيم ى س اجعل الزاوية س ى ف حتى تعدل د (ق٢٣ ك١) ومن ا ارسم ا غ حتى يوازي ب س (ق٣١ ك١) ومن س ارسم س غ حتى يوازي ى ف فالشكل س ى ف غ متوازي الاضلاع فمن حيث ان ب ى يعدل ى س فالمثلث ا ب ى يعدل المثلث ا ى س (ق ٣٨ ك١) لانهما على قاعدتين متساويتين ب ى ى س وبين خطين متوازيين ا غ ب س ولذلك المثلث ا ب س هو مضاعف المثلث ا ى س والشكل ف ى س غ ايضاً مضاعف المثلث ا ى س (ق ٤١ ك١) لانهما على قاعدة واحدة وبين خطّين متوازيين فالشكل ف ى س غ يعدل المثلث ا ب س ولهُ الزاوية س ى ف التي تعدل الزاوية المفروضة د

فرعٌ. اذا كانت الزاوية د قائمة يكون الشكل ف ى س غ قائم الزوايا ويعدل المثلث ا ب س فبذات هذا العمل يصنع مثلث حتى يعدل شكلاً مفروضاً زواياهُ قائمة

القضية الثالثة والاربعون . ن

الاجزآء المتمّة لاشكالٍ متوازية الاضلاع واقعةٍ على جانبَي قطر شكلٍ متوازي الاضلاع هي متساوية

ليكنْ ا ب س د شكلاً متوازي الاضلاع وا س قطرهُ وى ح وغ ف شكلين متوازيي الاضلاع على جانبي القطر ا س وليكن ب ك وك د الشكلين الاخرين المتمّين لكل الشكل ا ب س د فالمتمّ ب ك يعدل المتمّ ك د

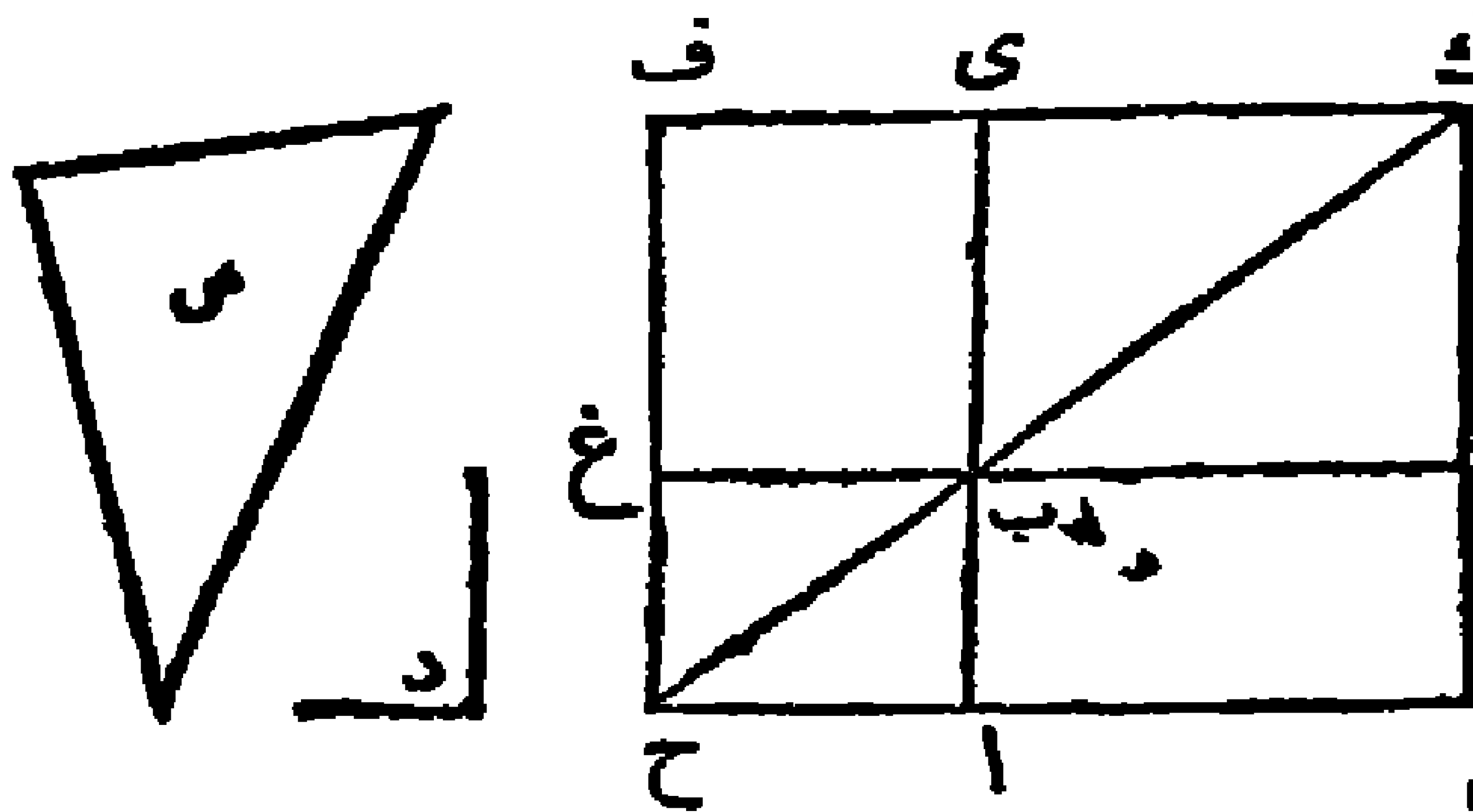


فمن حيث ان ا ب س د متوازي الاضلاع وا س قطرهُ فالمثلث ا ب س يعدل المثلث ا د س (ق ٣٤ ك ١) ومن حيث ان ا ى ك ح متوازي الاضلاع فالمثلث ا ى ك يعدل المثلث ا ح ك ولهذا السبب ايضاً المثلث ك غ س يعدل المثلث ك ف س فالمثلث ا ى ك مع ك غ س يعدل المثلث ا ح ك مع ك ف س والكل ا ب س يعدل الكل ا د س فالبقية ب ك تعدل البقية ك د (اولية ٣)

القضية الرابعة والاربعون . ع

علينا ان نرسم على خط مستقيم مفروض شكلاً متوازي الاضلاع حتى يعدل مثلثاً مفروضاً وزاوية من زواياهُ تعدل زاوية بسيطة مفروضة

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض وس المثلث المفروض ود الزاوية المفروضة . علينا ان نرسم على الخط ا ب شكلاً متوازي الاضلاع حتى يعدل س وزاوية من زواياهُ تعدل د



ارسم الشكل المتوازي الاضلاع ب ى ف غ حتى يعدل المثلث س (ق ٤٢ ك ١) واجعل الزاوية ى ب غ منهُ تعدل الزاوية د واجعل ضلعهُ ى ب والخط ا ب على استقامة

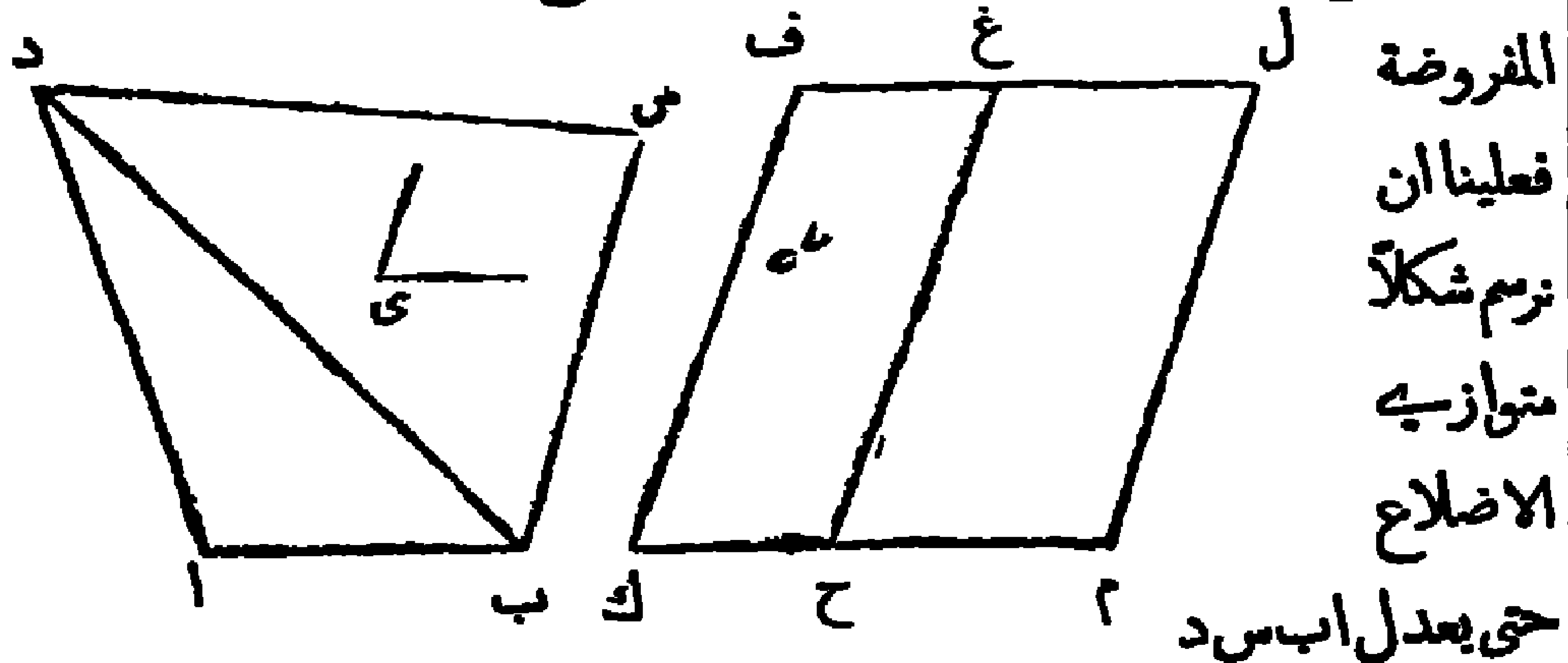
واحدة واخرج ف غ الى ح ومن ا ارسم ا ح حتى يوازي ب غ او ى ف (ق ٣١ ك ١) وارسم ح ب. فمن حيث ان الخط المستقيم ح ف يلاقي المتوازيين ح ا ف ى فالزاويتان ا ح ف ح ف ى معًا تعدلان قائمتين (ق ٢٩ ك ١) فالزاويتان ب ح ف ح ف ى معًا هما اقل من قائمتين ولا بد من التقاء ح ب وف ى اذا أُخرجا (ق ٢٩ ك ١ فرع ١) اخرجهما حتى يلتقيا في ك ومن ك ارسم ك ل حتى يوازي ى ا او ف ح واخرج ح ا الى ل واخرج غ ب الى م فالشكل ح ل ك ف متوازي الاضلاع وقطرهُ ح ك والشكلان ا غ وم ى هما متوازيا الاضلاع على جانبي القطر ح ك. ول ب وب ف هما المتمَّان فالمتم ل ب يعدل المتم ب ف (ق ٤٣ ك ١) ولكن ب ف يعدل المثلث س فالشكل ل ب يعدل المثلث س ايضًا والزاوية غ ب ى تعدل الزاوية ا ب م (ق ١٥ ك ١) ولكن ى ب غ تعدل الزاوية د فالزاوية ا ب م تعدل د ايضًا فالشكل ل ب قد رُسم على الخط المفروض ا ب حتى يعدل المثلث المفروض س والزاوية ا ب م منهُ تعدل الزاوية المفروضة د

فرعٌ. على هذا الاسلوب يحوَّل مثلث الى شكلٍ ذي زوايا قائمة مفروض طول ضلع من اضلاعه. لانه اذا كانت د قائمة وا ب الضلع المفروض فالشكل ا ب م ل يكون ذا زوايا قائمة ويعدل المثلث المفروض س

القضية الخامسة والاربعون. ع

علينا ان نرسم شكلًا متوازي الاضلاع حتى يعدل شكلًا مفروضًا ذا اضلاع مستقيمة وزاوية من زواياه تعدل زاوية بسيطة مفروضة

ليكن ا ب س د الشكل المفروض ذا اضلاع مستقيمة وى الزاوية البسيطة المفروضة فعلينا ان نرسم شكلًا متوازي الاضلاع حتى يعدل ا ب س د



وزاوية من زواياه تعدل الزاوية ى

ارسم د ب ثم ارسم الشكل المتوازي الاضلاع ف ح (ق ٤٢ ك ١) حتى يعدل المثلث ا د ب واجعل الزاوية ح ك ف منهُ تعدل الزاوية ى وعلى الخط المستقيم غ ح ارسم الشكل المتوازي الاضلاع غ م (ق ٤٤ ك ١) واجعلهُ يعدل المثلث د ب س والزاوية غ ح م تعدل الزاوية ى

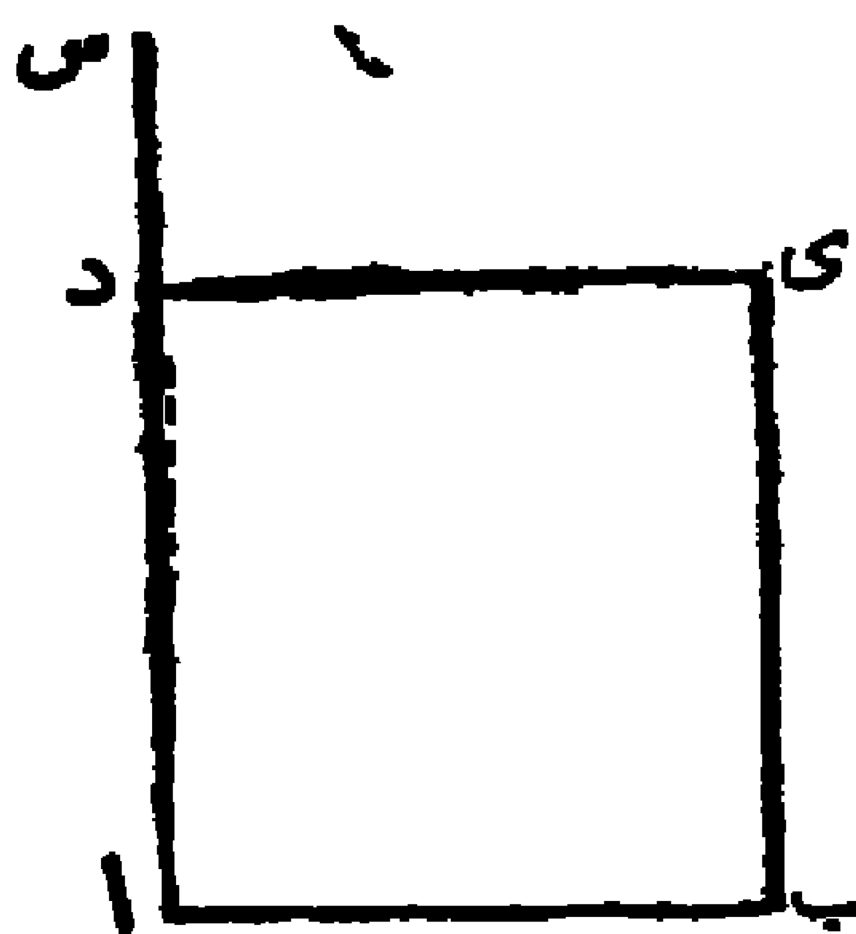
فمن حيث ان الزاوية ى تعدل الزاويتين ف ك ح غ ح م فالزاوية ف ك ح تعدل غ ح م. اضف الى كل واحدة منها الزاوية غ ح ك فالزاويتان غ ح م غ ح ك تعدلان الزاويتين ف ك ح غ ح ك ولكن ف ك ح ك ح غ معًا تعدلان قائمتين (ق ٢٩ ك ١) فلذلك ك ح غ غ ح م تعدلان قائمتين فمن حيث ان الخط غ ح يجعل مع ك ح ح م الزاويتين المتواليتين تعدلان قائمتين فالخطان ك ح ح م هما على استقامة واحدة (ق ١٤ ك ١) ومن حيث ان الخط المستقيم غ ح يلاقي المتوازيين ك م ف غ فالزاويتان المتبادلتان م ح غ ح غ ف متساويتان (ق ٢٩ ك ١) اضف الى كل واحدة منها الزاوية ح غ ل فالزاويتان م ح غ ح غ ل تعدلان الزاويتين ح غ ف ح غ ل ولكن م ح غ ح غ ل تعدلان قائمتين (ق ٢٩ ك ١) ولذلك ح غ ف ح غ ل تعدلان قائمتين. فالخطان ف غ غ ل هما على استقامة واحدة. ومن حيث ان ك ف يوازي ح غ وح غ يوازي ل م فالخط ك ف يوازي الخط ل م (ق ٣٠ ك ١) والخط ك م يوازي ف ل فالشكل ك م ل ف متوازي الاضلاع. والمثلث ا ب د يعدل الشكل ح ف والمثلث د ب س يعدل الشكل غ م فالكل ا ب س د يعدل الكل ك ف ل م. فقد رُسم شكلٌ متوازي الاضلاع ك م ل ف حتى يعدل الشكل المفروض ا ب س د والزاوية ف ك م منهُ تعدل الزاوية المفروضة ى

فرعٌ. على هذا الاسلوب يبنى على خط مستقيم مفروض شكلٌ متوازي الاضلاع لهُ زاوية تعدل زاوية مفروضة وهو يعدل شكلاً مفروضًا ذا اضلاع مستقيمة اي يبني اولاً على الخط المفروض شكلاً متوازي الاضلاع يعدل المثلث الاول ا ب د (ق ٤٤ ك ١) وزاوية من زواياهُ تعدل الزاوية المفروضة

القضية السادسة والاربعون ٠ع

علينا ان نرسم مربعاً على خط مستقيم مفروض

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض. علينا ان نرسم عليهِ مربعاً



من النقطة ا ارسم الخط ا س عموداً على ا ب (ق ١١ ك ١) واقطع ا د حتى يعدل ا ب (ق ٣ ك ١) ومن د ارسم د ى حتى يوازي ا ب (ق ٣١ ك ١) ومن ب ارسم ب ى حتى يوازي ا د. فالشكل ا د ى ب متوازي الاضلاع والخط ا ب يعدل د ى والخط ا د يعدل ى ب (ق ٣٤ ك ١) ولكن ا ب يعدل ا د فالخطوط الاربعة ا ب ا د د ى ب ى هي متساوية والشكل المتوازي الاضلاع ا ب ى د هو متساوي الاضلاع ايضاً وزواياهُ قائمة لان ا د الذي يلاقي المتوازيين د ى ا ب يجعل الزاويتين ب ا د ا د ى تعدلان قائمتين (ق ٢٩ ك ١) وقد جُعِلت ب ا د قائمة فتكون ا د ى ايضاً قائمة وفي كل شكل ذي اضلاع متوازية تكون الزوايا المتقابلة متساوية (ق ٣٤ ك ١) فالزاويتان ا ب ى ب ى د هما ايضاً قائمتان فالشكل ذو زوايا قائمة وقد تبرهنت مساواة الاضلاع وقد رُسم على الخط المفروض ا ب

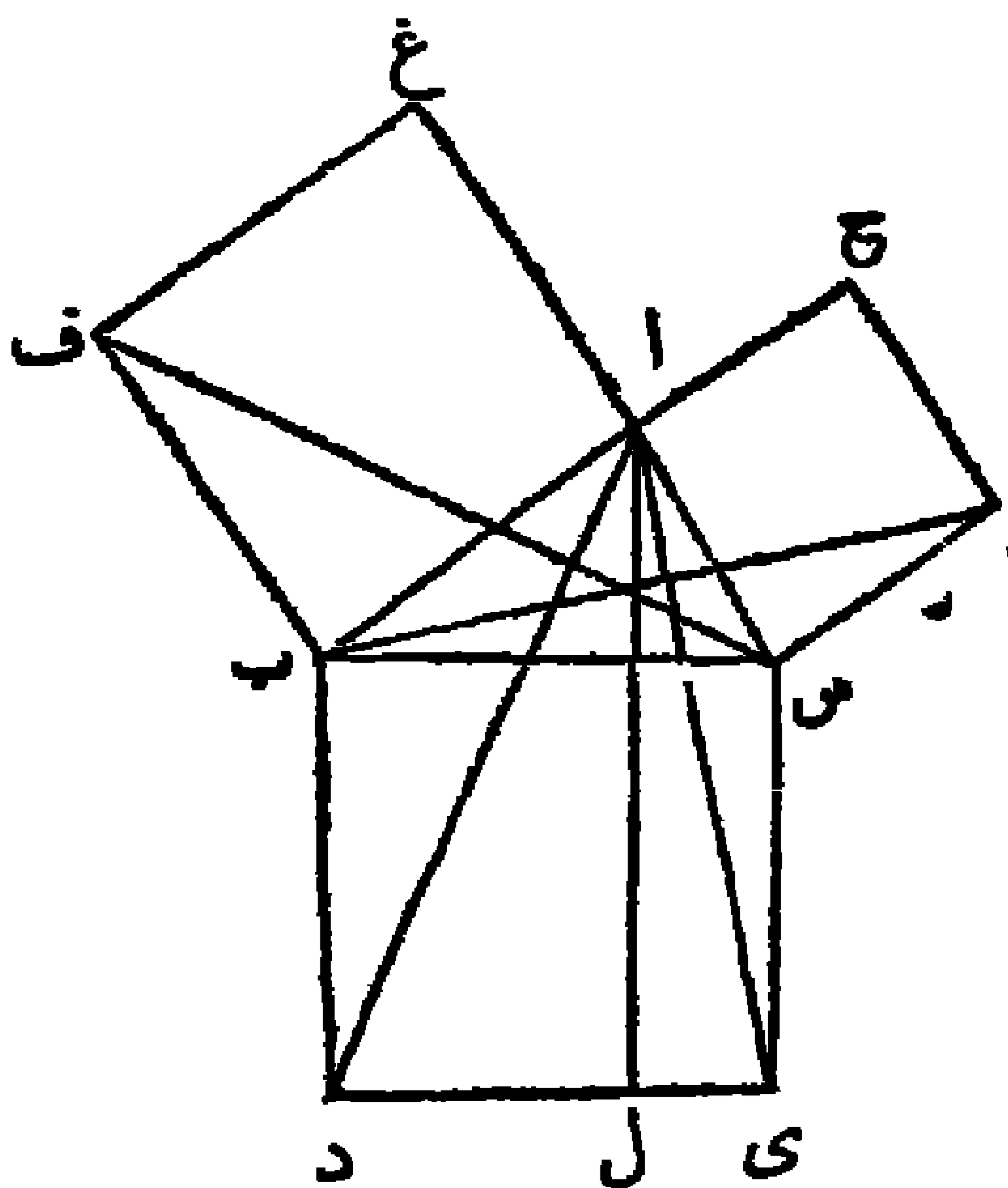
فرع. كل ذي متوازي الاضلاع لهُ قائمة واحدة تكون جميع زواياهُ قائمات

القضية السابعة والاربعون ٠ن

في كل مثلثٍ ذي قائمة مربعُ الوتر يعدل مربعَي الساقين

ليكن ا ب س مثلثاً ذا قائمة ب ا س فمربعُ الوتر ب س يعدل مربع ا ب مع مربع ا س

ارسم على ب س المربع ب د ى س (ق ٤٦ ك ١) وعلى ب ا المربع ب غ وعلى ا س المربع س ح ومن ا ارسم ا ل حتى يوازي ب د او س ى (ق ٣١ ك ١) ارسم ا د وف س. الزاوية ب ا س قائمة وب ا غ كذلك (حدّ ٢٥) فالخط المستقيم ب ا



يجعل مع الخطين المستقيمين ا س ا غ الزاويتين المتواليتين ب ا س ب ا غ تعدلان قايمتين فالخطان على استقامة واحدة (ق ١٤ ك ١) ولهذا السبب الخطان ب ا ا ح ايضاً على استقامة واحدة. والزاوية د ب س تعدل الزاوية ف ب ا لانهما قايمتان. اضف الى كل واحدة ا ب س فكل الزاوية د ب ا تعدل الكل ف ب س (اولية ٢) والضلعان ا ب ب د يعدلان الضلعين ف ب ب س كل واحد يعدل نظيره. والزاوية ا ب د تعدل الزاوية ف ب س فالقاعدة ا د تعدل القاعدة ف س (ق ٤ ك ١) والمثلث ا ب د يعدل المثلث ف ب س. والشكل المتوازي الاضلاع ب ل هو مضاعف المثلث ا ب د (ق ٤١ ك ١) لانهما على قاعدة واحدة ب د وبين خطين متوازيين ب د ا ل. والمربع ب غ هو مضاعف المثلث ف ب س لانهما على قاعدة واحدة ب ف وبين خطين متوازيين ب ف غ س والاشياء المضاعفة اشياء متساوية هي متساوية (اولية ٦) فالشكل ب ل يعدل المربع ب غ. وهكذا اذا رُسم ب ك واى يبرهن ان الشكل س ل يعدل المربع ح س فكل المربع ب د ى س يعدل المربعين ب غ وح س

فرعٌ اول. مربعُ ساق مثلثٍ ذي قائمة يعدل مربع الوتر الا مربع الساق الاخر اي ا ب^{٢} = ب س^{٢} − ا س^{٢}

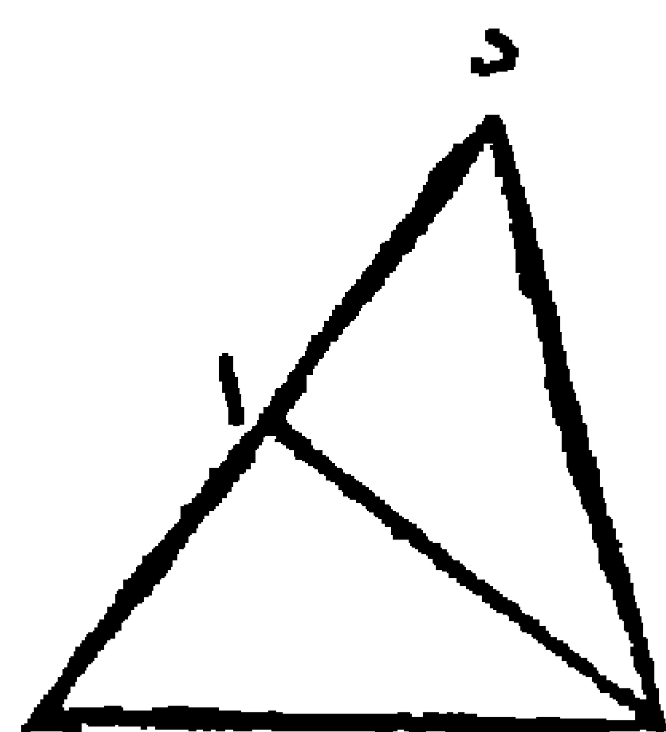
فرعٌ ثانٍ. اذا فرض ا ب = ا س اي اذا كان ا ب س متساوي الساقين فلنا ب س^{٢} = ٢ ا ب^{٢} = ٢ ا س^{٢} وب س = ا ب ٢√

فرع ثالث. في مثلثين قائمي الزاويتين اذا عدل ضلعان من الواحد ضلعين من الاخر فالضلع الثالث من الواحد يعدل الثالث من الاخر

القضية الثامنة والاربعون . ن

اذا عدل مربعُ ضلع مثلثٍ مربَّعي الضلعين الآخرين فالمثلث قائم الزاوية

ليكن ا ب س مثلثًا ولنفرض انْ مربّع ب س يعدل مربَّعَي ب ا، ا س فتكون ب ا س قائمة



من ا ارسم ا د عمودًا على ا س (ق ١١ ك ١)

واجعل ا د يعدل ا ب وارسم د س

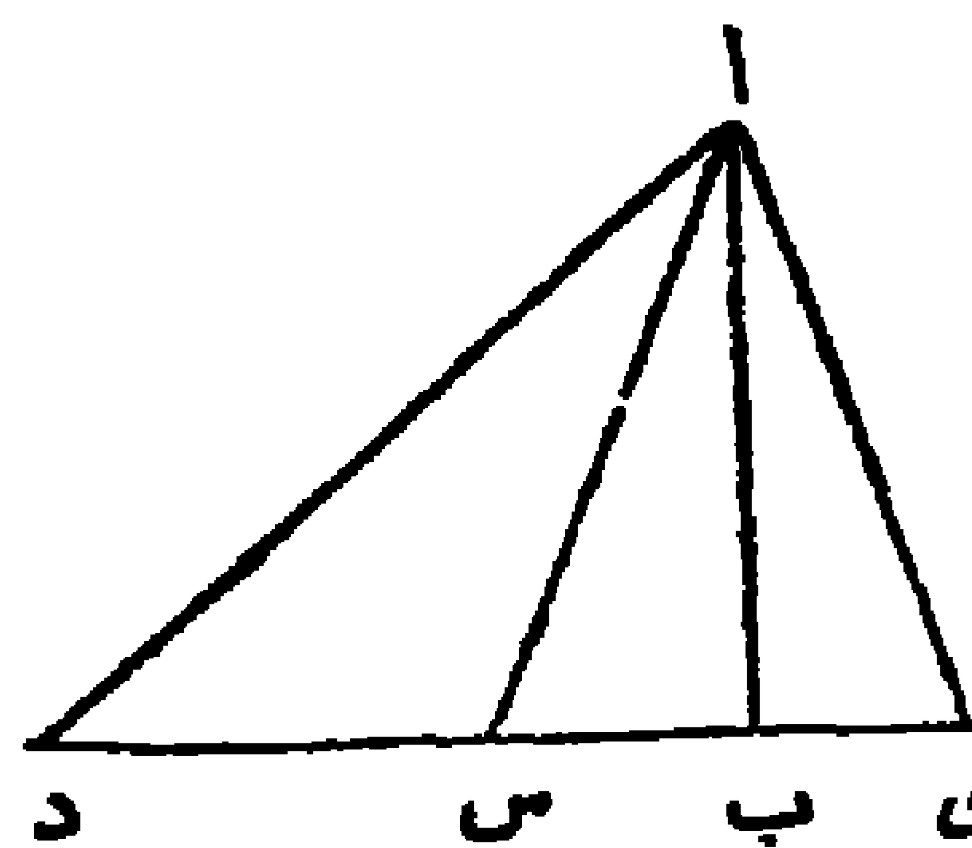
فمن حيث ان د ا يعدل ا ب فمربع د ا يعدل مربع ا ب اضف الى كل واحد منهما مربع ا س فمربع د ا مع مربع ا س يعدل مربع ب ا مع مربع ا س ولكن مربع د س يعدل مربع د ا مع مربع ا س (ق ٤٧ ك ١) لان د ا س قائمة وحسب المفروض مربع ب س يعدل مربع ب ا مع مربع ا س . فمربع د س يعدل مربع ب س والضلع د س يعدل الضلع ب س ولان د ا يعدل ا ب وا س مشترك بين المثلثين د ا س ب ا س والقاعدة ب س تعدل القاعدة د س فالزاوية د ا س تعدل الزاوية ب ا س (ق ٨ ك ١) ود ا س قائمة فتكون ب ا س قائمة ايضًا

مضافات الى الكتاب الاول

قضية ١ . ن

الخط العمودي هو اقصر الخطوط التي يمكن رسمها من نقطة خارجة عن خط مفروض الى ذلك الخط وكل خطّين مائلين واقعَين على جانبي العمود خارجين من نقطةٍ واحدة وفاصلين جزءين متساويين من الخط الذي يقعان عليهِ هما متساويان ومن كل خطين اخرين مائلين فاصلين جزءين غير متساويين فابعدهما عن العمود اطولهما

ليكن ا ب ا س ا د الى اخرهِ الخطوط المرسومة من النقطة المفروضة ا الى الخط المستقيم الغير المحدود د ى وليكن ا ب عموداً فهو اقصر من ا س وا س اقصر من ا د وهلم جرًّا لانَّ الزاوية ا ب س قائمة فالزاوية ا س ب حادَّة (ق١٧ ك١) واصغر من ا ب س والزاوية الصغرى من كل مثلث



تقابلها الضلع الاقصر (ق١٩ ك١) فالضلع ا ب اقصر من الضلع ا س. ثم اذا كان ب س وب ى متساويين يكون الخطان المائلان ا س ا ى متساويين ايضاً. لانَّ الزاوية ا ب س = ا ب ى والضلع ا ب مشترك بين المثلثين ا ب س ا ب ى فالمثلثان متساويان (ق٤ ك١) والضلع ا س = ا ى. ولانَّ الزاوية ا س ب حادَّة فالزاوية ا س د منفرجة لانهما معًا تعدلان قائمتين (ق١٣ ك١) والزاوية ا د س حادَّة لان ا ب د قائمة فالزاوية ا س د هي اكبر من ا د س فالضلع ا د اطول من الضلع ا س (ق١٩ ك١)

فرعٌ اول. العمود هو قياسٌ حقيقيٌّ للبعد بين نقطةٍ وخطٍ لانهُ البعد الاقرب بينهما

فرعٌ ثانٍ. كل نقطة في عمود على نقطة انتصاف خط هي على بعد واحد من طرفَي الخط

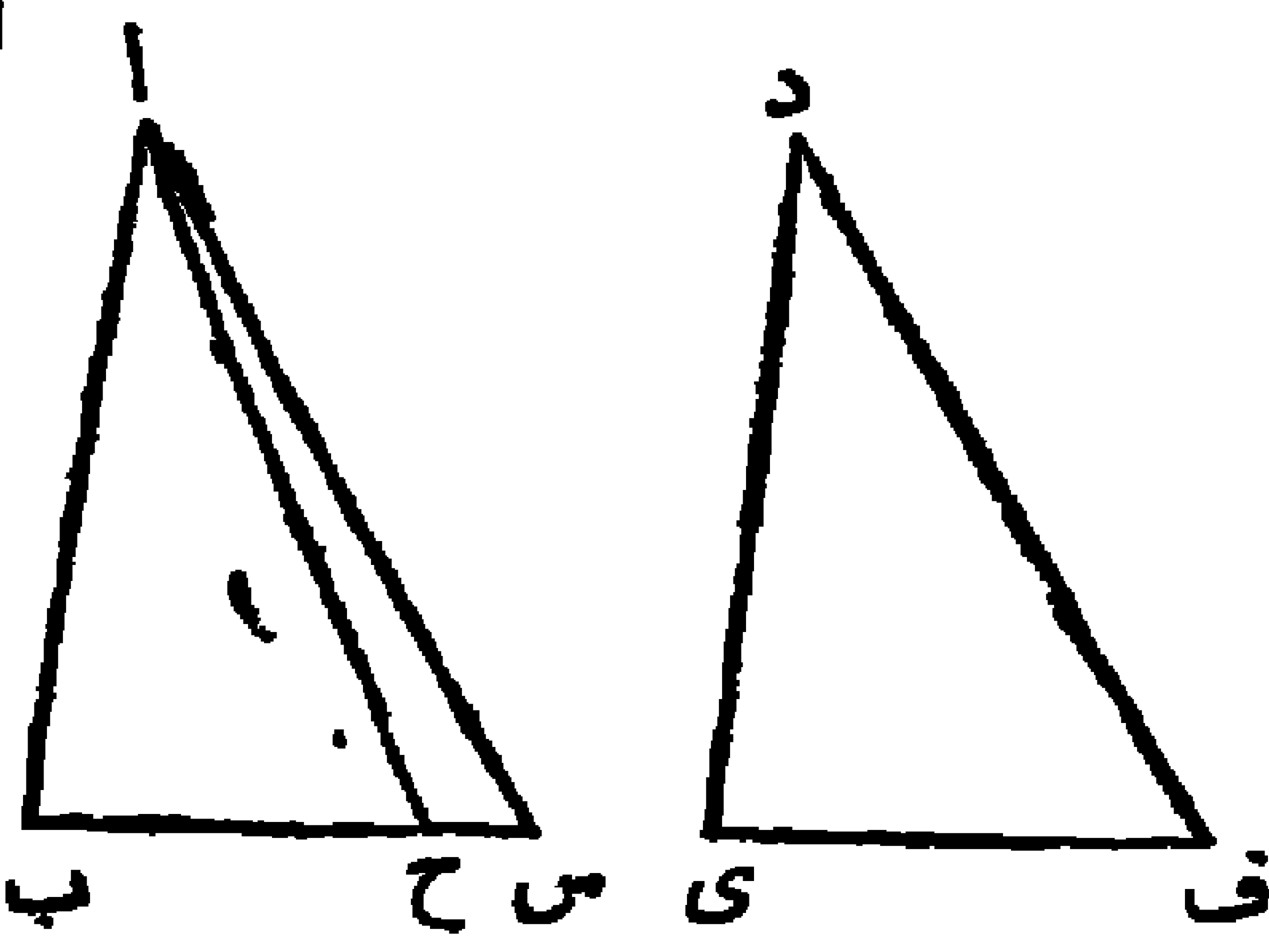
فرعٌ ثالث. من نقطة واحدة لا يمكن رسم ثلثة خطوط متساوية الى خط واحد والاَّ لكان خطان مائلان متساويان على جانب واحد من العمود وذاك لا يمكن

قضية ب٠ن

اذا عدل وترُ مثلثٍ قائم الزاوية وساقٌ من ساقيهِ وترَ مثلثٍ آخر قائم الزاوية وساقًا من ساقيهِ فالمثلثان متساويان

لنفرض الوتر ا س = د ف والضلع ا ب = د ى فالمثلث القائم الزاوية ا ب س

=القائم الزاوية دی ف. فلو فُرِضَتْ مساواة الضلع الثالث منهما لكانت مساواة المثلثين ظاهرة. وان لم يكن الضلعان الاخران متساويين فخذ جزءًا من ب س مثل ب ح حتى يعدل ی ف (ق٣ ك١) ارسم ا ح

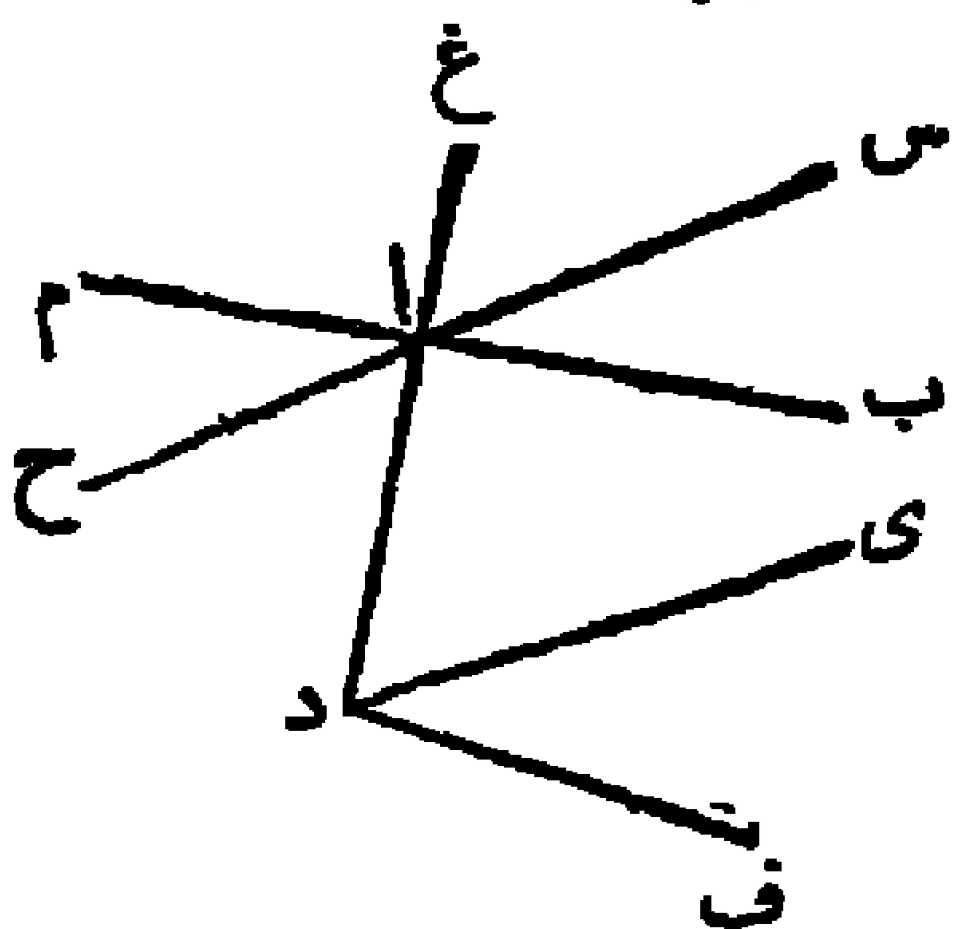


فالمثلث ا ب ح = د ی ف (ق٤ ك١) لانَّ ا ب = د ی وب ح = ی ف والزاوية ا ب ح = د ی ف لانهما قائمتان فلذلك ا ح = د ف ولكن قد فُرِض ان ا س = د ف فالنتيجة ان ا ح = ا س ولكن حسب القضية الماضية الأبعَدُ عن العمود هو اطول من الاقرب اليهِ فلا يمكن ان ا ح = ا س ولا يمكن ان ب س لا يعدل ی ف فالمثلثان ا ب س د ی ف متساويان

قضية ج. ن

اذا كان ضلعا زاويةٍ موازيين ضلعَي زاوية اخرى وكان انفراجهما الى جهة واحدة فالزاويتان متساويتان

لنفرض ان ا ب يوازي د ف وا س يوازي د ی فالزاوية س ا ب = ی د ف. ارسم غ ا د على رأسَيهما. فلانَّ ا ب يوازي د ف فالزاوية الخارجة غ ا ب = غ د ف (ق ٢٩ ك١) ولهذا السبب غ ا س = غ د ی فالبقية س ا ب = البقية ی د ف

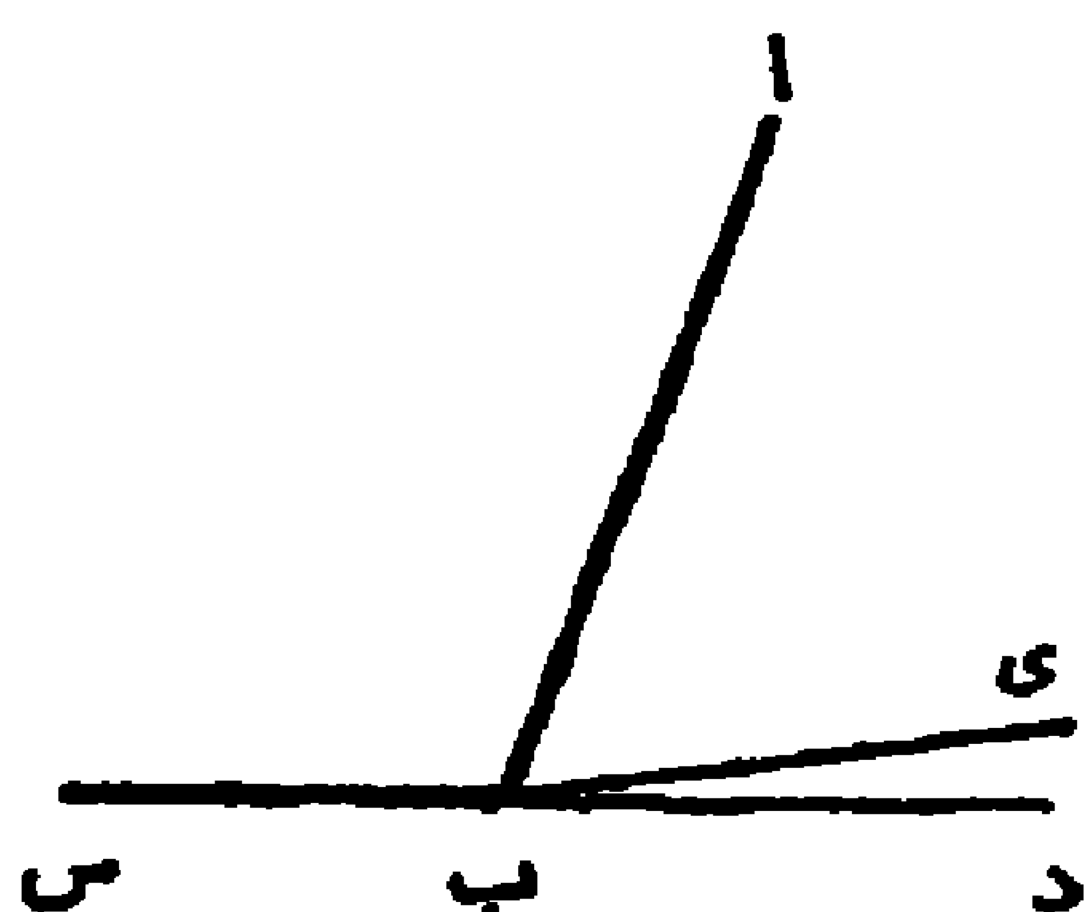


فرعٌ. اذا أُخرج ب ا الى م وس ا الى ح فلنا ب ا س = ح ا م واذ ذاك فالزاوية ح ا م = ی د ف ايضًا

تعليقة. يلزم حصر القضية بشرط انفراج الخطين الى جهة واحدة لانَّ في الزاوية س ا م س ا يوازي ی د وا م يوازي د ف ولكن الزاويتان غير متساويتين وس ا م وی د ف معًا تعدلان قائمتين

قضية ٤٠ع

مفروض زاويتان من زوايا مثلث وعلينا ان نجد الثالثة



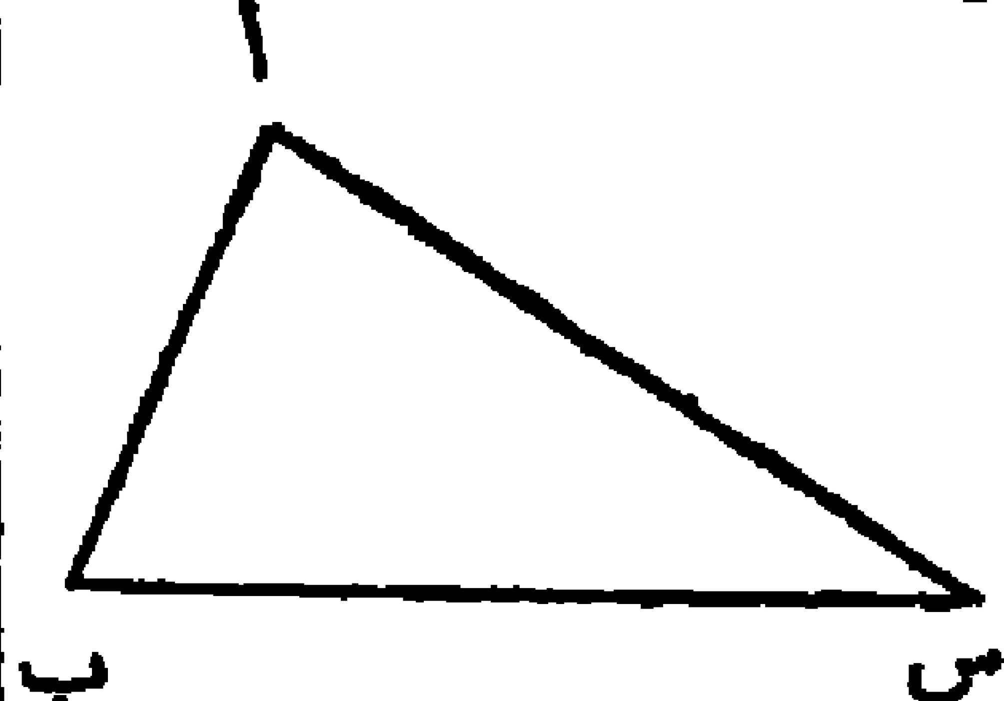
ارسم خطاً مستقيماً مثل س د وفي نقطة منهُ مثل ب اجعل الزاوية س ب ا حتى تعدل واحدة من الزاويتين المفروضتين والزاوية ا ب ى حتى تعدل الاخرى فالباقية ى ب د تعدل الثالثة لان هذه الثلاث زوايا تعدل قائمتين (فرع ق١٣ ك١)

قضية ٥٠ع

مفروض زاويتان من زوايا مثلث وضلع من اضلاعه فعلينا ان نرسم المثلث

الزاويتان المفروضتان تكونان المواليتين ضلع المفروض او تكون احداهما متوالية لهُ والاخرى متقابلة لهُ. ففي الحالة الثانية استعلم الثالثة حسب القضية الماضية فتكون هي الاخرى المتوالية

ثم ارسم الخط المستقيم ب س حتى يعدل الضلع المفروض وعند ب اجعل الزاوية س ب ا تعدل احدى المتواليتين وعند س اجعل الزاوية ب س ا تعدل الاخرى المتوالية فالخطان ب ا ب س يتقاطعان ويحدث من ذلك المثلث المفروض

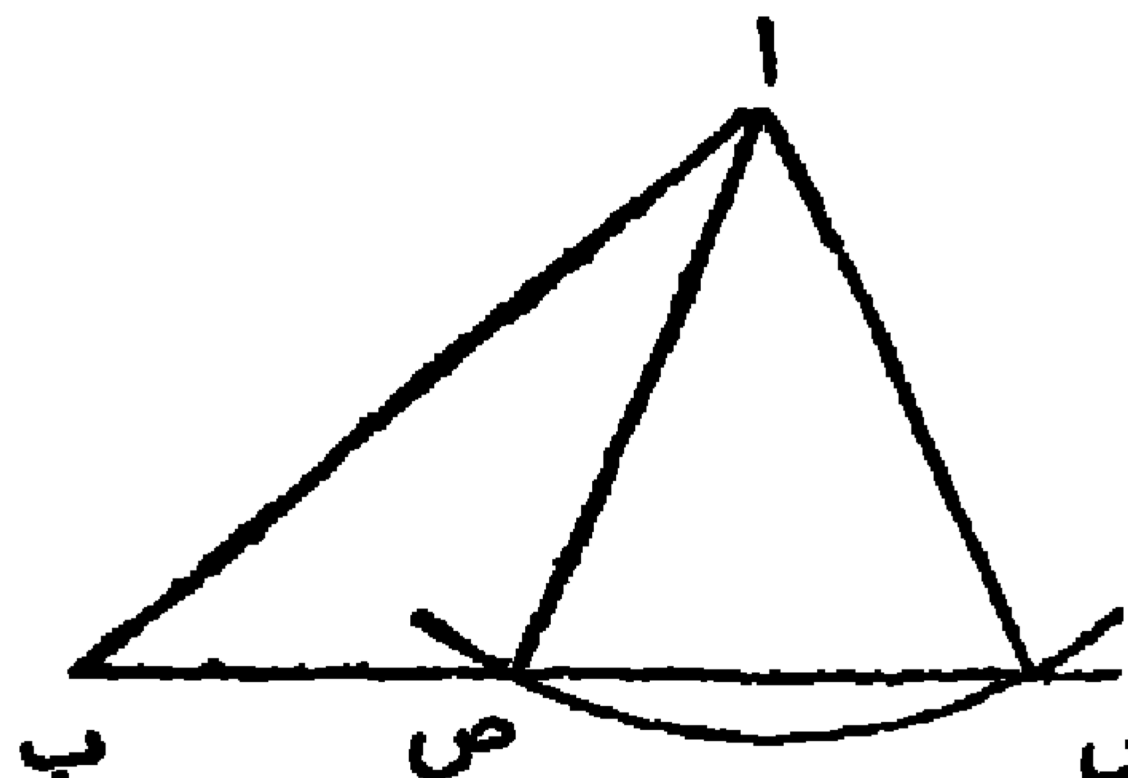


لانه لو كانا متوازيين لكانت الزاويتان عند ب وس تعدلان معاً قائمتين ولم تكونا زوايا مثلث فبالضرورة يكون ا ب س المثلث المطلوب

قضية ٢٦

مفروض ضلعان من اضلاع مثلثٍ وزاويةٌ متقابلة لاحدهما فعلينا ان نرسم المثلث

لهذه العملية حالتان احداهما متى كانت الزاوية المفروضة منفرجة . اجعل الزاوية ب ص ا تعدل المفروضة ثم اجعل ص ا يعدل الضلع الذي يوالي الزاوية المفروضة فلو جعلت النقطة ا مركزًا والضلع الاخر اي ا ب بعدًا ورسم قوسٌ لقطع ب س على جانبي ص فلا



يمكن ان يرسم اكثر من مثلث واحد ذي زاوية منفرجة على هذه الكيفية وهو المثلث ب ص ا

ولو كانت المفروضة قائمة لرُسِم مثلثان لكن كان الوتران يقطعان ب س على بعدٍ واحد على جانبي العمود فكان المثلثان متساويين

الحالة الثانية متى كانت الزاوية المفروضة حادّة والضلع المتقابل اطول من المتوالي فالعمل فيها كما تقدّم . اجعل ب س ا تعدل المفروضة وا س يعدل الضلع المتوالي ثم اجعل ا مركزًا والضلع الاخر طولًا فاذا كان طوله ا ب فالقوس يقطع س ب في ب . ارسم ا ب فيكون ب ا س المثلث المطلوب واذا كانت المفروضة حادّة والضلع المتقابل اقصر من الاخر فاجعل س ب ا تعدل المفروضة واجعل ب ا يعدل الضلع المفروض المتوالي ثم اجعل ا مركزًا وا س بعدًا فالقوس يقطع ب س في س وص على جانب واحد من ب فيحدث مثلثان ب ا ص ب ا س وكل واحد منهما مستوفٍ شروط العمل

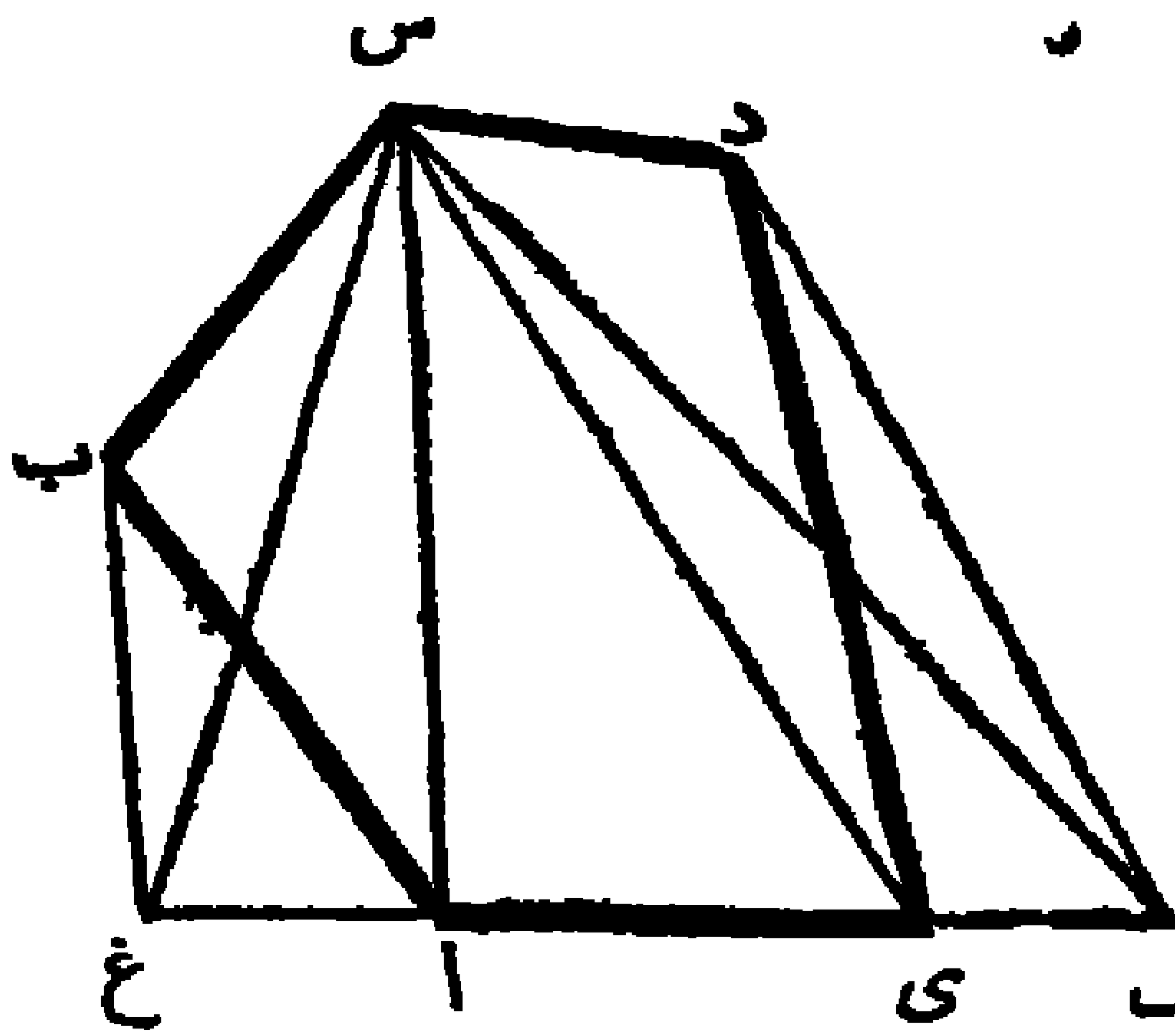
تعليقة . في هذه الحالة الاخيرة لو كان طول الضلع الاقصر طول العمود من ا الى ب س لحدث مثلثٌ قائم الزاوية . ولو كان ذلك الضلع اقصر من العمود من ا على ب س لكانت المسئلة غير ممكنة في كل الاحوال



قضية ز.ع

علينا ان نجد مثلثًا يعدل شكلاً مفروضًا ذا اضلاعٍ مستقيمة

ليكن ا ب س د ى الشكل المفروض. ارسم القطر س ى الذي يفصل من الشكل المثلث س د ى. ارسم د ف حتى يوازي س ي واخرج ا ى الى ف ثم ارسم س ف فالشكل ا ب س د ى يعدل الشكل ا ب س ف لانَّ المثلثين س د ى س ف ى هما على قاعدة واحدة س ى وبين خطين متوازيين س ى د ف فهما متساويان (ق ٣٧ ك ١) ثم ارسم القطر س ا وارسم ب غ حتى يوازي س ا واخرج ى ا الى غ وارسم س غ فالشكل ا ب س د ى قد تحول الى مثلث يعدله غ س ف

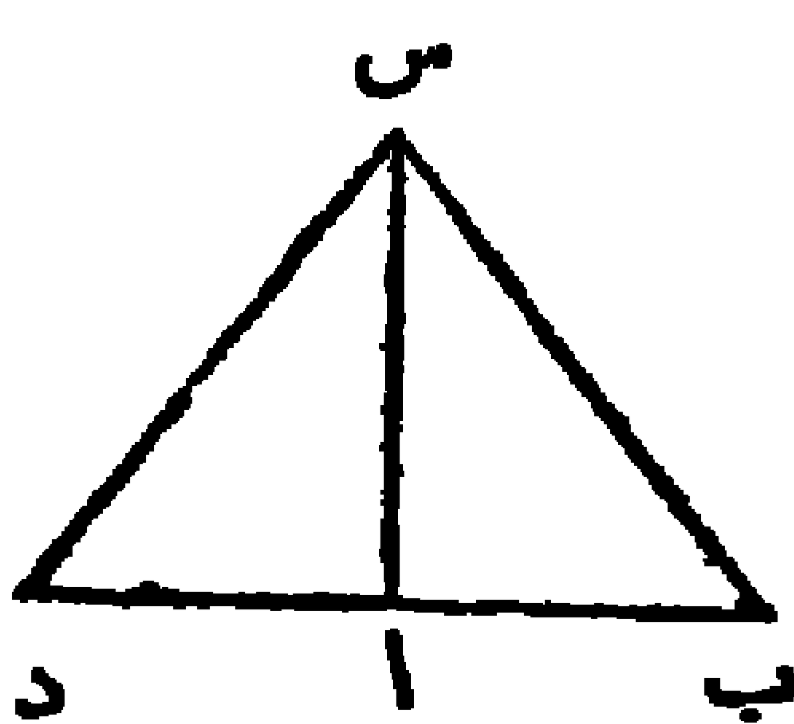


فرع. من حيث ان المثلث يمكن تحويلهُ الى شكل ذي زوايا قائمة يعدله فبالضرورة كل ذي اضلاع كثيرة يمكن تحويله الى شكل ذي زوايا قائمة يعدله

قضية ح.ع

علينا ان نستعلم ضلع مربعٍ يعدل مجتمع مربعين

ارسم خطين غير محدودين مثل ا ب ا س احدهما عمودي على الاخر. ثم اقطع ا ب حتى يعدل ضلعًا من احد المربعين المفروضين وا س الاخر. ارسم ب س فلأنَّ ب ا س قائمة فمربع ب س = مربع ب ا مع مربع ا س (ق ٤٧ ك ١)



تعليقة. هكذا يُرسَم مربعٌ يعدل مجتمع ايّ مربعات فُرضت وذلك بتحويل ثلثة منها الى اثنين واثنين الى واحد وهلمَّ جرًّا

قضية ط.ع

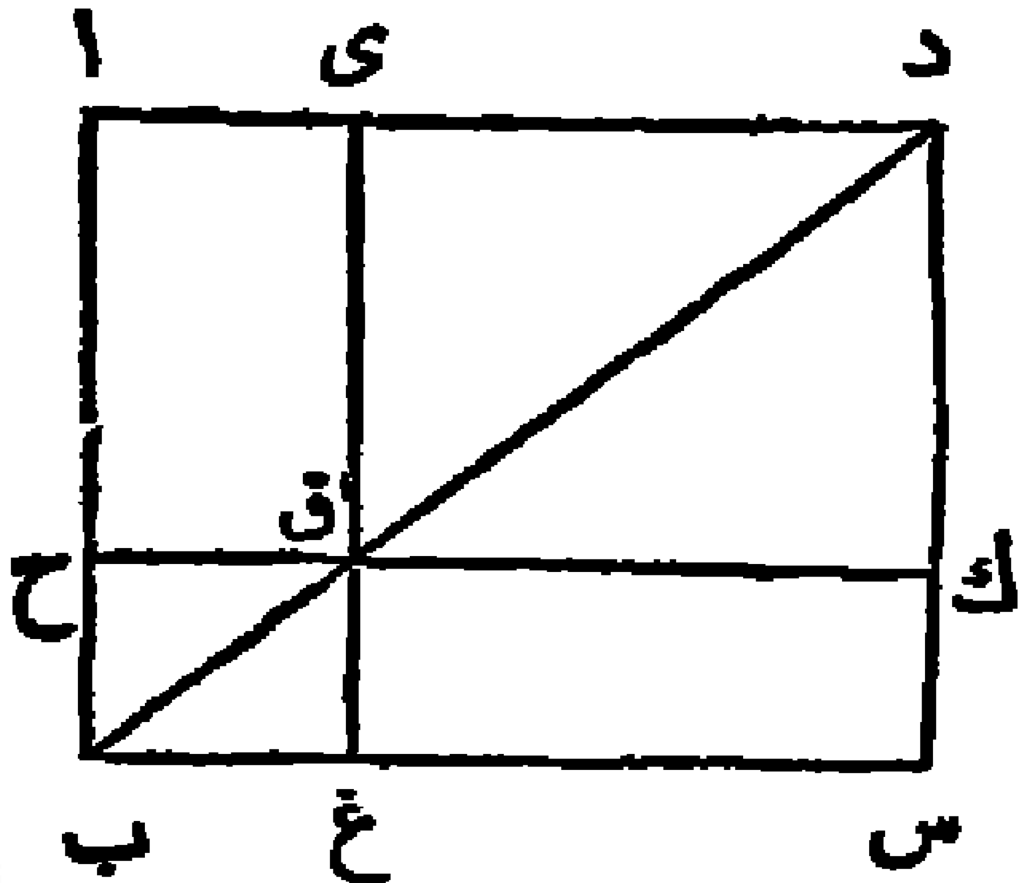
علينا ان نجد ضلع مربع يعدل فضلة مربعين مفروضين

ارسم كما في القضية السابقة اس اد احدهما عمودًا على الاخر واجعل اس يعدل ضلع اصغر المربعين ثم اجعل س مركزًا وضلع المربع الاخر بعدًا وارسم قوسًا يقطع اد في د فالمربع المرسوم على اد يعدل فضلة مربعَي س د واس لان د اس قائمة وا د^{٢}=س د^{٢}−اس^{٢} (ق ٤٧ ك ا فرع اول)

قضية ي.ع

مفروض شكلٌ ذو زوايا قائمة وعلينا ان نرسم اخر مثلهُ لهُ ضلع مفروض

ليكن اى ق ح الشكل المفروض. اخرج ضلعًا من اضلاعهِ مثل اح حتى يصير ح ب على الطول المفروض. اخرج اى وارسم ب ق واخرجهُ حتى يلاقي اى في د ثم اخرج ى ق واجعل ق غ يعدل ح ب وارسم ب غ س وح ق ك حتى يوازيا ا د ومن د ارسم د ك س حتى يوازي ا ب او ى غ



فالشكل غ ق ك س يعدل اح ق ى (ق ٤٣ ك ا) ولهُ ق غ الضلع المفروض

فرعٌ. شكل ذو اضلاع كثيرة يمكن تحويلهُ الى شكل ذي زوايا قائمة يعدلهُ ولهُ ضلع مفروض

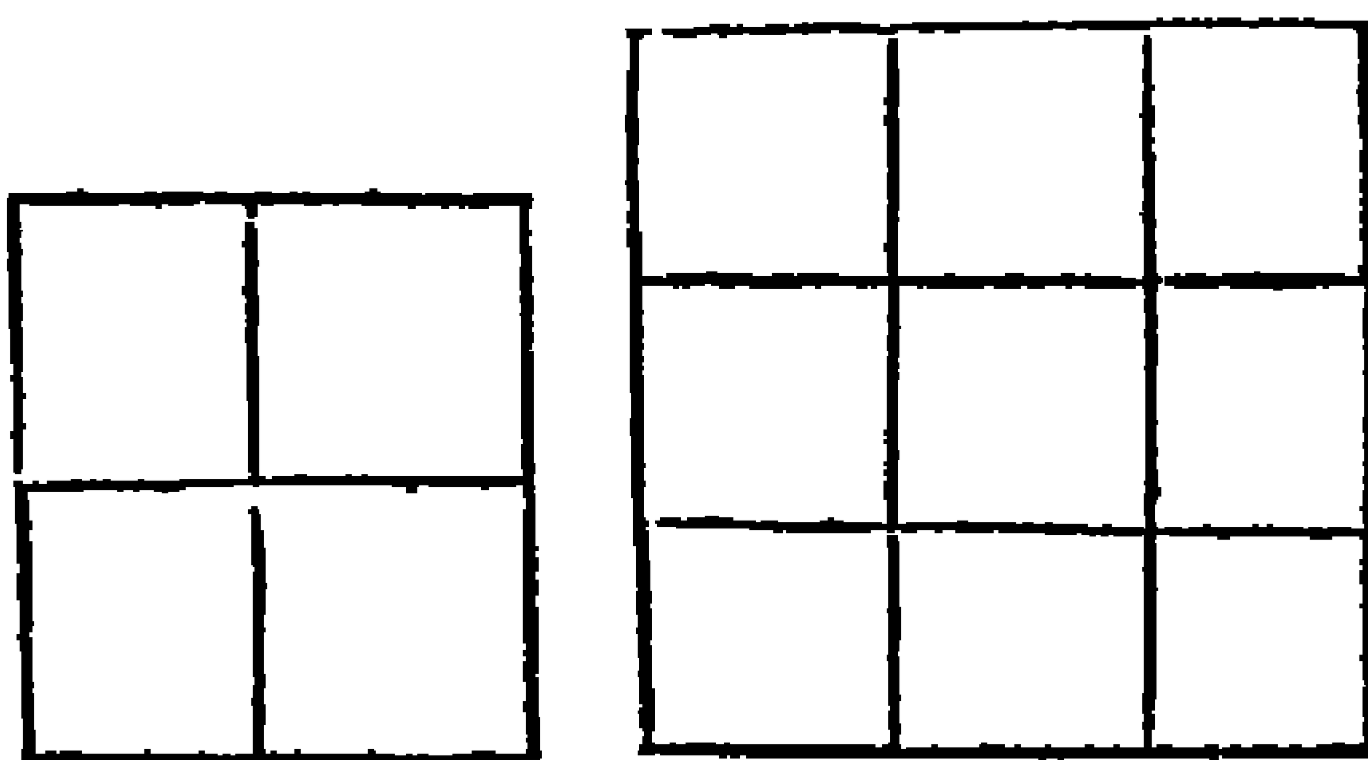
اصول الهندسة

الكتاب الثاني

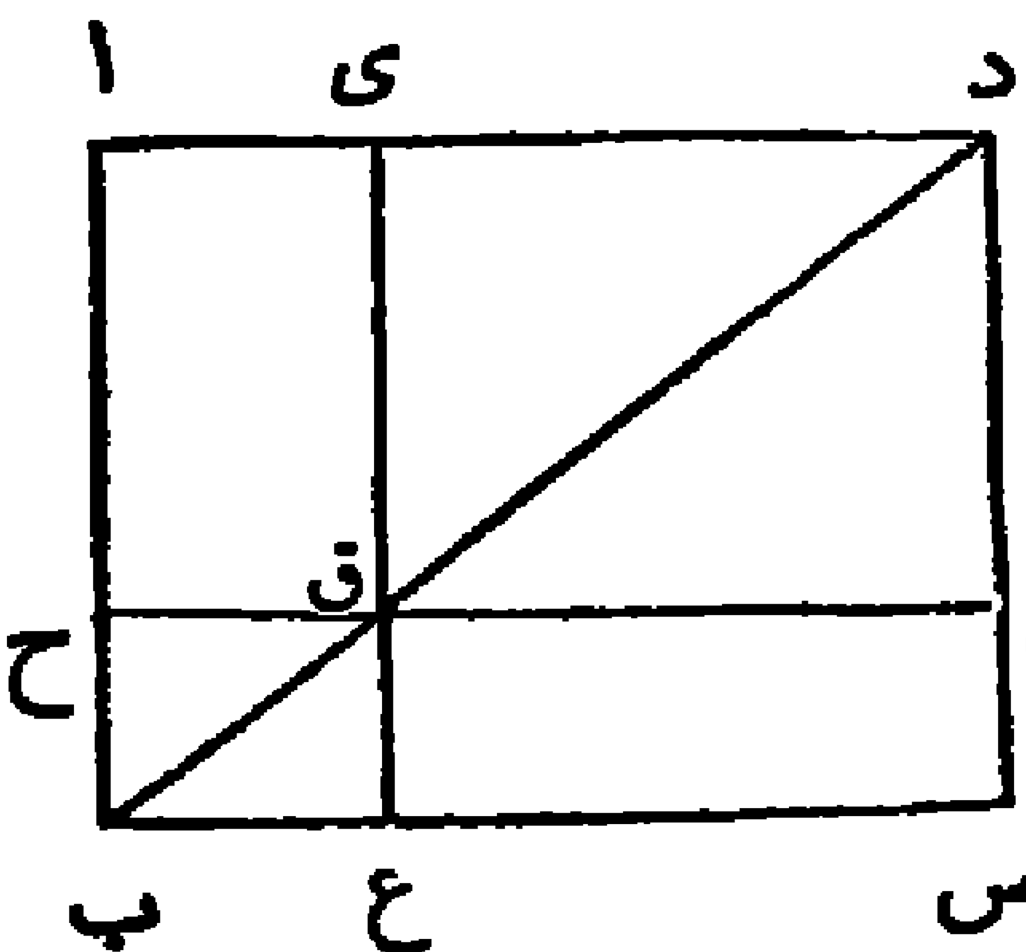
حدود

١ كل شكل متواري الاصلاع قائم الزوايا يُعبَّر عنه بالضلعين المحيطَين باحدى قائماته فالشكل ا س المتوازي الاصلاع القائم الزوايا يسمى القائم الزوايا الذي يحيط به ا د و د س او ا د و ا ب وهكذا الى اخره ولاجل الاختصار يقال القائم الزوايا ا د في د س او ا د × د س او ا د . د س

حاصل خطَّين او مسطَّحهما في اصطلاح الهندسة هو القائم الزوايا المصطنع منهما مع ما يواريهما . وقد تستعمل هذه العبارة ايضاً في علم الحساب وعلم الجبر والمقابلة حيث يدلُّ على حاصل كميتين غير متماثلتين . واذا كانتا متماثلتين فمسطحهما مربعٌ اي كمية في ذاتها . فمربعات الاعداد ١ ٢ ٣ الى اخره هي ١ ٤ ٩ الى اخره والمربع المرسوم على مضاعف خط هو اربعة امثال المربع المرسوم على الخط ذاته . والمرسوم على ثلثة امثال خط هو تسعة امثال المرسوم على الخطّ ذاته



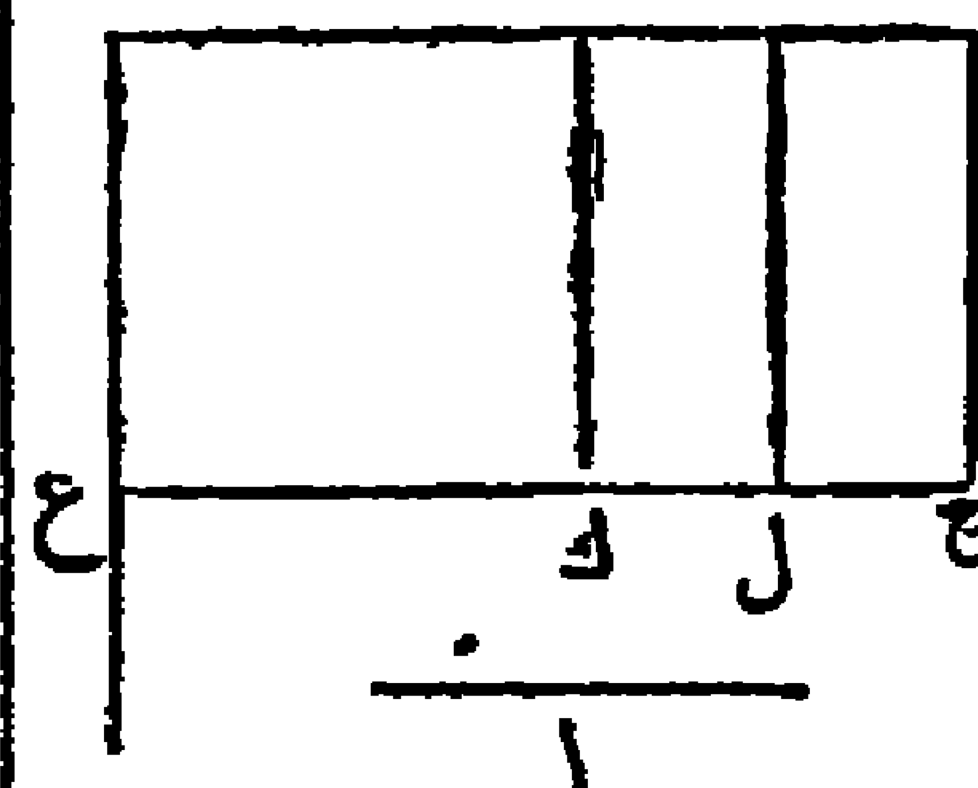
٢ شكلٌ من الاشكال الواقعة على جانبي القطر في كل شكل متواري الاصلاع مع المتمِّمين يسمى عَلَماً فالشكل ح ع مع المتمِّمين ا ق ق س هو علم الشكل ا س وكذلك ى ك مع ا ق و ق س . ولاجل الاختصار يسمى الاول العلم ا ع ك او ى ح س



القضية الاولى . ن

اذا فُرِض خطّان مستقيمان وانقسم احدهما الى اقسام متعددة فالقائم الزوايا مسطحهما يعدل مجتمع القائمات الزوايا مسطحات الخط الغير المقسوم في اقسام المقسوم

ليكن ب س خطًّا مستقيمًا وا خطًّا اخر مستقيمًا وليُقسَم ب س الى اقسام في د وى فالقائم الزوايا ا×ب س يعدل القائمات الزوايا ا×ب د مع ا×د ى مع ا×ى س



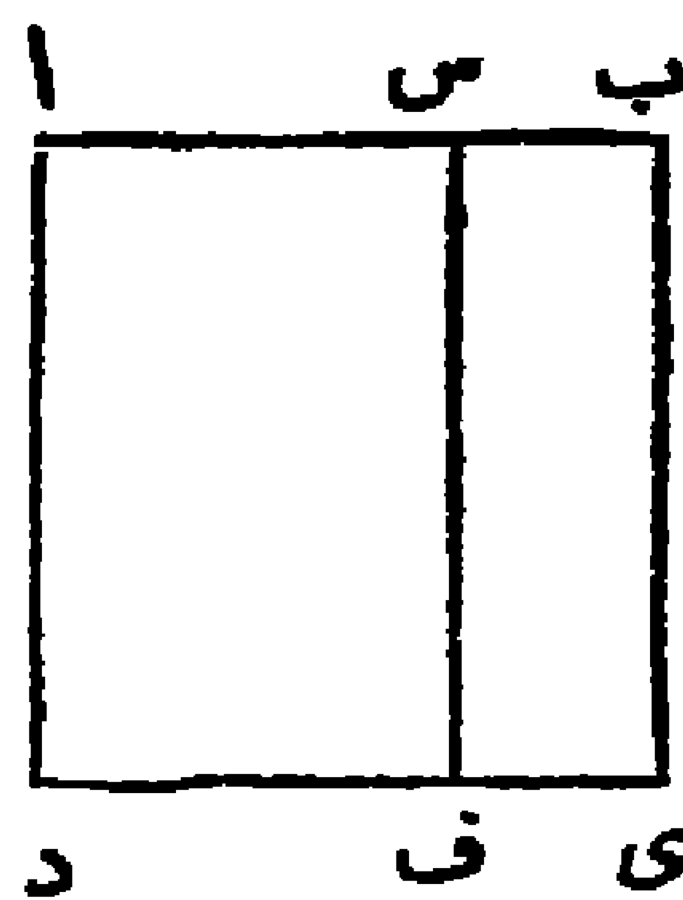
من النقطة ب ارسم الخط ب ف عمودًا على ب س (ق ١١ ك ١) واقطع منهُ ب ع حتى يعدل ا (ق ٣ ك ١) ومن ع ارسم ع ح حتى يوازي ب س (ق ٣١ ك ١) ومن النقط الثلاث د ى س ارسم الخطوط د ك ى ل س ح حتى توازي ب ع فالاشكال ب ح ب ك د ل ى ح هي قائمات الزوايا وب ح = ب ك + د ل + ى ح

ولكن ب ح = ب ع × ب س = ا × ب س لانّ ب ع = ا وب ك = ب ع × ب د = ا × ب د لانّ ب ع = ا ود ل = د ك × د ى = ا × د ى لانّ د ك = ب ع = ا (ق ٣٤ ك ١) وهكذا ايضًا ى ح = ا × ى س فاذًا ا × ب س = ا × ب د + ا × د ى + ا × ى س اي القائم الزوايا او المسطح ا × ب س يعدل مجتمع القائمات الزوايا ا × ب د + ا × د ى + ا × ى س

تعليقة . خصائص اقسام الخطوط المبرهنة في هذا الكتاب تستعلم ايضًا بسهولة من علم الجبر والمقابلة . ففي هذه القضيّة اذا فرضنا اقسام الخط ب س ب وس ود فلنا ا × (ب + س + د) = ا ب + ا س + ا د

القضيّة الثانية . ن

اذا انقسم خطٌّ مستقيم الى قسمين فالقائما الزوايا مسطحا كل الخط في كل وا د من قسميه يعدلان مربع كل الخط



ليتقسم الخط المستقيم ا ب الى قسمين في س فالقائم الزوايا ا ب×ب س مع القائم الزوايا ا ب×ا س يعدلان مربع ا ب اي ا ب×ب س+ا ب×ا س=ا ب^2

ارسم على ا ب المربع ا د ى ب (ق ٤٦ ك ١) ومن س ارسم س ف حتى يوازي ا د او ب ى (ق ٣١ ك ١)

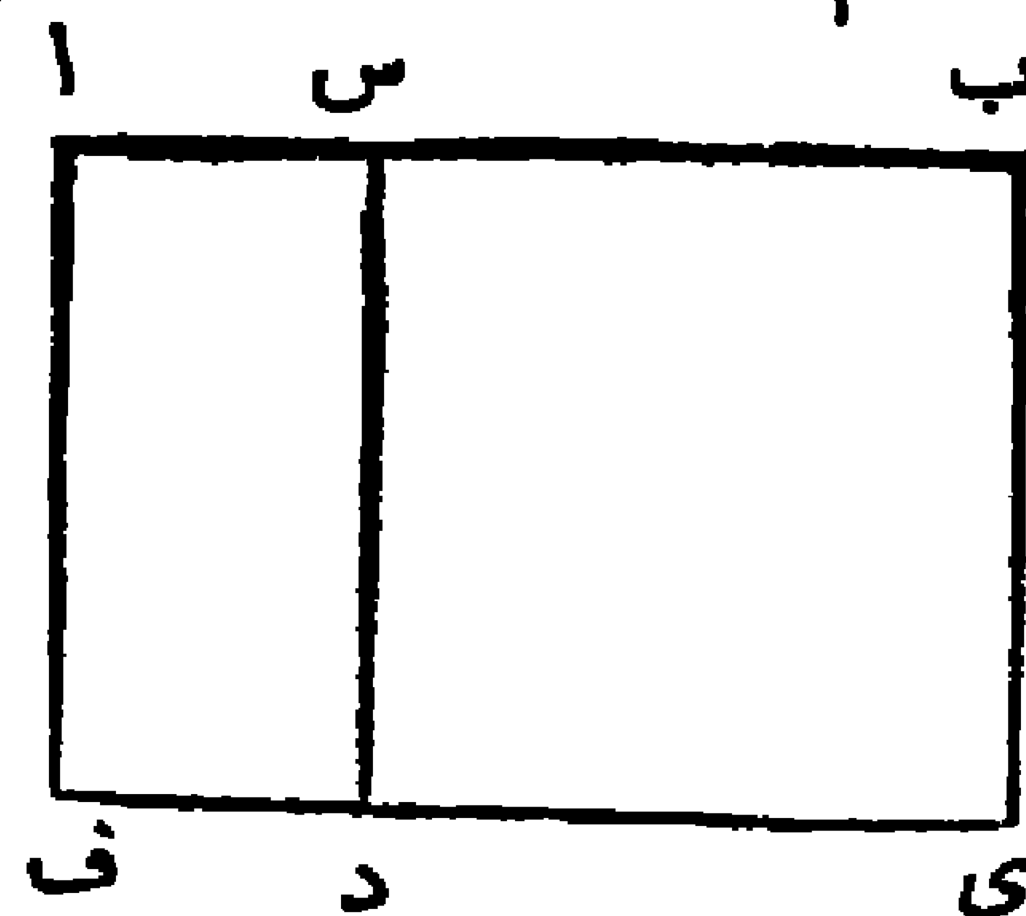
فلنا ا ف+س ى=ا ى ولكن ا ف=ا د×ا س=ا ب×ا س لانَّ ا د=ا ب والشكل س ى=ب ى×ب س=ا ب×ب س وا ى=ا ب^2 فاذًا ا ب×ا س+ا ب×ب س=ا ب^2

تعليقة. وهكذا بالجبر. فلنفرض ا ب=ا وا س=ب وس ب=د فلنا ا=ب+د اضرب جانبي المعادلة في ا فلنا ا^2=ا ب+ا د

القضية الثالثة. ن

اذا انقسم خطٌّ مستقيم الى قسمين فالقائم الزوايا مسطح كل الخط في احد قسميهِ يعدل القائم الزوايا مسطح القسمين مع مربع القسم المذكور

ليُقسم الخط المستقيم ا ب الى قسمين في س فالقائم الزوايا ا ب×ب س يعدل القائم الزوايا ا س×ب س مع مربع ب س



ارسم على ب س المربع س د ى ب (ق ٤٦ ك ١) واخرج ى د الى ف ومن ا ارسم ا ف حتى يوازي س د او ب ى (ق ٣١ ك ١) فالشكل ا ى=ا د+س ى ولكن ا ى=ا ب×ب ى=ا ب×ب س لانَّ ب ى=ب س وا د=ا س×س د=ا س×س ب وس ى=ب س^2 فاذًا ا ب×ب س=ا س×س ب+ب س^2

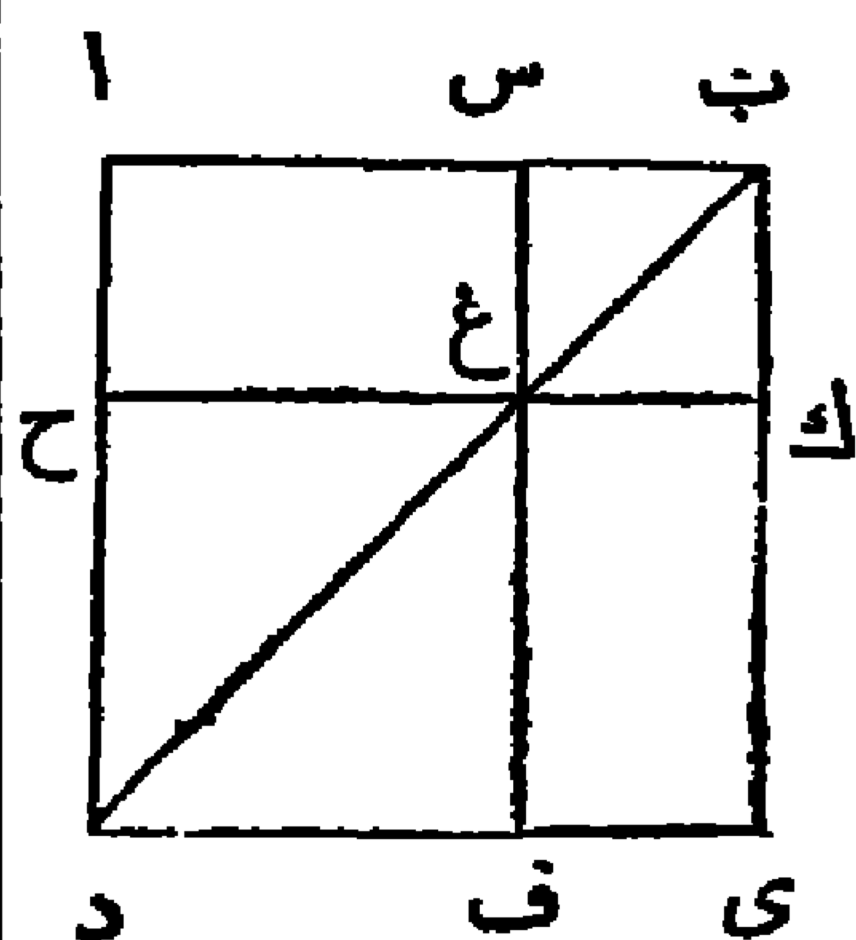
تعليقة. وهكذا بالجبر. فلنفرض ا ب=ا وا س=ب وس ب=س فلنا ا=ب+س اضرب الجانبين في س فلنا ا س=س ب+س^2

القضية الرابعة . ن

اذا انقسم خط مستقيم الى قسمين فمربع الخط كله يعدل مربعي القسمين مع مضاعف القائم الزوايا مسطح القسمين

ليُقسم الخط المستقيم ا ب الى قسمين في س فمربع ا ب يعدل مربع ا س مع مربع س ب مع مضاعف القائم الزوايا ا س في س ب اي ا ب^{٢}=ا س^{٢}+س ب^{٢}+ ٢ ا س×س ب

ارسم على ا ب المربع ا د ى ب (ق٤٦ ك١) وارسم ب د ومن س ارسم س غ ف حتى يوازي ا د او ب ى (ق٣١ ك١) ومن غ ارسم ح ك حتى يوازي ا ب او د ى



فمن حيث ان س ف يوازي ا د ويلاقيهما ب د فالزاوية الخارجة ب غ س تعدل الداخلة المتقابلة ا د ب (ق٢٩ ك١) ولكن ا د ب=ا ب د (ق٥ ك١) لانّ ب ا=ا د لانهما ضلعا مربع . فالزاوية س غ ب=س ب غ وب س=س غ (ق٦ ك١) ولكن س ب=غ ك (ق٣٤ ك١) وس غ=ب ك فالشكل ب س غ ك متساوي الاضلاع وهو متساوي الزوايا ايضًا لان س ب ك قائمة فتكون بقية زوايا الشكل س غ ك ب قائمات (فرع ق٤٦ ك١) فهو مربع على الضلع س ب وهكذا ايضًا يبرهن أن ح ف مربعٌ وهو على الضلع غ ح الذي يعدل ا س فالشكلان ح ف س ك هما مربعا ا س س ب ولان المتمّ ا غ يعدل المتمّ غ ى (ق٤٣ ك١) وا غ=ا س×س غ=ا س×س ب فلذلك ايضًا غ ى =ا س×س ب وا غ+غ ى=٢ ا س×س ب ولكن ح ف=ا س^{٢} وس ك =س ب^{٢} فاذًا ح ف+س ك+ا غ+غ ى=ا س^{٢}+س ب^{٢}+٢ ا س×س ب ولكن ح ف+س ك+ا غ+غ ى= الشكل ا ى او ا ب^{٢} فاذًا ا ب^{٢}=ا س^{٢} + س ب^{٢}+٢ ا س×س ب

فرعٌ . يتضح من هذه القضية ان الاشكال المتوازية الاضلاع على جانبي قطر مربع هي ايضًا مربعات

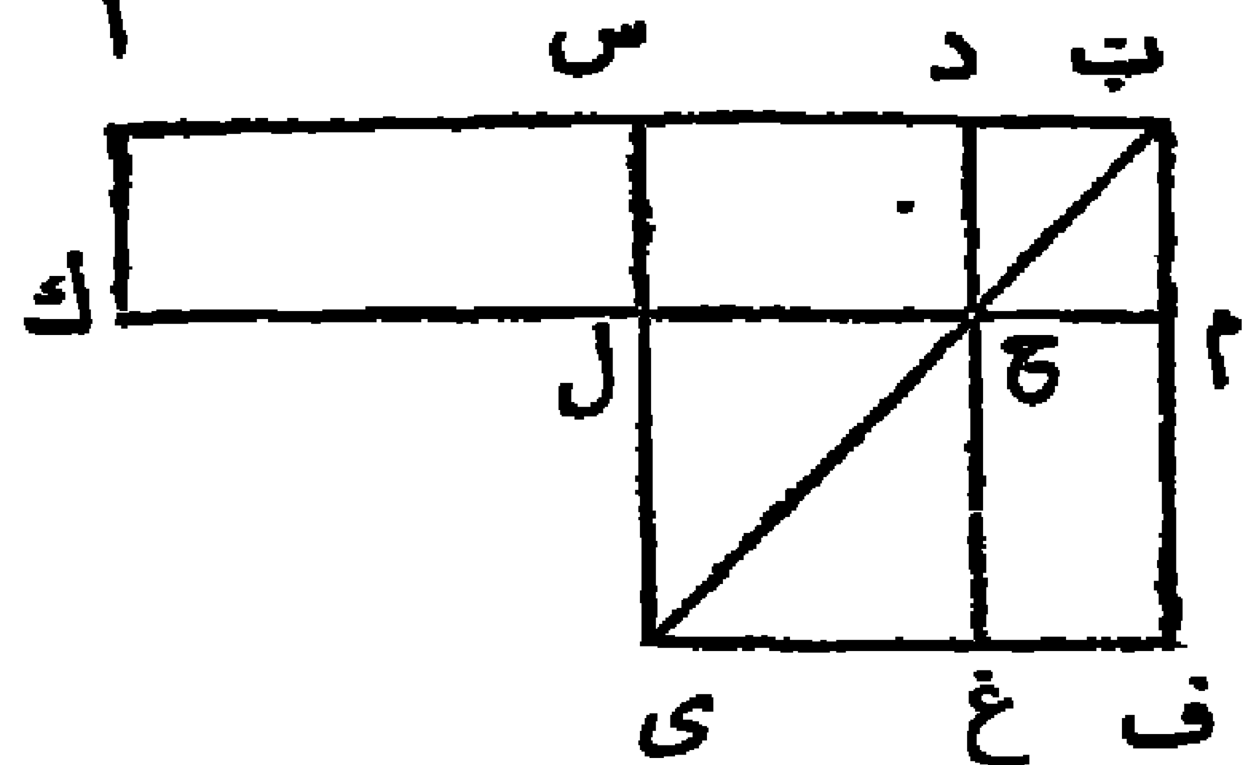
تعليقة . هذه القضية تبرهن ايضاً من مربع كمية ثنائية في الجبر فاذا فُرض القسمان ا وب قلنا (ا+ب)^{٢}=ا^{٢}+٢ اب+ب^{٢}

——

القضية الخامسة . ن

اذا انقسم خطٌ مستقيم الى قسمين متماثلَين وايضاً الى قسمين غير متماثلَين فالقائم الزوايا مسطح القسمين الغير المتماثلين مع مربع القسم الواقع بين نقطتي الانقسام يعدل مربع نصف الخط

لِيُقسَم الخط المستقيم ا ب الى قسمين متماثلين في س وغير متماثلين في د فالقائم الزوايا ا د×د ب مع مربع س د يعدل مربع س ب اي ا د×د ب+س د^{٢}= س ب^{٢}



ارسم على س ب المربع س ى ف ب (ق ٤٦ ك ١) وارسم القطر ب ى ومن د ارسم د ح غ (ق ٣١ ك ١) حتى يوازي س ى او ب ف ومن ح ارسم ك ل م حتى يوازي س ب او ى ف ومن ا ارسم ا ك حتى يوازي س ل او ب م

فمن حيث ان س ح=ح ف فاذا اضيف الى كل واحد منهما د م لنا س م= د ف ولكن ا ل=س م (ق ٣٦ ك ١) فاذاً ا ل=د ف . أَضِف الى كل واحد منهما س ح فلنا ا ح=العلم س م غ . وا ح=ا د×د ح=ا د×د ب لان د ح=د ب (فرع ق ٤ ك ٢) فالعلم س م غ=ا د×د ب . اضف الى كل واحد منهما ل غ= س د^{٢} فالعلم س م غ+ل غ=ا د×د ب+س د^{٢} ولكن س م غ+ل غ=ب س^{٢} فاذاً ا د×د ب+س د^{٢}=ب س^{٢}

فرعٌ . يتضح من هذه القضية ان فضلة مربَّعَي خطَّين غير متماثلين ا س س د يعدل القائم الزوايا مسطح مجتمعهما في فضلتهما اي ان ا س^{٢}−س د^{٢}=(ا س+س د) ×(ا س−س د)

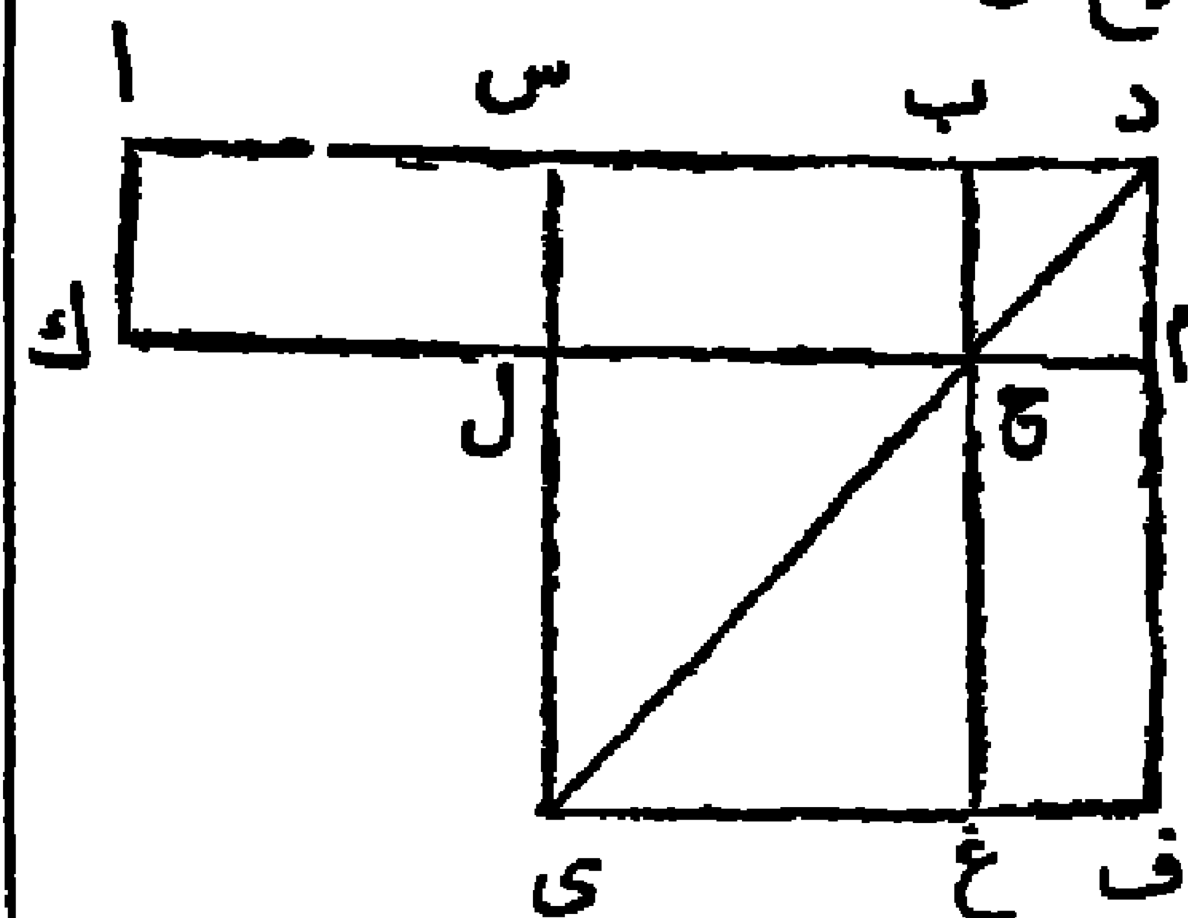
تعليقة . في هذه القضية لنفرض ا س=ا وس د=ب فلنا ا د=ا+ب ود ب

=ا−ب وبالجبر (ا+ب)×(ا−ب)=ا٢−ب٢ اي مسطح مجتمع كميتين في فضلتها يعدل فضلة مربعيهما

القضية السادسة. ن

اذا تنصف خط مستقيم ثم أُخرج على استقامته الى نقطةٍ ما فالقائم الزوايا مسطح الخط كله بعد اخراجه في الجزء الذي قد زيد عليهِ مع مربع نصف الخط الذي قد تنصف يعدل مربع الخط المركب من النصف والجزء المزيد

ليُقسَم الخط المستقيم ا ب الى قسمين متماثلين في س ثم ليُخرَج الى د فالقائم الزوايا ا د×د ب مع مربع س ب يعدل مربع س د .



ارسم على س د المربع س ى ف د (ق٤٦ ك١) وارسم القطر د ى ومن ب ارسم ب ح غ (ق٣١ ك١) حتى يوازي د ف او س ى ومن ح ارسم ك ل م حتى يوازي ا د او ى ف ومن ا ارسم ا ك حتى يوازي س ل او د م. فمن حيث ان ا س=س ب فالقائم الزوايا ا ل=القائم الزوايا س ح (ق٣٦ ك١) ولكن س ح=ح ف (ق٤٣ ك١) فاذاً ا ل=ح ف. أَضِف الى كل واحد منهما س م فالكل ا م=العلم س م غ وا م= ا د ×د م=ا د×د ب لانَّ د م=د ب فالعلم س م غ=القائم الزوايا ا د×د ب وس م غ+ل غ=ا د×د ب+س ب٢ وس م غ+ل غ=س ف=س د٢ فاذاً ا د×د ب+س ب٢=س د٢

تعليقة. وهكذا بالجبر. لنفرض ا ب = ٢ا و ب د=ب فلنا ا د= ٢ا +ب وس د =ا+ب وبالضرب ب×(٢ا+ب)= ٢ا ب+ب٢ . أَضِفْ الى الجانبين ا٢ فلنا ب×(٢ا+ب)+ا٢=ا٢+ ٢ا ب+ب٢ اي ب×(٢ا+ب) +ا٢=(ا+ب)٢

القضية السابعة . ن

اذا انقسم خطٌّ مستقيم الى قسمين فمربع كل الخط مع مربع احد القسمين يعدل مضاعف القائم الزوايا مسطح الخط كله في ذلك القسم مع مربع القسم الآخر

لنُقسَم الخط المستقيم اب الى قسمين في س فمربع اب مع مربع ب س يعدل مضاعف القائم الزوايا اب×ب س مع مربع اس اي اب^{٢}+ب س^{٢}=٢اب×ب س+اس^{٢}

ارسم على اب المربع اد ى ب (ق٤٦ ك١) وتمّم الشكل كما في القضايا السابقة. فمن حيث ان اغ=غ ى فالكل اغ+س ك=غ ى+س ك اي اك=س ى واك+س ى=٢اك واك+س ى=العلم اك ف+س ك فاذاً اك ف+س ك=٢اك=٢اب×ب ك=٢اب×ب س لانّ ب ك=ب س (فرع ق٤ ك٢) فمن حيث ان اك ف+س ك=٢اب×ب س فالكل اك ف+س ك+ح ف=٢اب×ب س+ح ف واك ف+ح ف=اى=اب^{٢} فاذاً اب^{٢}+س ك=٢اب×ب س+ح ف اي (حيث ان س ك=ب س^{٢} وح ف=اس^{٢}) اب^{٢}+س ب^{٢}=٢اب×ب س+اس^{٢}

فرعٌ. فاذاً مجتمع مربّعي خطّين يعدل مضاعف القائم الزوايا مسطّح الخطّين مع مربع فضلة الخطين

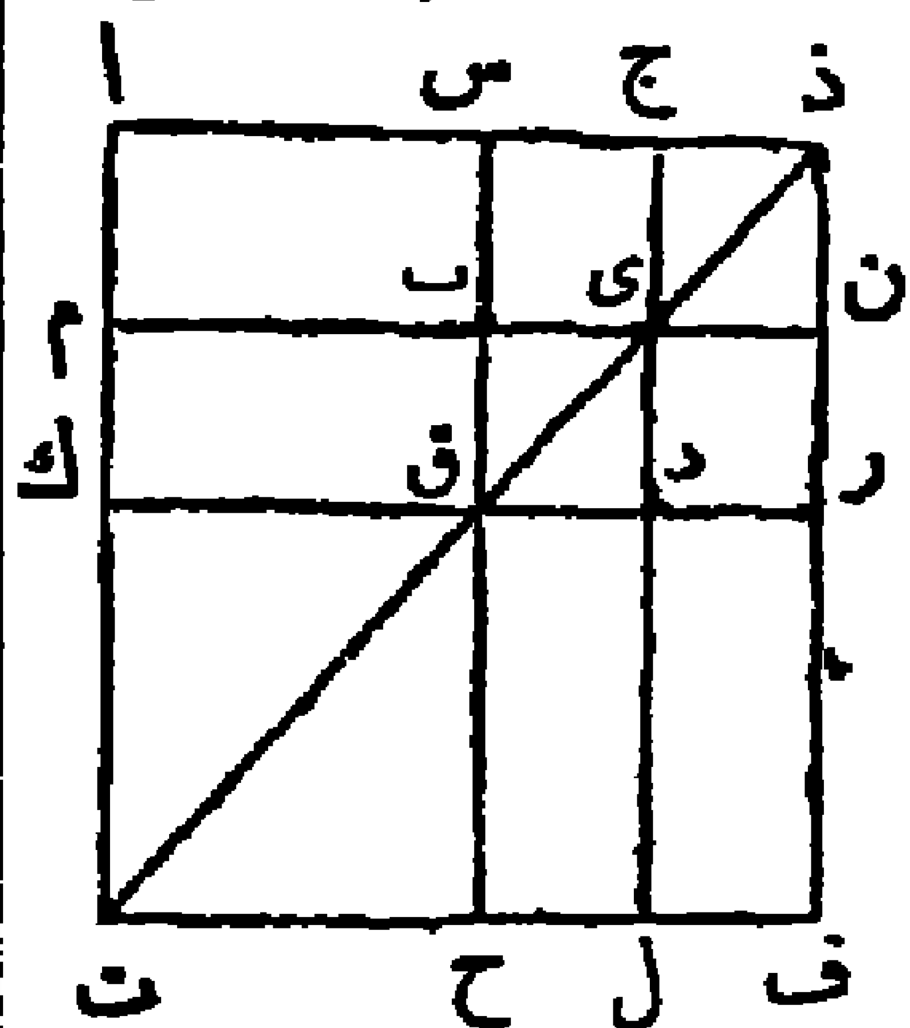
تعليقة. في هذه القضية لنفرض اب=ا واس=ب وس ب=س فلنا
ا^{٢}=ب^{٢}+٢ب س+س^{٢} اضف س^{٢} الى كل جانب فلنا
ا^{٢}+س^{٢}=ب^{٢}+٢ب س+٢س^{٢} اي ا^{٢}+س^{٢}=ب^{٢}+٢س×(ب+س)
اي ا^{٢}+س^{٢}=٢اس+ب^{٢} هـ

فرعٌ. يتّضح من هذه القضيّة ان المربع المرسوم على فضلة خطّين يعدل مجتمع المربّعين المرسومَين على الخطّين إلاّ مضاعف القائم الزوايا مسطّح الخطّين. لان ا−س=ب وبالترقية ا^{٢}−٢اس+س^{٢}=ب^{٢}

القضية الثامنة. ن

اذا انقسم خطٌ مستقيم الى قسمين فاربعة امثال القائم الزوايا مسطح كل الخط في احد القسمين مع مربع القسم الاخر يعدل مربع الخط المركب من الكل مع القسم الاول

ليُقسَم الخط المستقيم ا ج الى قسمين في س فاربعة امثال القائم الزوايا ا ج × ج س مع مربع ا س يعدل مربع الخط المركب من ا ج مع ج س



اخرج ا ج الى ذ واجعل ج ذ يعدل ج س وعلى ا ذ ارسم المربع ا ت ف ذ وارسم شكلين مثل ما في القضية السالفة. فمن حيث ان ب ى = س ج (ق٣٤ ك١) وس ج = ج ذ وج ذ = ن ى فلذلك ب ى = ن ى ولهذا السبب ايضاً ق د = د ر ولانّ س ج = ج ذ وب ى = ى ن فالقائما الزوايا س ى وج ن متساويان وكذلك ايضاً ب د = ى ر ولكن س ى = ى ر (ق٤٣ ك١) لانهما متمّا الشكل س ر فاذاً ج ن = ب د والقائمات الزوايا الاربع س ى ج ن ى ر ب د متساوية وهي معاً = ٤ س ى وايضاً لانّ س ج = ج ذ وج ذ = ج ى (فرع ق٤ ك٢) او س ب ولانّ س ج = ب ى او ب ق فلذلك س ب = ب ق ولانّ س ب = ب ق وق د = د ر فالقائم الزوايا ا ب = م ق وق ل = د ف ولكن م ق = ق ل (ق٤٣ ك١) لانهما متمّا م ل فاذاً ا ب = د ف فالاربع ا ب م ق ق ل د ف متساوية وهي معاً تعدل ٤ ا ب وقد تبرهن ان س ى ب د ج ن ى ر معاً = ٤ س ى فباضافة اشياءَ متساوية الى اشياءَ متساوية يكون كل العلم ا ر ح = ٤ ا ى وا ى = ا ج × ج ى = ا ج × ج س و٤ ا ى = ٤ ا ج × ج س فالعلم ا ر ح = ٤ ا ج × ج س. اضف الى الجانبين ك ح او ا س^2 (فرع ق٤ ك٢) فالعلم ا ر ح + ك ح = ٤ ا ج × ج س + ا س^2 ولكن ا ر ح + ك ح = ا ف = ا ذ^2 فاذاً ا د^2 = ٤ ا ج × ج س + ا س^2

فرعٌ اول. من حيث ان ا ذ هو مجتمع الخطين ا ج ج س وا س فضلتهما

فاربعة امثال القائم الزوايا مسطح خطّين مع مربع فضلتهما يعدل مربع مجتمع الخطّين

فرعٌ ثانٍ. بما انهُ قد تبرهن من هذه القضية ان مربع س ذ هو اربعة امثال مربّع س ج يتضح ان مربع خط هو اربعة امثال مربع نصفهِ

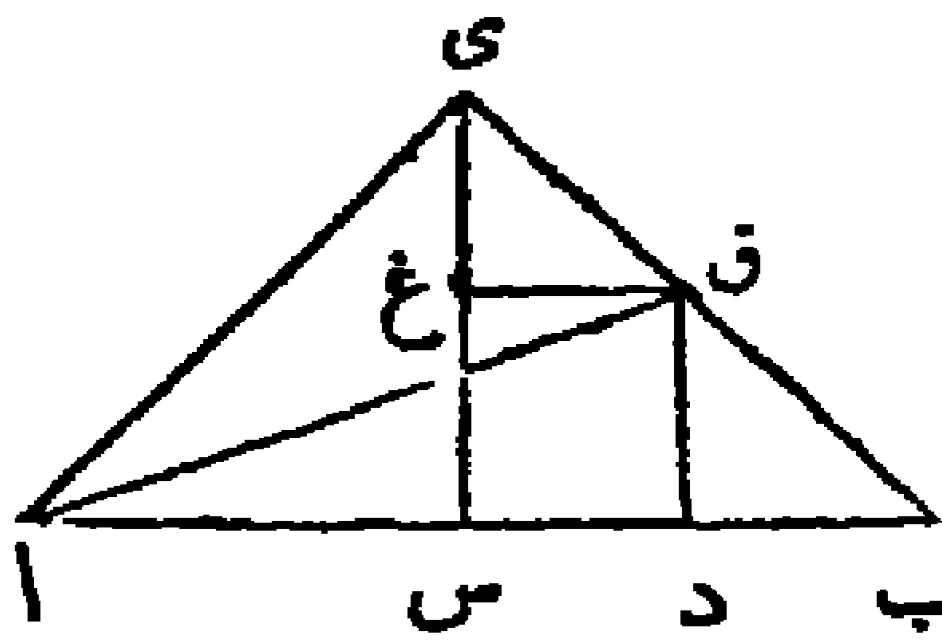
تعليقة. لنفرض ا ج = ا و ا س = س و س ج = ب و ا ذ = س + ٢ ب و ا = ب + س. اضرب الجانبين في ٤ ب فلنا ٤ ا ب = ٤ ب^2 + ٤ ب س اضف س^2 الى الجانبين فلنا ٤ ا ب + س^2 = س^2 + ٤ ب س + ٤ ب^2 اي

٤ ا ب + س^2 = (س + ٢ ب)^2

القضية التاسعة . ن

اذا انقسم خطٌّ مستقيم الى قسمين متماثلين وايضاً الى قسمين غير متماثلين فمربعا القسمين الغير المتماثلين معاً يعدلان مضاعف مربع نصف الخط مع مضاعف مربع الجزء الواقع بين نقطتي الانقسام

لِيُقسَم الخط المستقيم ا ب الى قسمين متماثلين في س وغير متماثلين في د فمربعا ا د د ب معاً يعدلان مضاعف مربعي ا س س د



من س ارسم س ى (ق ١١ ك ١) عموداً على ا ب واجعل س ى يعدل ا س او س ب. ارسم ا ى و ى ب ومن د ارسم د ق (ق ٣١ ك ١) حتى يوازي س ى. ومن ق ارسم ق غ حتى يوازي ا ب وارسم ا ق. فمن حيث ان ا س يعدل س ى فالزاوية ى ا س تعدل الزاوية ا ى س (ق ٥ ك ١) وهما معاً قائمة لان ا س ى قائمة (فرع ٤ ق ٣٢ ك ١) ولهذا السبب ايضاً كل واحدة من الزاويتين س ى ب س ب ى نصف قائمة. فالكل ا ى ب قائمة. ومن حيث ان غ ى ق نصف قائمة و ى غ ق قائمة لانها تعدل الداخلة المتقابلة ى س ب (ق ٢٩ ك ١) فالباقية ى ق غ تعدل نصف قائمة. فالزاوية غ ى ق تعدل ى ق غ والضلع ى غ يعدل الضلع غ ق (ق ٦ ك ١) وايضاً لانَّ الزاوية عند ب هي نصف قائمة و ق د ب قائمة لانها تعدل

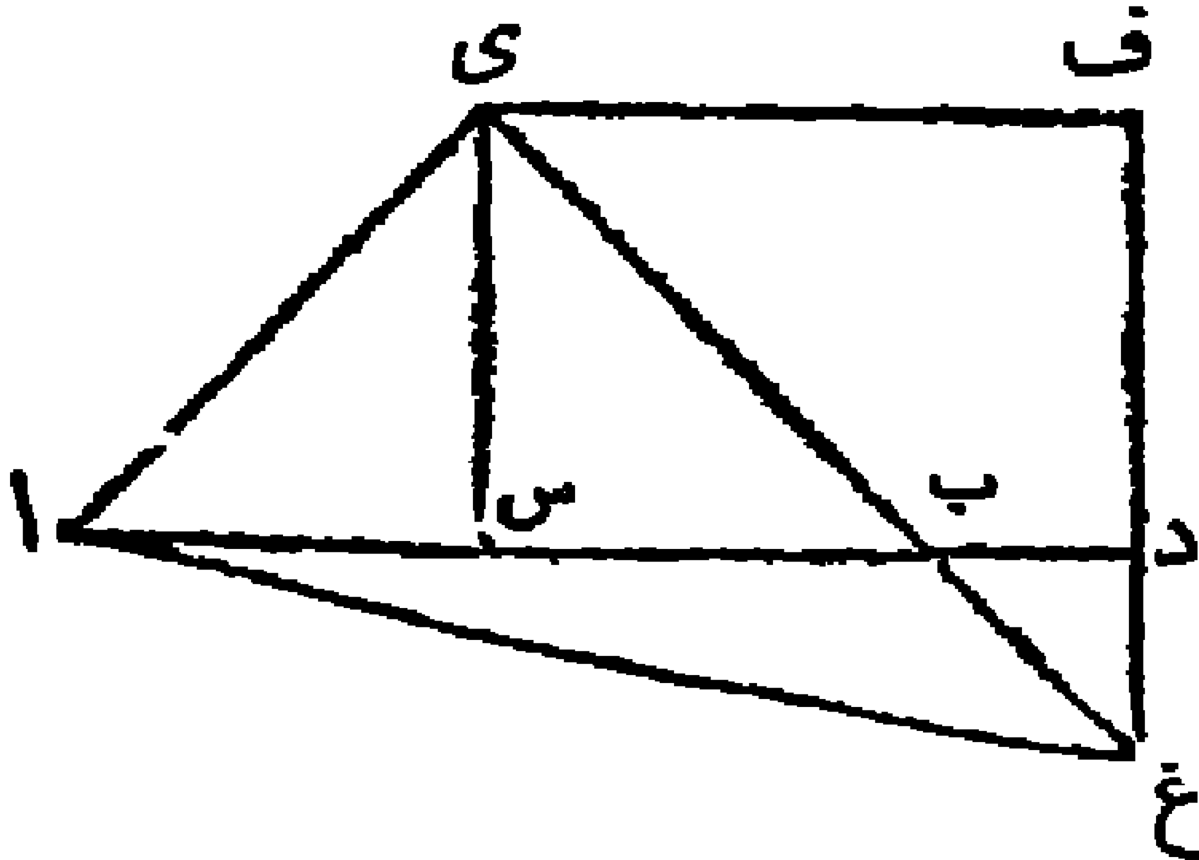
الداخلة المتقابلة ى س ب (ق٢٩ ك١) فالباقية د ق ب هي نصف قائمة . فالزاوية عند ب تعدل الزاوية د ق ب والضلع ق د يعدل الضلع د ب (ق٦ ك١) ولانّ ا س = س ى ا س^2 = س ى^2 وا س^2 + س ى^2 = ٢ ا س^2 ولكن (ق٤٧ ك١) ا ى^2 = ا س^2 + س ى^2 فاذاً ا ى^2 = ٢ ا س^2 . وايضاً لانّ ى غ = غ ق ى غ^2 = غ ق^2 وى غ^2 + غ ق^2 = ٢ غ ق^2 ولكن ى ق^2 = ى غ^2 + غ ق^2 فاذاً ى ق^2 = ٢ غ ق^2 = ٢ س د^2 لان س د = غ ق (ق٣٤ ك١) وقد تبرهن ان ا ى^2 = ٢ ا س^2 فاذاً ا ى^2 + ى ق^2 = ٢ ا س^2 + ٢ س د^2 ولكن (ق٤٧ ك١) ا ق^2 = ا ى^2 + ى ق^2 وا د^2 + د ق^2 = ا ق^2 اي ا د^2 + د ب^2 = ا ق^2 فاذاً ا د^2 + د ب^2 = ٢ ا س^2 + ٢ س د^2

تعليقة . هذه القضية واضحة من الجبر اذا فرضنا ا س = ا وس د = ب وا + ب = ا د وا − ب = د ب فلنا (ا + ب)^2 + (ا − ب)^2 = ٢ ا^2 + ٢ ب^2

القضية العاشرة . ن

اذا تنصّف خطٌّ مستقيم ثم أُخرِج الى نقطةٍ ما فمربع كل الخط بعد اخراجهِ ومربع الجزء الذي قد زيد اليهِ هما معاً مضاعف مربع نصف الخط الذي قد تنصّف مع مربع الخط المركب من النصف والجزء المزيد

ليتنصف الخط المستقيم ا ب في س وليخرج الى النقطة د فمربعا ا د د ب هما معاً مضاعف مربعي ا س س د



من س ارسم س ى عموداً على ا ب (ق١١ ك١) واجعل س ى يعدل ا س او س ب ارسم ا ى وى ب ومن ى ارسم ى ف (ق٣١ ك١) حتى يوازي ا ب ومن د ارسم د ف حتى يوازي ى س . فلانّ ى ف يلاقي المتوازيين ى س ف د فالزاويتان س ى ف ى ف د هما معاً قائمتان (ق٢٩ ك١) فتكون ب ى ف ى ف د معاً اقل من قائمتين ولا بد من التقاء ى ب وف د اذا أُخرِجا (ق٢٩ ك١) لنفرض التقاءهما في غ ولرسم ا غ فلانّ ا س = س ى فالزاوية س ى ا

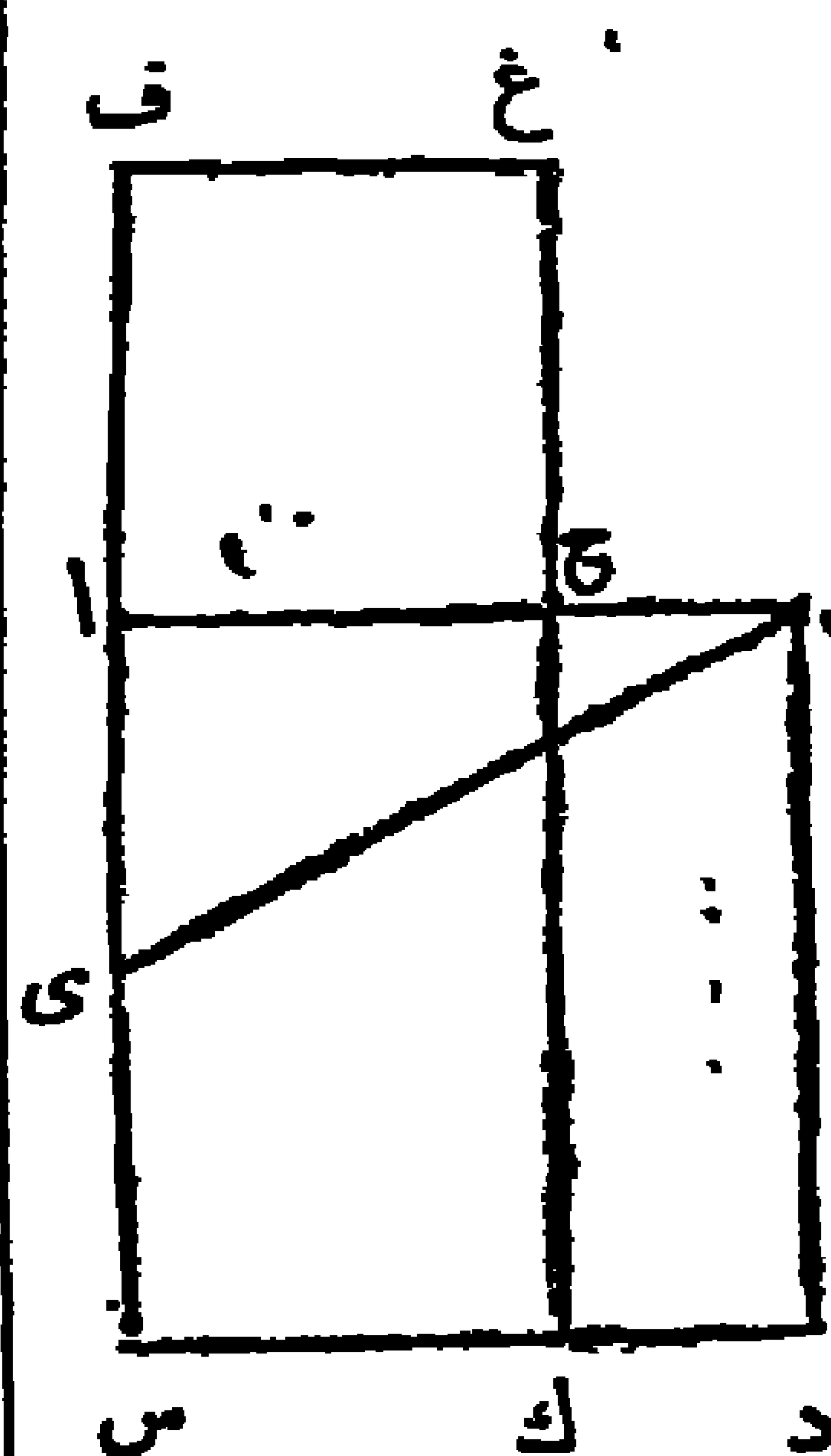
=ى ا س (ق٥ ك ا) وا س ى قائمة فكل واحدة من س ا ى س ى ا هي نصف قائمة (ق ٣٢ ك ا فرع ٤) ولهذا السبب كل واحدة من س ى ب س ب ى ايضًا نصف قائمة فتكون ا ى ب قائمة. ومن حيث ان ى ب س نصف قائمة فالزاوية د ب غ ايضًا نصف قائمة (ق ١٥ ك ا) لانهما متقابلتان وب د غ قائمة لانها تعدل المتبادلة د س ى (ق ٢٩ ك ا) فالباقية د غ ب نصف قائمة وتعدل د ب غ فالضلع ب د يعدل الضلع د غ (ق ٦ ك ا) ومن حيث ان ى غ ف نصف قائمة والزاوية عند ف قائمة لانها تعدل المتقابلة ى س د (ق ٣٤ ك ا) فالباقية ف ى غ نصف قائمة وتعدل ى غ ف فالضلع ف ى يعدل الضلع ف غ (ق ٦ ك ا) ولانّ ى س يعدل س ا ى س^{٢}=س ا^{٢} وى س^{٢}+ س ا^{٢}= ٢ س ا^{٢} وا ى^{٢}=ا س^{٢}+س ى^{٢} (ق ٤٧ ك ا) فاذًا ا ى^{٢} = ٢ا س^{٢} ولان ى ف = ف غ ى ف^{٢} = ف غ^{٢} وى ف^{٢} +ف غ^{٢}= ٢ ى ف^{٢} = ى غ^{٢} (ق ٤٧ ك ا) وى ف = س د فاذًا ى غ^{٢}= ٢ س د^{٢} وقد تبرهن ان ا ى^{٢} = ٢ ا س^{٢} فاذًا ا ى^{٢}+ى غ^{٢}= ٢ ا س^{٢} + ٢ س د^{٢} وا غ^{٢}=ا ى^{٢} +ى غ^{٢} (ق ٤٧ ك ا) فاذًا ا غ^{٢}= ٢ ا س^{٢} + ٢ س د^{٢} وا غ^{٢}=ا د^{٢}+د غ^{٢} (ق ٤٧ ك ا)=ا د^{٢}+د ب^{٢} فاذًا ا د^{٢}+د ب^{٢}= ٢ ا س^{٢}+ ٢ س د^{٢}

تعليقة. اذا فرضنا ان ا س = ا وب د = ب وا د = ٢ ا + ب وس د = ا + ب فلنا (٢ ا + ب)^{٢} + ب^{٢} = ٤ ا^{٢} + ٤ ا ب + ٢ ب^{٢} ولكن ٤ ا^{٢} + ٤ ا ب + ٢ ب^{٢} = ٢ ا^{٢} + ٢ (ا + ب)^{٢} فاذًا (٢ ا + ب)^{٢} + ب^{٢} = ٢ ا^{٢} + ٢ (ا + ب)^{٢}

القضية الحادية عشرة. ع

علينا ان نقسم خطًّا مستقيمًا مفروضًا الى قسمين حتى يعدل القائمُ الزوايا مسطحُ الكل في احد القسمين مربعَ القسم الآخر

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروضَ فعلينا ان نقسمهُ الى قسمين حتى يعدل القائمُ الزوايا مسطحُ ا ب في احد قسميهِ مربعَ القسم الآخر. ارسم على ا ب المربع ا ب د س (ق ٤٦ ك ا) ونَصِّفْ ا س في ى (ق ١٠ ك ا) ارسم ب ى واخرج س ا الى ف واجعل ى ف حتى يعدل ى ب (ق ٣ ك ا) وعلى ا ف ارسم المربع ف غ ح ا



(ق٤٦ ك١) فقد انقسم ا ب في ح حتى يعدل القائم الزوايا ا ب×ب ح مربع ا ح

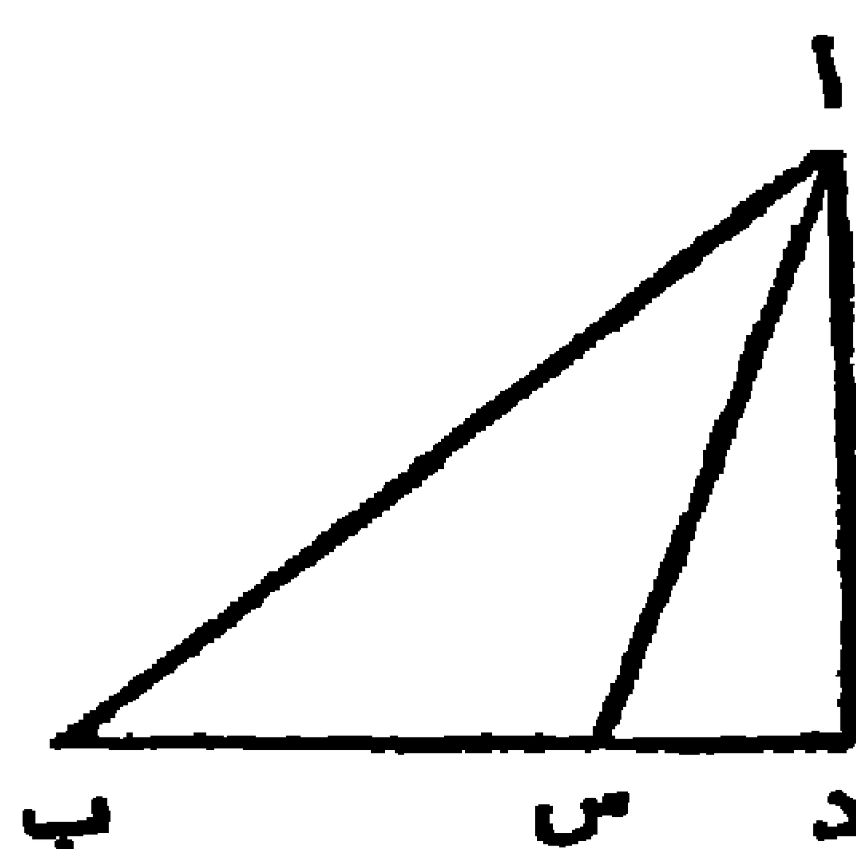
أخرج غ ح الى ك. فمن حيث ان ا س قد تنصف في ی ثم أخرج الى ف فالقائم الزوايا س ف × ف ا مع مربع ا ی يعدل مربع ی ف (ق٦ ك٢) ولكن ی ف يعدل ی ب فالقائم الزوايا س ف×ف ا مع مربع ا ی يعدل مربع ی ب ولكن مربع ی ب يعدل مربع ب ا مع مربع ا ی (ق٤٧ ك١) لانّ ب ا ی قائمة فالقائم الزوايا س ف×ف ا مع مربع ای يعدل مربع ب ا مع مربع ا ی. اطرح المشترك مربع ا ی فالباقي القائم الزوايا س ف×ف ا يعدل مربع ا ب وس ف×ف ا يعدل الشكل ف ك لانّ ف ا = ف غ وا د يعدل مربع ا ب فالشكل ف ك يعدل ا د اطرح الجزء المشترك ا ك فالباقي ف ح يعدل الباقي ح د ولكن ح د = ا ب×ب ح لأنّ ا ب = ب د وف ح هو مربع ا ح فالقائم الزوايا ا ب × ب ح يعدل مربع ا ح فقد انقسم ا ب الى قسمين في ح والقائم الزوايا ا ب×ب ح يعدل مربع ا ح

القضية الثانية عشرة . ن

في كل مثلثٍ ذي زاوية منفرجة اذا رُسِم عمودٌ من احدى الحادّتين على الضلع المقابل بعد اخراجهِ فمربع الضلع الذي يقابل المنفرجة هو اكبر من مربعَي المحيطَين بالمنفرجة بمضاعف القائم الزوايا مسطَّحَ الضلع الذي وقع عليهِ العمود في الجزء المزيد اي الواقع بين المنفرجة والعمود

ليكن ا ب س مثلثًا ذا زاوية منفرجة ا س ب وليقع عمود من ا الى ا د على

ب س بعد اخراجهِ الى د (ق ١٢ ك ١) فمربع ا ب هو اكبر من مربعَي ا س و س ب بمضاعف القائم الزوايا ب س × س د

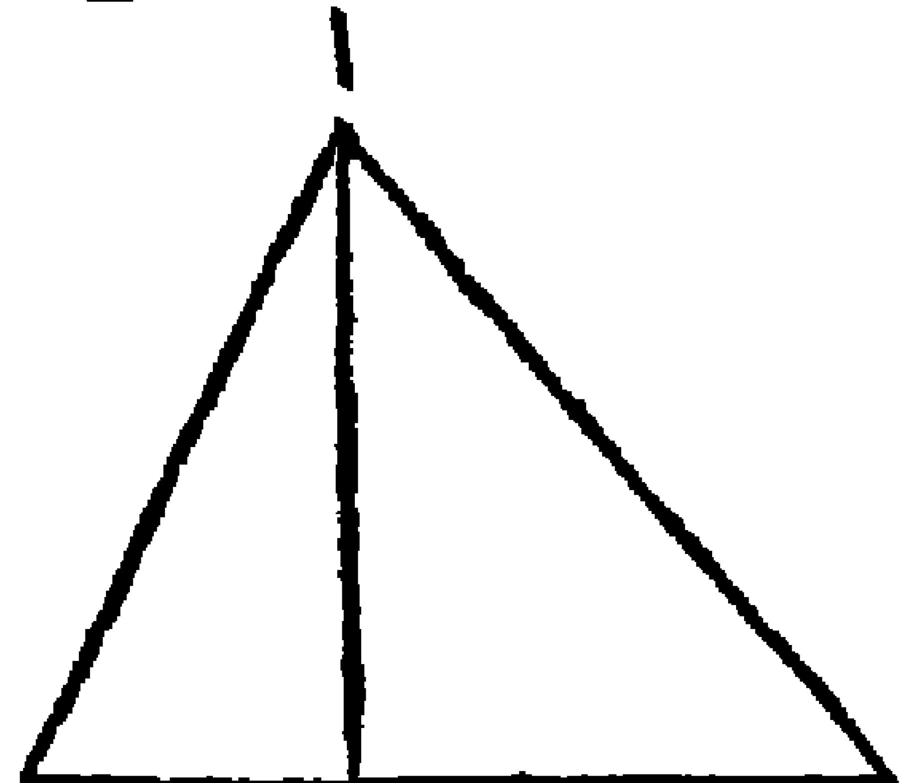


فمن حيث ان ب د قد انقسم الى قسمين في س فلنا (ق ٤ ك ٢) ب د^2 = ب س^2 + س د^2 + ٢ ب س × س د اضف ا د^2 الى الجانبين فلنا ب د^2 + ا د^2 = ب س^2 + س د^2 + ا د^2 + ٢ ب س × س د ولكن ا ب^2 = ب د^2 + ا د^2 (ق ٤٧ ك ١) وا س^2 = س د^2 + ا د^2 فاذًا ا ب^2 = ب س^2 + ا س^2 + ٢ ب س × س د اي ا ب^2 هو اكبر من ب س^2 + ا س^2 بسطح ٢ ب س × س د

القضية الثالثة عشرة . ن

في كل مثلثٍ مربعُ الضلع المقابل احدى الزوايا الحادَّة هو اصغر من مربعي الضلعين المحيطين بها بمضاعف القائم الزوايا مسطح احد هذَين الضلعين في الجزء منهُ الواقع بين الزاوية الحادَّة وعمودٍ عليهِ من الزاوية المقابلة

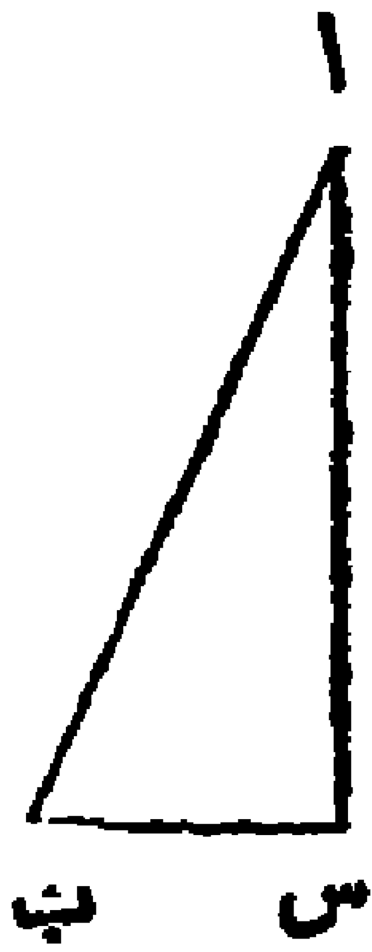
ليكن ا ب س مثلثًا ولتكن الزاوية عند ب احدى زواياهُ الحادَّة وليقع على الضلع ب س منهُ عمودٌ ا د من الزاوية المقابلة (ق ١٢ ك ١) فمربع الضلع ا س الذي يقابل الزاوية عند ب هو اصغر من مربعي س ب ب ا بمضاعف القائم الزوايا س ب × ب د



اولًا ليقع العمود ا د داخل المثلث ا ب س فلأَنَّ الخط المستقيم س ب قد انقسم في د فلنا (ق ٧ ك ٢) ب س^2 + ب د^2 = ٢ ب س × ب د + س د^2 اضف الى الجانبين ا د^2 فلنا ب س^2 + ب د^2 + ا د^2 = ٢ ب س × ب د + س د^2 + ا د^2 ولكن ب د^2 + ا د^2 = ا ب^2 وس د^2 + د ا^2 = ا س^2 (ق ٤٧ ك ١) فاذًا ب س^2 + ا ب^2 = ٢ ب س × ب د + ا س^2 اي ا س^2 هو

اصغر من ب س^{٢}+ا ب^{٢} بسطح ٢ ب س×ب د

ثانيًا ليقع العمود ا د خارج المثلث ا ب س (انظر شكل القضية السابقة) فمن حيث ان الزاوية عند د هي قائمة فالزاوية ا س ب هي اكبر من قائمة (ق ١٦ ك ١) ط ب^{٢}=(ق ١٢ ك ٢) ا س^{٢}+ب س^{٢}+٢ ب س×س د اضف الى الجانبين ب س^{٢} فلنا ا ب^{٢}+ب س^{٢}=ا س^{٢}+٢ ب س^{٢}+٢ ب س×س د ومن حيث ان الخط ب د قد انقسم في س فلنا (ق ٣ ك ٢) ب س^{٢}+ب س×س د=ب س×ب د و ٢ ب س^{٢}+٢ ب س×س د=٢ ب س×ب د فاذًا ا ب^{٢}+ب س^{٢}=ا س^{٢} +٢ ب س×ب د وا س^{٢} هو اصغر من ا ب^{٢}+ب س^{٢} بسطح ٢ ب د×ب س

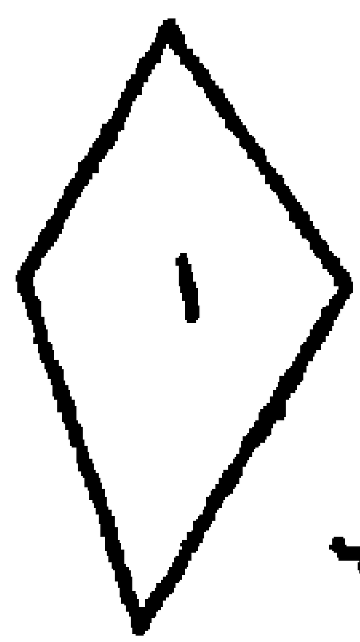


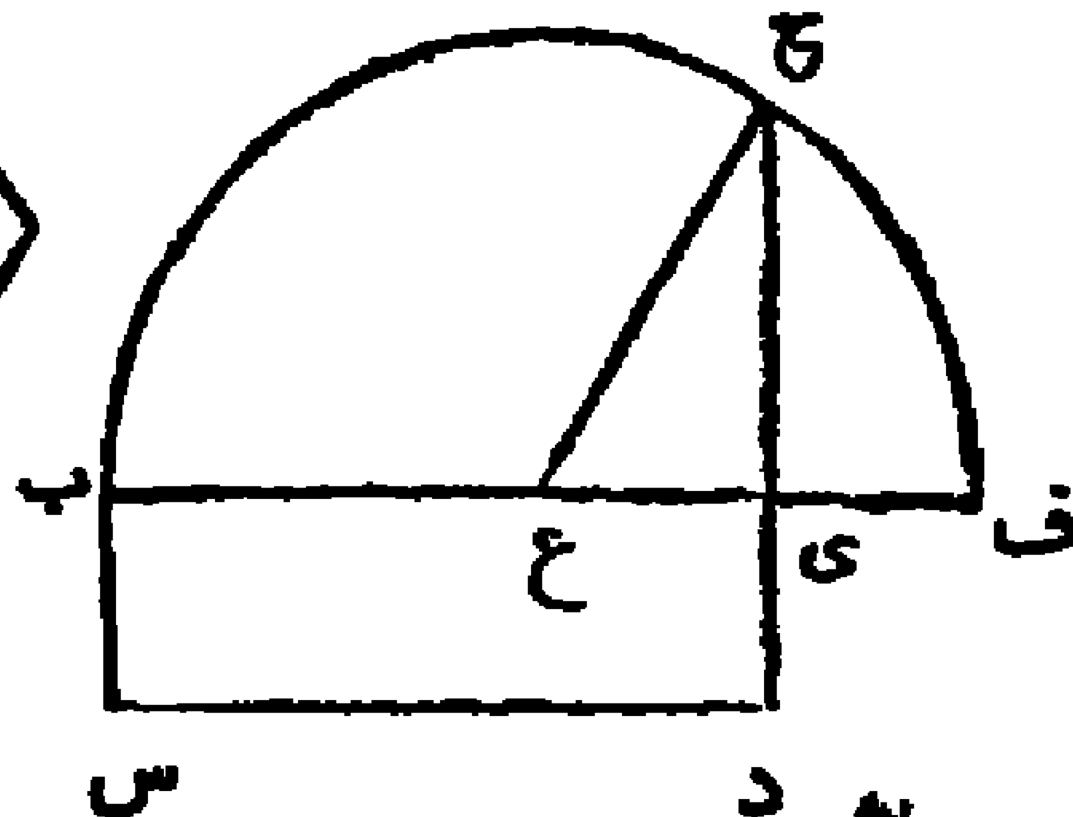
ثالثًا ليكن الضلع ا س عمودًا على ب س فيكون ب س الجزء بين العمود والزاوية الحادّة عند ب والامر واضح (ق ٤٧ ك ١) ان ا ب^{٢}+ب س^{٢}=ا س^{٢}+٢ ب س^{٢}=ا س^{٢}+٢ ب س ×ب س

القضية الرابعة عشرة . ع

علينا ان نرسم مربعًا يعدل شكلًا مفروضًا ذا اضلاعٍ مستقيمة

ليكن ا الشكل المفروض. علينا ان نرسم مربعًا يعدل الشكل ا. ارسم شكلًا ذا زوايا قائمة ب ى د س واجعلهُ يعدل ا (ق ٤٥ ك ١) فان كان ضلعاهُ ب ى ى د متساويين فهو المربع المطلوب والّا فاخرج ب ى الى ف واجعل ى ف يعدل ى د ونَصِّفْ ب ف في





غ ومن المركز غ وعلى البعد غ ف او غ ب ارسم دائرة ب ج ف واخرج د ى الى ح وارسم ح غ فلانّ الخط المستقيم ب ف قد انقسم الى قسمين متساويين في غ وغير متساويين في ى فالقائم الزوايا ب ى×ى ف مع مربع ى غ يعدل مربع غ ف

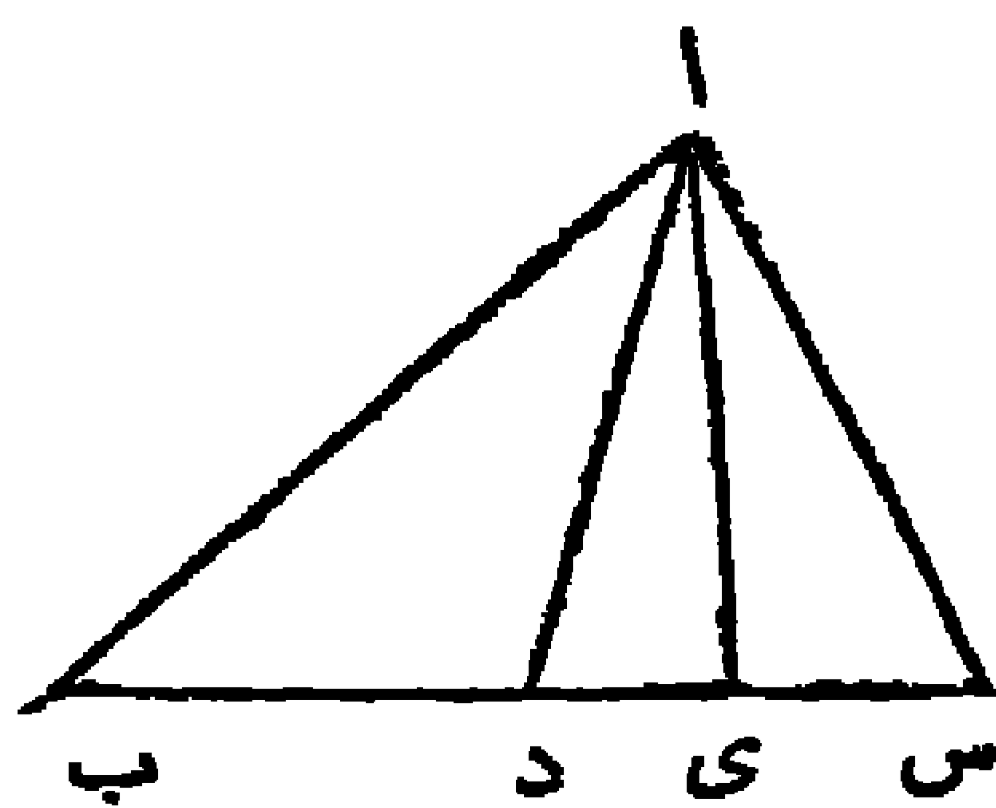
(ق٥ ك٢) وغ ف يعدل غ ح فالقائم الزوايا ب ى×ى ف مع مربع ى غ يعدل مربع غ ح ومربع غ ح يعدل مربع ح ى مع مربع ى غ (ق٤٧ ك١) فالقائم الزوايا ب ى×ى ف مع مربع غ ى يعدل مربع ح ى مع مربع ى غ اطرح المشترك مربع ى غ فالباقي القائم الزوايا ب ى×ى ف يعدل مربع ح ى وب د يعدل ب ى× ى ف لان ى د=ى ف فالشكل ب د يعدّل مربع ح ى وب د يعدل الشكل ا فمربع ح ى يعدل الشكل ا فاذا رُسم على ح ى مربعٌ فهو يعدل الشكل ا المفروض

مضافات

قضية ١٠ن

اذا تنصَّف ضلعٌ من اضلاع مثلثٍ فمجتمع مربّعَي الضلعين الآخرين يعدل مضاعف مربع نصف الضلع المتنصف مع مضاعف مربع الخط المرسوم من نقطة الانتصاف الى الزاوية المقابلة

ليكن ا ب س مثلثًا ولينتصف الضلع ب س منهُ في د وارسم د ا الى الزاوية المقابلة فمجتمع مربعي ب ا ا س يعدل مضاعف مربّعي ب د د ا

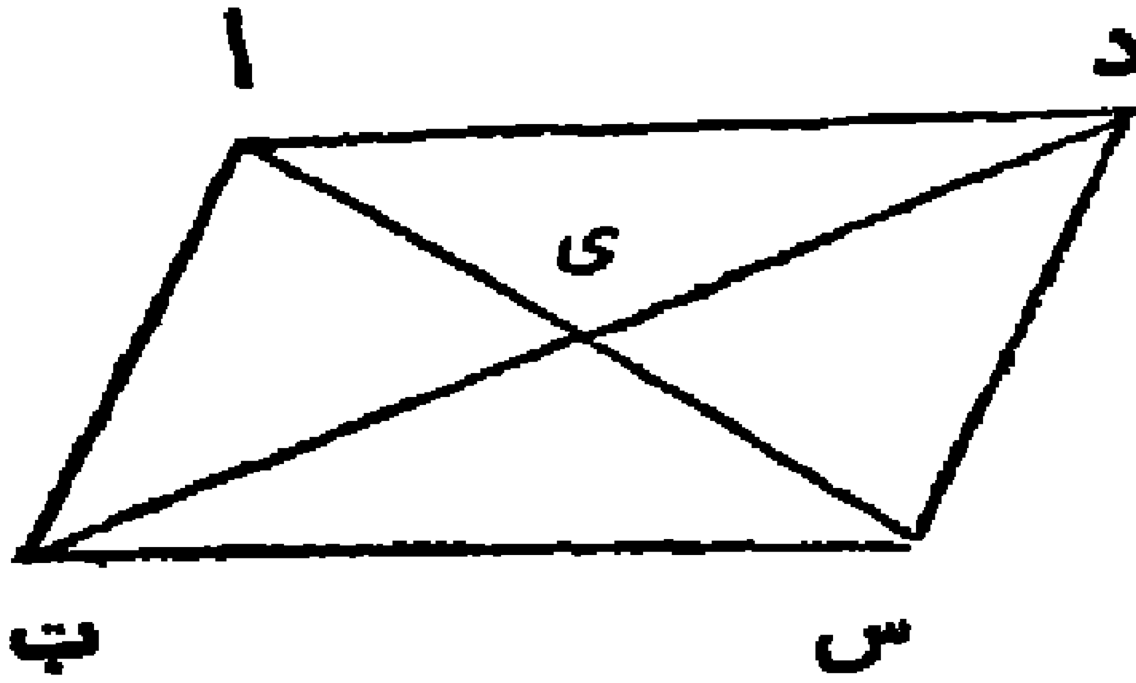


من ا ارسم ا ى عمودًا على ب س فمن حيث ان ب ى ا قائمة ا ب٢ (ق٤٧ ك١) = ب ى٢ + ى ا٢ وا س٢ = س ى٢ + ى ا٢ وا ب٢ + ا س٢ = ب ى٢ + س ى٢ + ٢ ا ى٢ ومن حيث ان الخط المستقيم ب س قد انقسم الى قسمين متساويين في د وغير متساويين في ى فلنا (ق٩ ك٢) ب ى٢ + س ى٢ = ٢ ب د٢ + ٢ د ى٢ فاذًا ا ب٢ + ا س٢ = ٢ ب د٢ + ٢ د ى٢ + ٢ ا ى٢. ولكن د ى٢ + ا ى٢ = ا د٢ (ق٤٧ ك١) و٢ د ى٢ + ٢ ا ى٢ = ٢ ا د٢ فاذًا ا ب٢ + ا س٢ = ٢ ب د٢ + ٢ ا د٢

قضية ب ن

في كل شكل ذي اضلاع متوازية مجتمع مربّعَي القطرين يعدل مجتمع مربعات الاضلاع

ليكن ا ب س د شكلاً متوازيَ الاضلاع فمجتمع مربعي القطرين ا س ب د يعدل مجتمع مربعات الاضلاع اب ب س س د د ا



لتكن النقطة ى موضع تقاطع القطرين. فمن حيث ان الزاويتين المتقابلتين ا ى د س ى ب هما متساويتان (ق١٥ ك١) والمتبادلتان ى ا د ى س ب متساويتان ايضاً (ق٢٩ ك١) فلنا في المثلثين ا د ى س ى ب زاويتان من الواحد تعدلان زاويتين من الآخر والضلعان اللذان يقابلان الزاويتين المتساويتين متساويان اي ا د و ب س (ق٢٤ ك١) فالضلعان الآخران متساويان (ق٢٦ ك١) اي ا ى = ى س و ى د = ى ب

فمن حيث ان ب د قد تنصف في ى لنا (ق١ ك٢) ا ب^{٢} + ا د^{٢} = ٢ ب ى^{٢} + ٢ ى ا^{٢} وهكذا ايضاً د س^{٢} + س ب^{٢} = ٢ ب ى^{٢} + ٢ ى س^{٢} = ٢ ب ى^{٢} + ٢ ا ى^{٢} لانّ ى س = ا ى فاذاً ا ب^{٢} + ا د^{٢} + د س^{٢} + س ب^{٢} = ٤ ب ى^{٢} + ٤ ا ى^{٢} و ٤ ب ى^{٢} = ب د^{٢} و ٤ ا ى^{٢} = ا س^{٢} (فرع ٢ ق٨ ك٢) لانّ ب د و ا س قد تنصفا في ى فاذاً ا ب^{٢} + ا د^{٢} + د س^{٢} + س ب^{٢} = ب د^{٢} + ا س^{٢}

فرعٌ. في كل شكل متوازي الاضلاع احد القطرين ينصّف الآخر

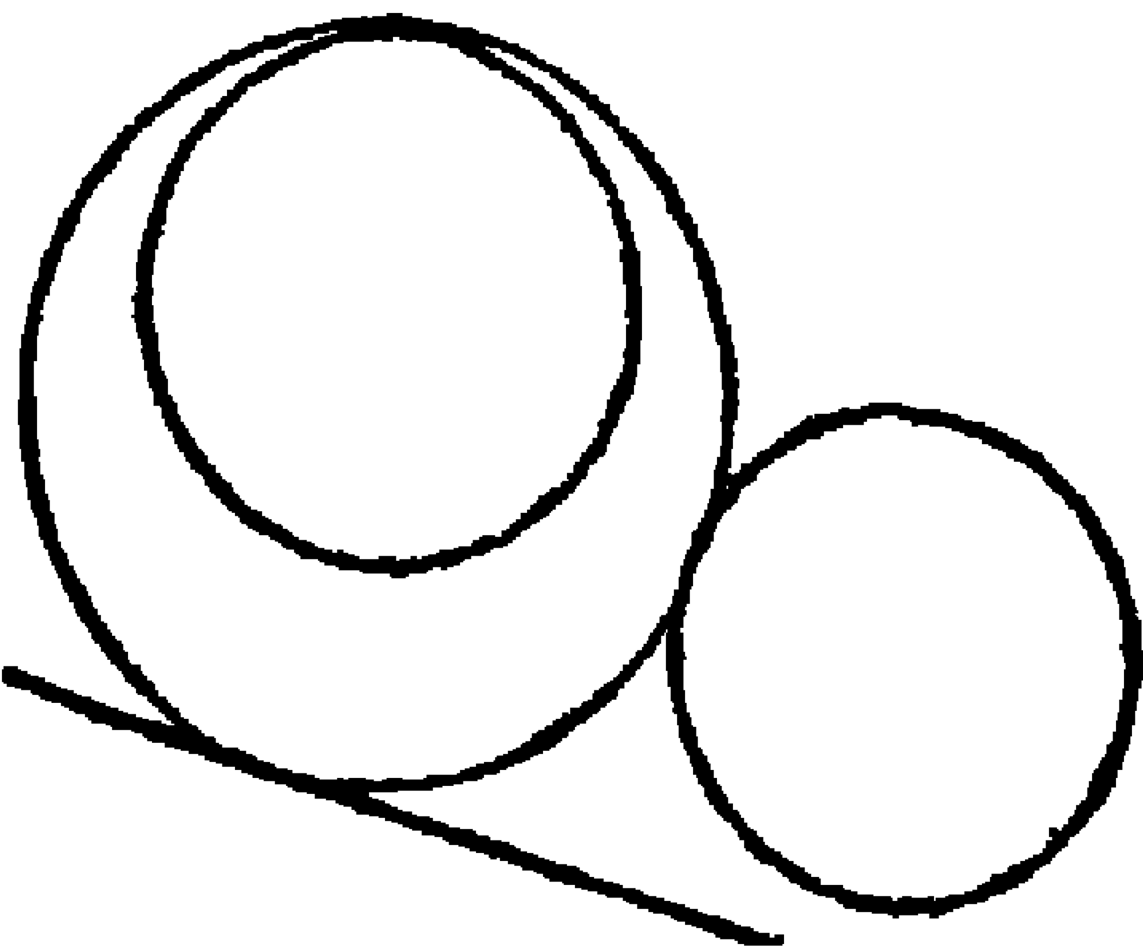
تعليقة. لو كان الشكل معيّناً لكان ا ب ب س متساويين والمثلثان ب ى س د ى س متساويين ايضاً لانّ اضلاع الواحد تعدل اضلاع الآخر اي كل ضلع في الواحد يعدل نظيرهُ في الآخر وكانت الزاويتان ب ى س د ى س متساويتين. ففي شكل معيّن كل واحد من القطرين هو عمودٌ على الآخر

اصول الهندسة

الكتاب الثالث

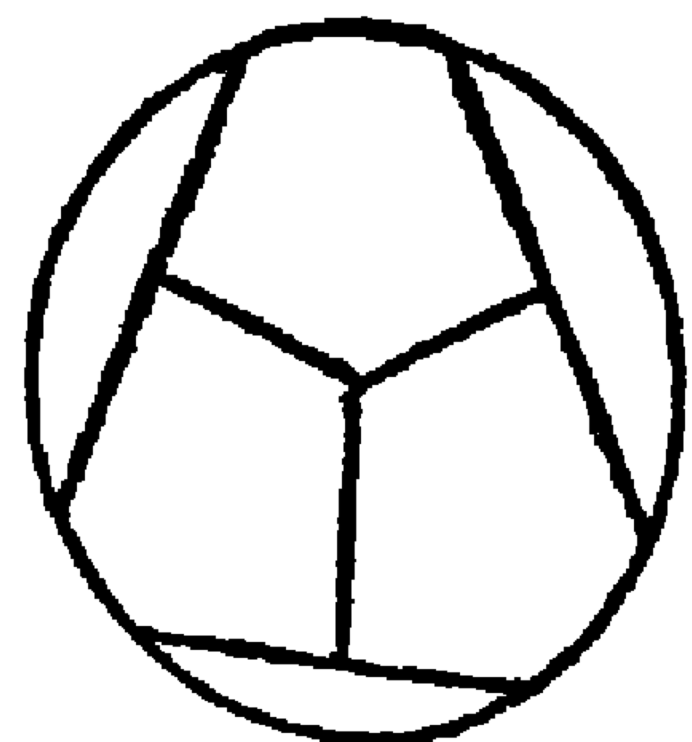
حدود

١. نصف قطر دائرة هو خط مستقيم مرسوم من المركز الى المحيط



٢. مماسّ دائرةٍ هو خط مستقيم يلاقي المحيط في نقطة واحدة واذا أُخرج فلا يقطعها. وتلك النقطة تسمى نقطة المماسّة

٣. اذا التقى محيطا دائرتين بدون ان يتقاطعا يقال ان الدائرة الواحدة تمسّ الاخرى



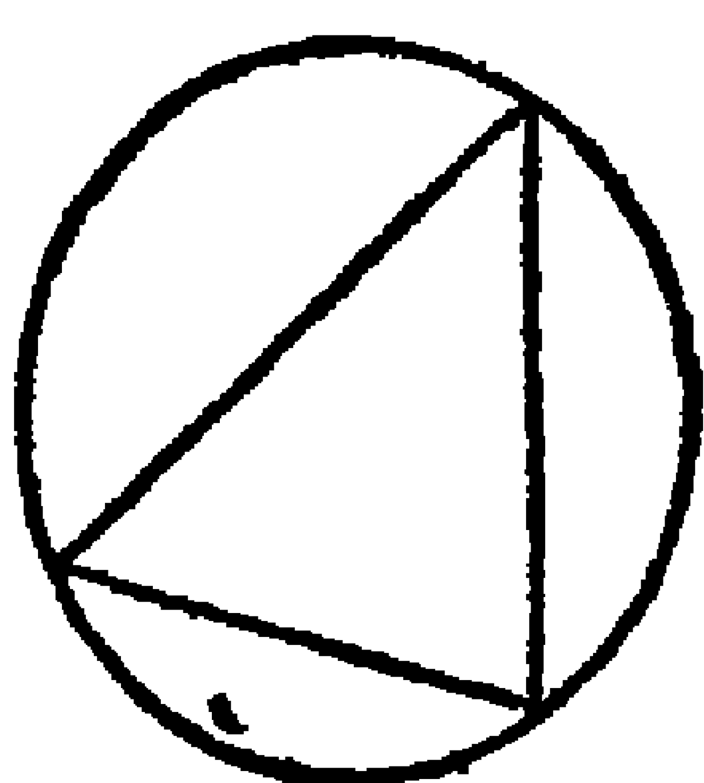
٤. خطوط مستقيمة على بُعدٍ واحدٍ من مركز دائرة هي التي كانت العموديَّات منها الى المركز متساوية

٥. والخط المستقيم الذي يقع عليهِ العمود الاطول هو الابعد عن المركز



٦. القوس هو جزء من محيط دائرة. والخط المستقيم الموصل بين طرفَي قوسٍ يسمى وَتَرًا

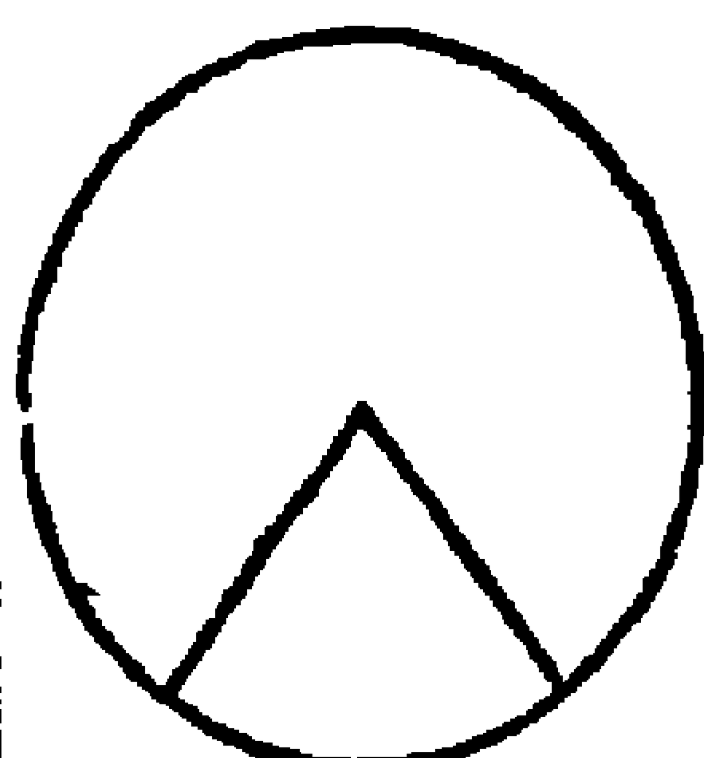
٧. متى كان طرفا خطٍ مستقيم في محيط دائرة قيل انهُ مرسوم في الدائرة



وكل خط مستقيم يلاقي المحيط في نقطتين يسمى قاطعًا

٥. كل جزء من دائرة يحيط بهِ قوسٌ ووترةٌ يسمى قِطْعَةً

٦. زاويةٌ في قِطْعَةٍ هي الحادثة بين خطين مستقيمين مرسومين من اية نقطة كانت من القوس الى طرفَي الوتر. ومثلثٌ في دائرة هو ما كانت زواياهُ الثلاث في المحيط. وعلى الاطلاق كل شكل في دائرة هو ما كانت زواياهُ في المحيط. ويقال ان الدائرة تحيط بهِ



٧. الزاوية عند المركز هي التي يحيط بها خطان مستقيمان من المركز الى المحيط

٨. قِطاع دائرة هو الشكل الذي يحيط بهِ خطان مستقيمان من المركز الى المحيط والقوسُ الواقع بين طرفيهما

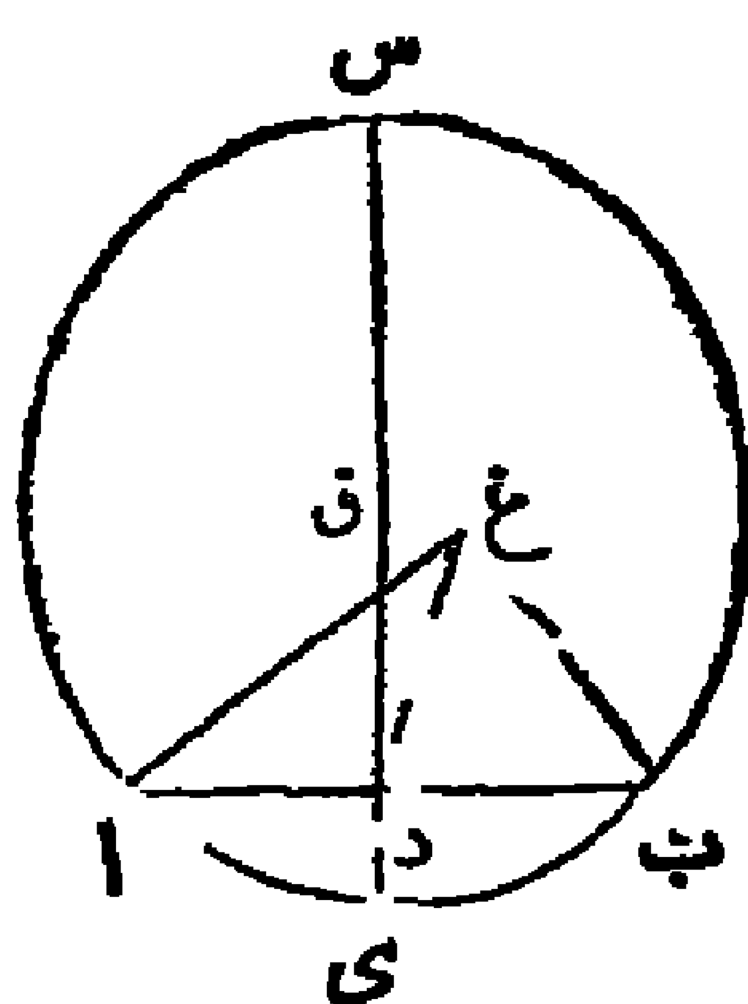


٩. القِطَع المتشابهة هي ما كانت الزوايا الحادثة فيها متساوية

القضية الاولى. ع

علينا ان نجد مركز دائرة مفروضة

لتكن ا ب س الدائرة المفروضة. علينا ان نجد مركزها



ارسم فيها خطًّا مستقيمًا مثل ا ب ونَصِّفْهُ في د (ق ١٠ ك ١) ارسم د س عمودًا على ا ب (ق ١١ ك ١) واخرجهُ الى ى ونَصِّفْ س ى في ق فتكون النقطة ق مركز الدائرة ا ب س

والاَّ فلتكن النقطة غ مركزها ولنرسم غ ا غ د غ ب. فمن حيث ان د ا = د ب ود غ مشترك بين المثلثين غ د ا غ د ب فالضلعان ا د د غ يعدلان الضلعين ب د د غ اي كل

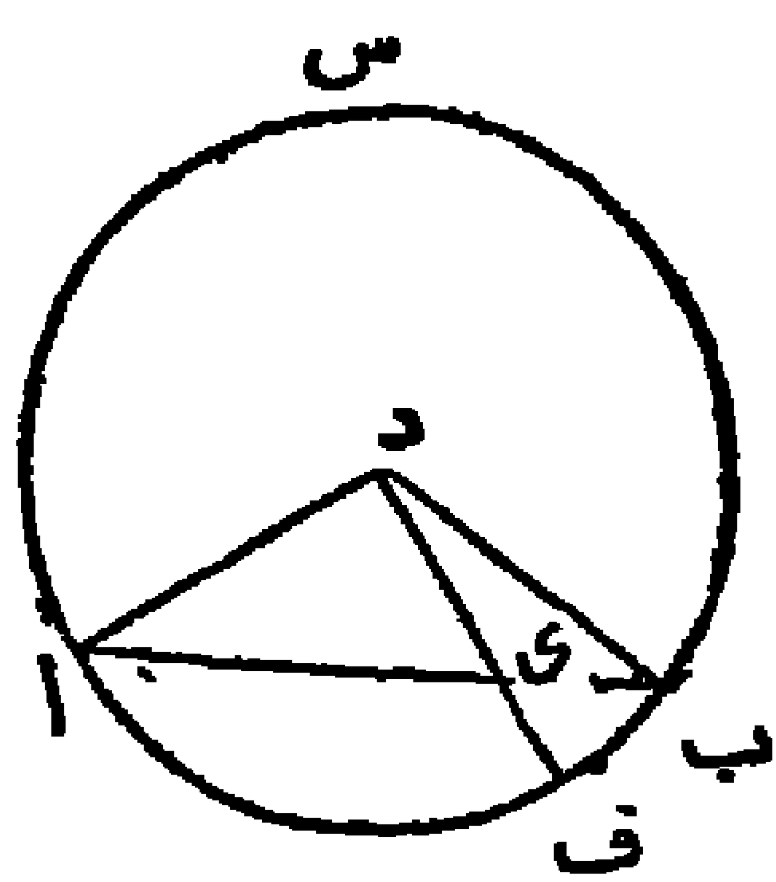
واحد يعدل نظيرهُ والقاعدة غ ا تعدل القاعدة غ ب لان كل واحدة منها نصف قطر من دايرة واحدة فالزاوية ا د غ = غ د ب (ق٨ ك١) فتكون كل واحدة منها قائمة (حد٧ ك١) فاذاً غ د ب قائمة ولكن ق د ب قائمة فاذاً غ د ب = ق د ب اي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فلا تكون النقطة غ مركز الدايرة وهكذا يبرهن في كل نقطة ما عدا النقطة ق فهي اذاً مركز الدائرة ا ب س

فرع. يتضح من هذه القضية انهُ اذا كان خطٌ عموديًا على اخر في دايرة ونصَّفهُ فالمركز في الخط المُنصِّف

القضية الثانية. ن

اذا فُرِضَتْ نقطتان في محيط دائرة فالخط المستقيم الموصل بينهما واقعٌ داخل الدائرة

لتكن ا ب س دايرةً ولتُفرَض في محيطها نقطتان مثل ا وب وليوصل بينهما بالخط المستقيم ا ب فهو داخل الدايرة



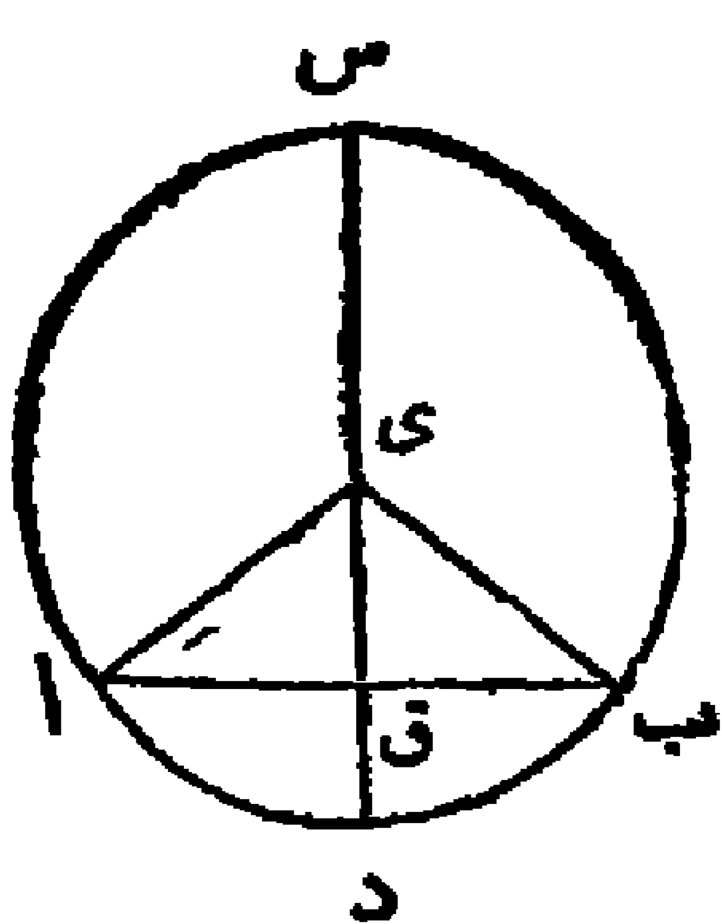
في الخط ا ب افرض اية نقطة كانت مثل ى واستعلم د مركز الدائرة ا ب س (ق١ ك٣) وارسم الخطوط المستقيمة ا د د ب د ى واخرج د ى حتى يلاقي المحيط في ف فمن حيث ان د ا = د ب فالزاوية د ا ب = الزاوية د ب ا (ق٥ ك١) ومن حيث ان ا ى ضلع من المثلث د ى ا وقد أُخرج الى ب فالزاوية الخارجة د ى ب هي اكبر من د ا ى (ق١٦ ك١) فهي اكبر من د ب ا ايضًا او د ب ى والزاوية الكبرى يقابلها الضلع الاطول (ق١٩ ك١) فاذًا د ب هو اطول من د ى ولكن د ب = د ف فاذًا د ف هو اطول من د ى اي النقطة ى هي داخل الدايرة وهكذا يبرهن في كل نقطة في الخط ا ب فهو اذًا داخل الدائرة

فرع. كل نقطة في ما يزاد على ا ب خارج الدائرة

القضية الثالثة · ن

كل خطّ مستقيم مارّ بمركز دائرة اذا نصّف خطًّا آخر مستقيمًا داخل الدائرة غير مارّ بالمركز فانهُ يُحدِث معهُ قائمتين . واذا احدث معهُ قائمتين ينصّفهُ

لتكن ا ب س دائرة وس د خطًّا مستقيمًا مارًّا بمركزها ولينصّف الخط المستقيم ا ب الذي لا يمرّ بالمركز في النقطة ق فانهُ يُحدِث معهُ قائمتين



استعلم مركز الدائرة ى (ق ا ك ٣) وارسم ا ى ب ى فمن حيث ان ا ق = ق ب وى ق مشترك بين المثلثين ا ق ى ب ق ى فضلعان من الواحد يعدلان ضلعين من الاخر والقاعدة ا ى تعدل القاعدة ى ب والزاوية ا ق ى تعدل الزاوية ب ق ى (ق ٨ ك ١) فكل واحدة منها قائمة (حد ٧ ك ١) فالخط المستقيم د س الذي يمرّ بمركز الدائرة والذي ينصّف الغير المارّ بالمركز ا ب يحدث معهُ قائمتين

ثم لنفرض ان الخط المستقيم س د يحدث مع ا ب قائمتين فهو ينصفهُ ايضًا اي ا ق يعدل ق ب . تمّم الشكل حسبما تقدم فمن حيث ان ا ى يعدل ى ب فالزاوية ى ا ق تعدل ى ب ق (ق ٥ ك ١) والقائمة ا ق ى تعدل القائمة ب ق ى والضلع ى ق مشترك بين المثلثين ا ق ى ب ق ى وهو يقابل الزاويتين المتساويتين (ق ٢٦ ك ١) فالمثلثان متساويان والضلع الباقي من الواحد يعدل الباقي من الاخر اي ا ق = ق ب

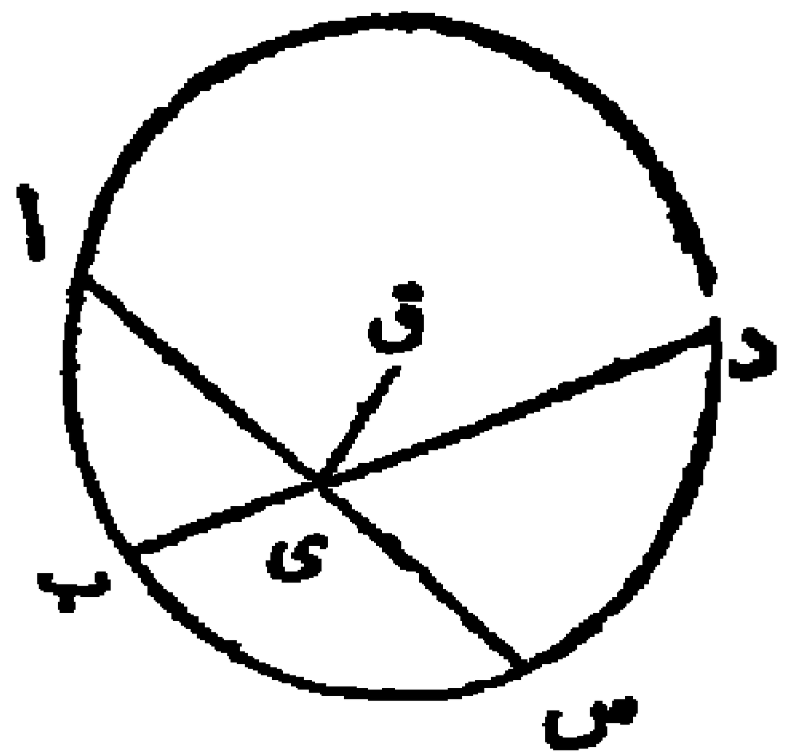
فرع اول . العمود على نصف الوتر يمرّ بالمركز

فرع ثانٍ . العمود على نصف الوتر اذا أُخرج حتى يلاقي المحيط من طرفيهِ فهو قطر . ونقطة انتصافهِ هي مركز الدائرة

القضية الرابعة . ن

اذا تقاطع خطان مستقيمان في دائرة ولا يمرّان بالمركز فلا ينصفان معاً

لتكن ا ب س د دائرة وا س ب د خطّين مستقيمين فيها يتقاطعان في النقطة ى ولكن لا يمرّان بالمركز فلا ينصف بعضهما بعضاً والاّ فاذا كان يمكن ليكن ا ى ى س متساويين وب ى ى د كذلك . فان مرّ احدهما بالمركز فالامر واضح انهُ لا ينصّف بالاخر الذي لا يمر بالمركز . وان لم يمرّ احدهما بالمركز فاستعلم المركز ق (ق ا ك ٣) وارسم ق ى فمن حيث ان الخط المارّ بالمركز ق ى ينصف اخر الذي لا يمرّ بالمركز ا س فيحدث معهُ قائمتين (ق ٣ ك ٣) فتكون ق ى ا قائمة . ومن حيث ان ق ى ينصف ب د الذي لا يمرّ بالمركز فيحدث معهُ قائمتين (ق ٣ ك ٣) فتكون ق ى ب قائمة وق ى ا تعدل ق ى ب اي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فاذاً ا س ب د لا ينصف بعضهما بعضاً

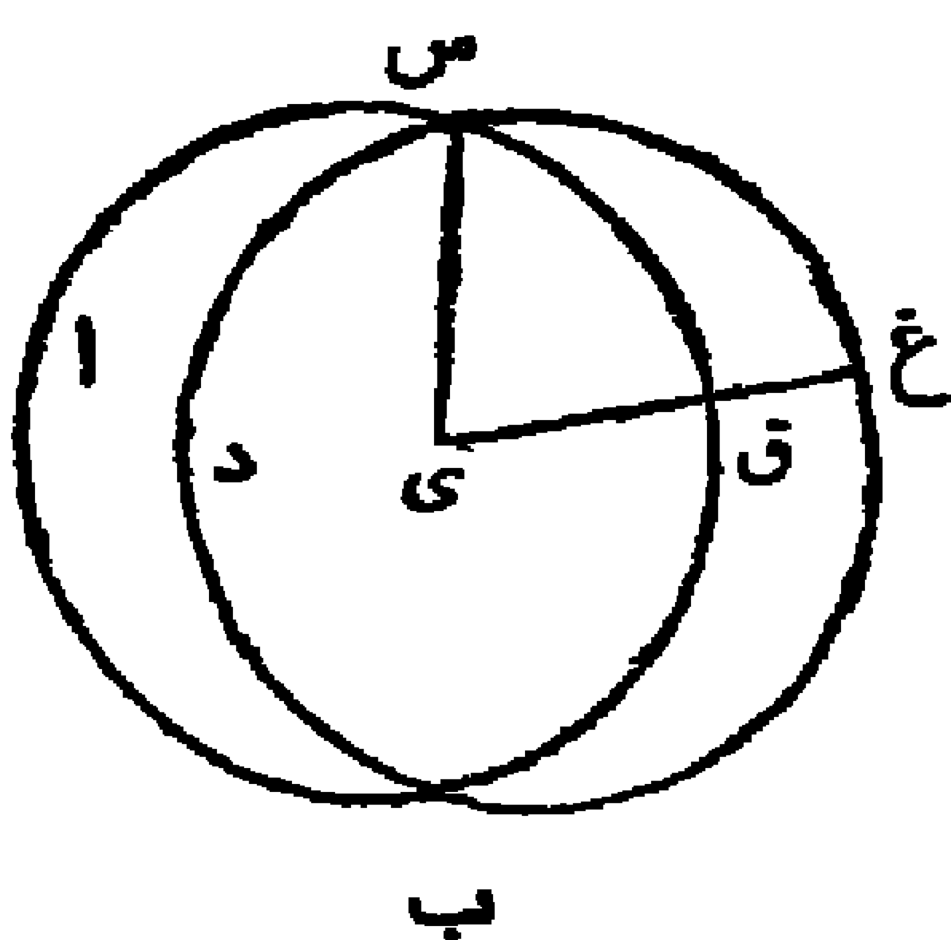




القضية الخامسة . ن

اذا تقاطعت دائرتان لا يكون لهما مركز واحد

لتكن ا ب س س د غ دائرتين ولتتقاطعا في س وب فليس لهما مركزٌ واحدٌ والاّ فلتكن النقطة ى مركزها . ارسم س ى وارسم خطاً آخر مثل ى ق غ يلاقي المحيطين في ق وغ



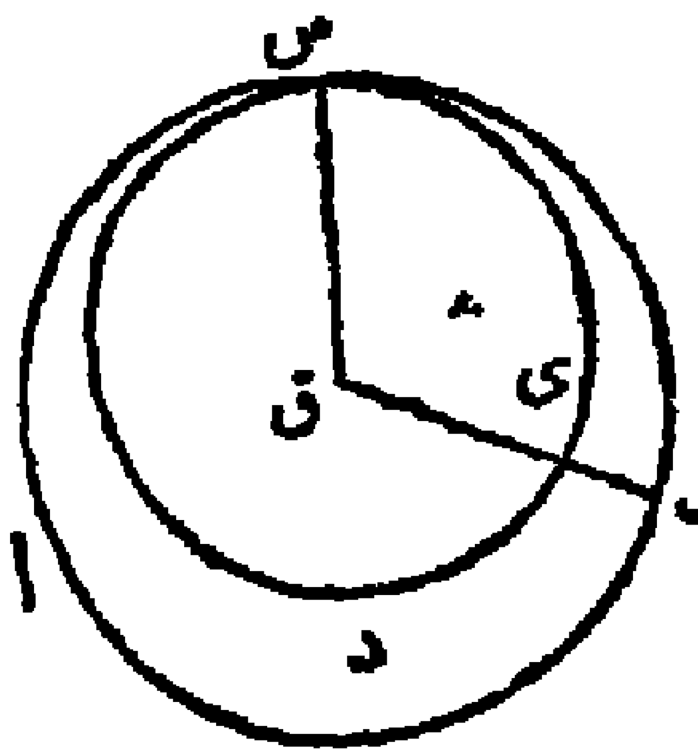
فمن حيث ان ى مركز الدائرة ا ب س فنصف القطر ى س يعدل نصف القطر ى ق . وايضاً من حيث ان ى مركز الدائرة س د غ فنصف القطر ى س يعدل نصف القطر ى غ . وقد تبرهن ان س ى يعدل ى ق

فاذًا ى ق يعدل ى غ اي الجزء يعدل الكلّ وذاك محال فلا يمكن ان تكون النقطة ى مركز الدائرتين

القضية السادسة . ن

اذا مسّت دائرةٌ دائرةً اخرى من داخلها فلا يكون لهما مركزٌ واحدٌ

لتكن ا ب س د ى س دائرتين ولتمسّ احداها الاخرى في س فلا يكون لها مركز واحد

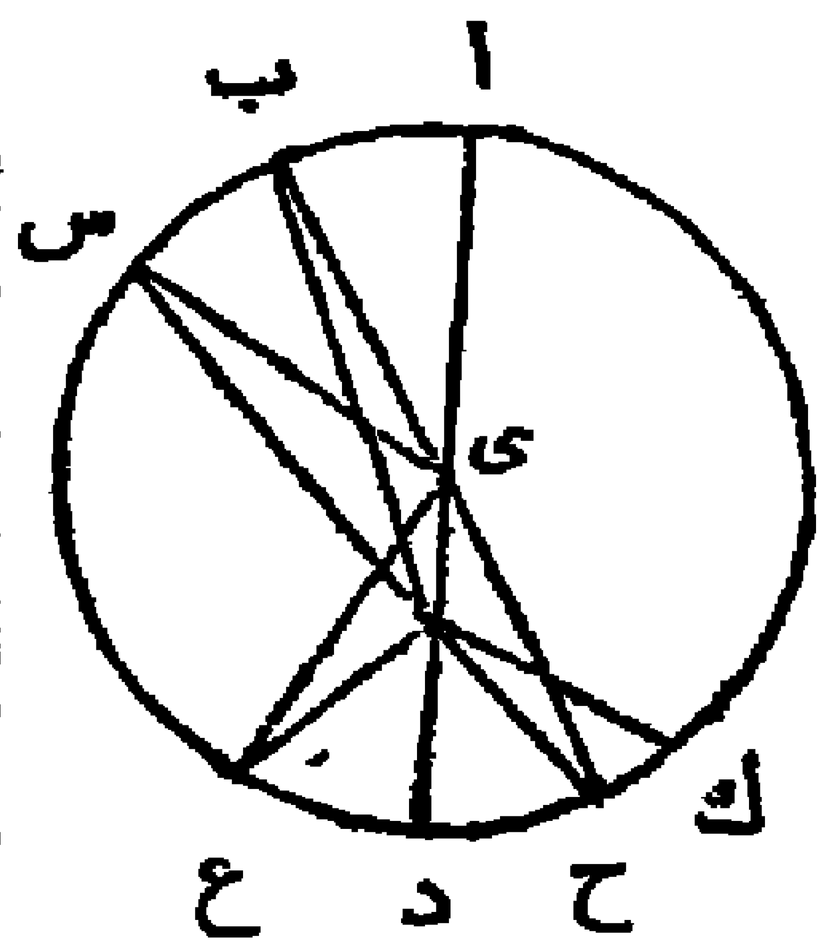


والاّ فلتكن النقطة ق مركزها . ارسم ق س وارسم خطًّا آخر مثل ق ى ب يلاقي المحيطين في ى وب . فمن حيث ان ق مركز الدائرة ا ب س فنصف القطر ق س يعدل نصف القطر ق ب . وايضًا لان ق مركز الدائرة د ى س فنصف القطر ق س يعدل نصف القطر ق ى . وقد تبرهن ان ق س يعدل ق ب فاذًا ق ى يعدل ق ب اي الجزء يعدل الكل وذاك محال فلا تكون النقطة ق مركز الدائرتين

القضية السابعة . ن

اذا فُرِضَتْ نقطةٌ في قطر دائرة غير المركز فاطول الخطوط المستقيمة التي يمكن رسمها من تلك النقطة الى المحيط هو الذي يقع فيهِ المركز اي قسم من القطر . واقصرها هو القسم الاخر من القطر واما بقية الخطوط التي ترسم من تلك النقطة الى المحيط فالاقرب الى القسم من القطر المارّ بالمركز هو الاطول ولا يُرسمُ من تلك النقطة الى المحيط اكثر من خطَّين متساويين اي واحد على الجانب الواحد من القطر والاخر على الجانب الآخر منهُ

لتكن ا ب س ك دائرةً وا د قطرها ولنفرض فيهِ نقطة ف غير المركز ولتكن ى المركز فبين كل الخطوط التي يمكن رسمها من ف الى المحيط فالخط ف ا هو الاطول وف د هو الاقصر ومن البقية فالخط ف ب اطول من ف س وف س اطول من ف غ وهلم جرًّا. ارسم ب ى س ى غ ى فمن حيث ان ضلعَين من اضلاع مثلث هما معًا اطول من الثالث (ق ٢٠ ك ١) فالضلعان ب ى ى ف هما



اطول من ب ف وا ى يعدل ب ى فاذًا ا ى ى ف يعني ا ف اطول من ب ف وايضًا من حيث ان ب ى يعدل س ى وى ف مشترك بين المثلثين ب ى ف س ى ف فالضلعان ب ى ى ف يعدلان س ى ى ف ولكن الزاوية ب ى ف هي اكبر من س ى ف فالقاعدة ب ف هي اطول من القاعدة س ف (ق ٢٤ ك ١) ولهذا السبب س ف اطول من ع ف. وايضًا من حيث ان غ ف ف ى هما معًا اطول من غ ى (ق ٢٠ ك ١) وى غ يعدل ى د فاذًا غ ف ف ى معًا هما اطول من د ى اطرح الجزء المشترك ف ى فالبقية غ ف اطول من البقية د ف فاذًا ف ا هو اطول الخطوط التي يمكن رسمها من ف الى المحيط وف د اقصرها وف ب اطول من ف س وف س اطول من ف غ وهلمّ جرًّا

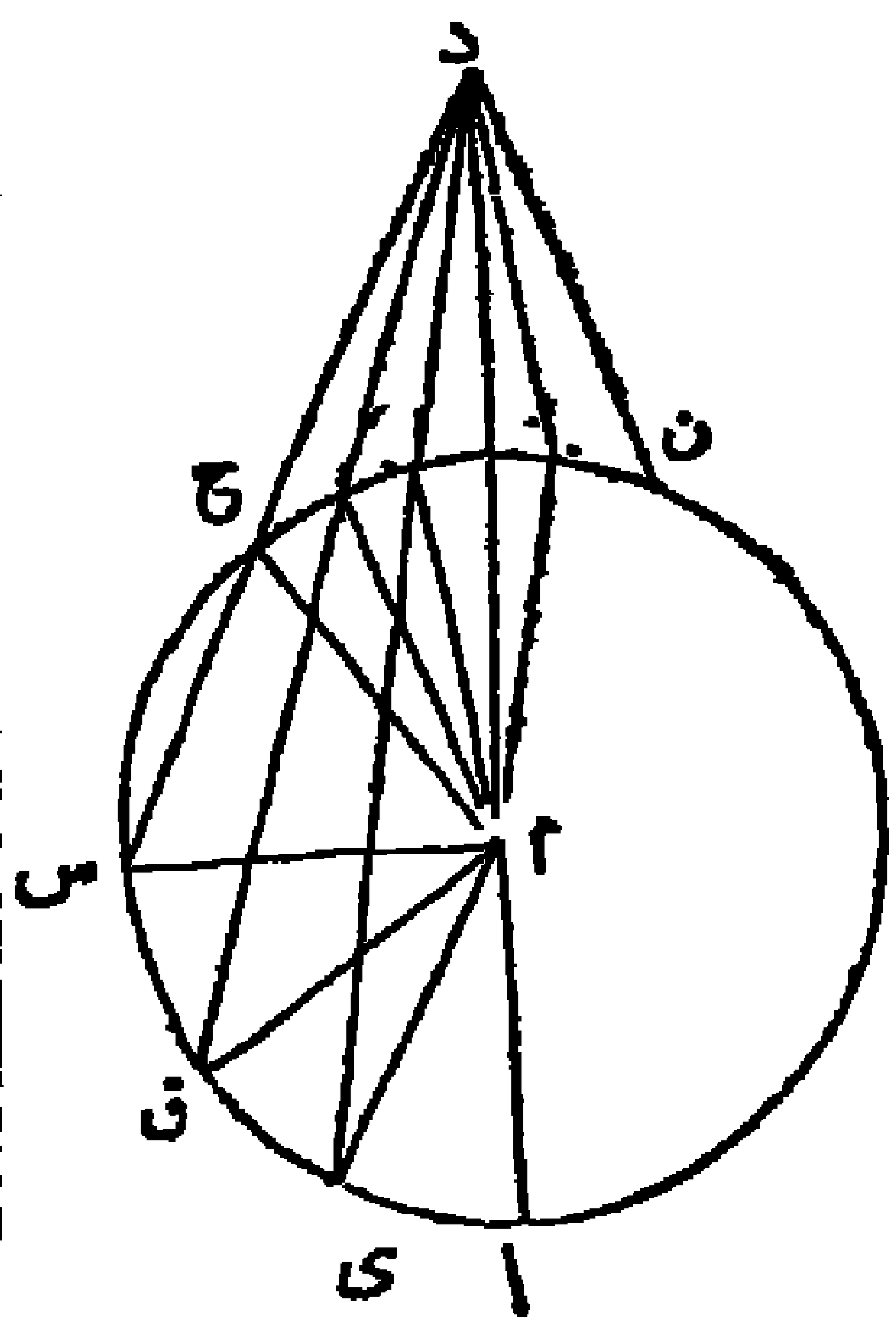
كذلك لا يمكن ان يُرسَم من ف الى المحيط على جانبي ف د اكثر من خطين متساويين. عند ى اجعل الزاوية ف ى ح حتى تعدل غ ى ف وارسم ف ح. فمن حيث ان غ ى يعدل ى ح وى ف مشترك بين المثلثين غ ى ف ح ى ف فالضلعان غ ى ى ف معًا يعدلان ح ى ى ف والزاوية غ ى ف تعدل ح ى ف فالقاعدة ف غ تعدل القاعدة ف ح (ق ٤ ك ١) ولا يمكن ان يُرسَم خط اخر غير ف ح يعدل ف غ من ف الى المحيط والاّ فليكن ذلك الخط الآخر ف ك فمن حيث ان ف ك يعدل ف غ وف غ يعدل ف ح فاذًا ف ك يعدل ف ح اي الخط الاقرب الى الذي يمر بالمركز يعدل الابعد وذلك لا يمكن كما تقدم برهانهُ

القضية الثامنة. ن

اذا فُرِضت نقطة خارج دائرة ورُسم منها خطوط مستقيمة الى المحيط

ومرّ احدها بالمركز فاطول الخطوط الواقعة على مقعّر الدائرة هو المارّ بالمركز ومن البقية فالاقرب الى المار بالمركز هو اطول من الابعد عنهُ ومن الخطوط الواقعة على محدَّب الدائرة فالاقصر هو المرسوم من النقطة المفروضة الى القطر واما البقية فالاقرب الى الاقصر هو اقصر من الابعد عنهُ. ولا يُرسم اكثر من خطين متساويين من النقطة المفروضة الى المحيط وذلك على جانبي الخط الاقصر

لتكن ا س ن دائرة ود نقطة مفروضة خارجها ولترسم الخطوط المستقيمة د ا د ى د ق د س الى المحيط وليمرّ الخط د ا بالمركز. فمن الخطوط الواقعة على مقعّر المحيط اعني ى ق س فالاطول هو ا د والاقرب الى ا د يعني ى د هو اطول من ق د وق د اطول من س د. ومن الخطوط الواقعة على محدَّب المحيط ح ل ك غ فالاقصر هو د غ بين النقطة المفروضة د والقطر ا غ والاقرب الى هذا يعني د ك هو اقصر من د ل ود ل اقصر من د ح وهلمَّ جرًّا



استعلم م مركز الدائرة (ق ا ك ٣) وارسم م ى م ق م س م ح م ل م ك. فمن حيث ان م ا يعدل م ى فاذا أُضيف م د الى كل واحد منهما لنا د ا يعدل د م مع م ى ود م وم ى هما معًا اطول من د ى (ق ٢٠ ك ا) فاذًا د ا هو ايضًا اطول من د ى. ومن حيث ان م ى يعدل م ق وم د مشترك بين المثلثين د م ى د م ق فالضلعان د م م ى يعدلان الضلعين د م م ق ولكن الزاوية د م ى انما هي اكبر من الزاوية د م ق فالقاعدة د ى اطول من القاعدة د ق (ق ٢٤ ك ا) وهكذا ايضًا يبرهن ان د ق اطول من د س. فاذًا د ا هو اطول هذه الخطوط ود ى هو اطول من د ق ود ق اطول من د س. ثم من حيث ان م ك ك د هما معًا اطول من م د (ق ٢٠ ك ا) وم غ يعدل م ك فالبقية ك د هي اطول من البقية غ د (اولية ٥)

اعني د غ هو اقصر من د ك ومن حيث ان م ك د ك قد رُسما الى النقطة ك داخل المثلث م ل د وذلك من م ود طرفي قاعدتهِ م د فالخطان م ك ك د معًا هما اقصر من م ل ل د معًا (ق ا ٢ ك ا) وم ك يعدل م ل فالبقية ك د هي اقصر من البقية ل د وهكذا يبرهن ان د ل هو اقصر من د ح فاذًا د غ هو اقصر هذه الخطوط ود ك اقصر من د ل ود ل اقصر من د ح وهلمَّ جرًّا

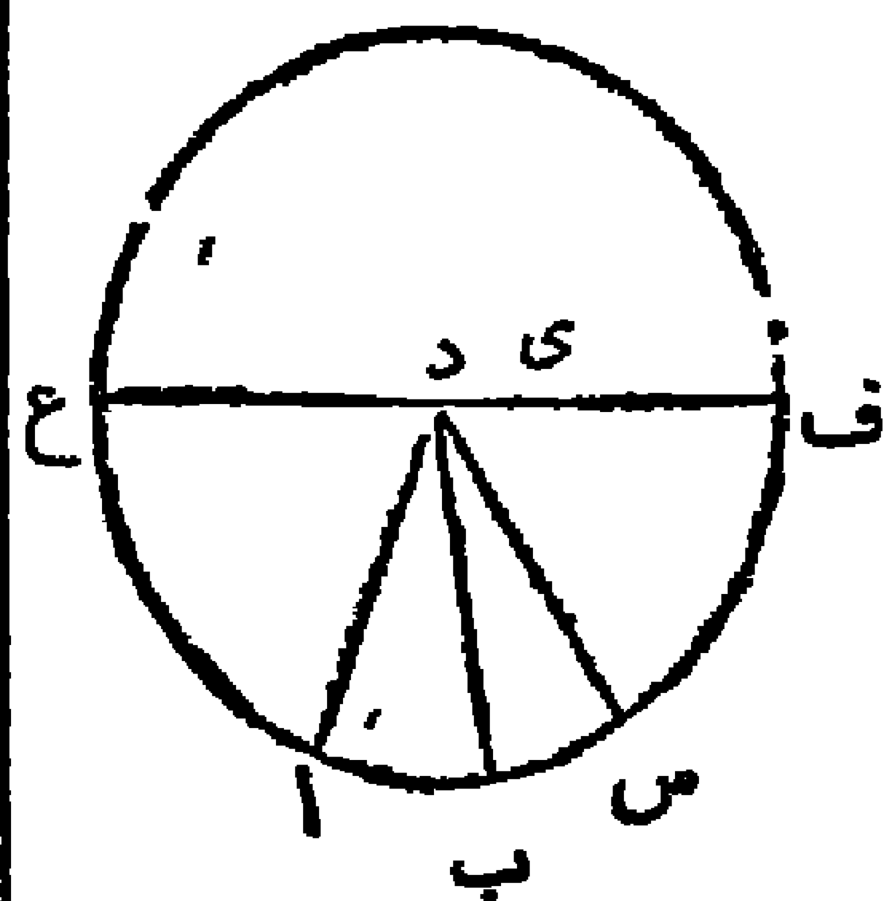
كذلك لا يُرسم الا خطان متساويان من د الى المحيط وذلك على جانبي الاقصر فعند النقطة م من الخط م د اجعل الزاوية د م ب حتى تعدل د م ك وارسم د ب فلنا في المثلثين ك د م ب د م الضلعان المتساويان ب م ك م والضلع المشترك د م والزاوية ب م د تعدل الزاوية ك م د فالضلع الاخر د ك يعدل الاخر د ب (ق ٤ ك ا) ولا يُرسم خط اخر غير د ب حتى يعدل د ك اعني من د الى المحيط

وان كان ممكنًا فليكن د ن ذلك الخط فمن حيث ان د ن يعدل د ك ود ك يعدل د ب فاذًا د ن يعدل د ب يعني الاقرب الى د غ يعدل الابعد عنهُ وقد تبرهن ان ذاك غير ممكن

القضية التاسعة . ن

اذا فُرِضَتْ داخل دائرة نقطة يُرسم منها الى المحيط اكثر من خطين مستقيمين متساويين فتلك النقطة هي مركز الدائرة

لتُفرض النقطة د في الدائرة ا ب س التي منها يقع على المحيط اكثر من خطين مستقيمين متساويين د ا د ب د س فالنقطة د هي مركز الدائرة . والا فلتكن النقطة ى المركز . ارسم د ى واخرجهُ الى المحيط في ف وغ فيكون الخط ف غ قطرًا ومن حيث انهُ قد تعيَّن في القطر نقطة اعني د التي ليست هي مركز الدائرة فالخط د ف هو اطول الخطوط التي يمكن رسمها من تلك النقطة الى المحيط (ق ٧ ك ٣) ود س دونهُ اطول من د ب ود ب اطول من د ا

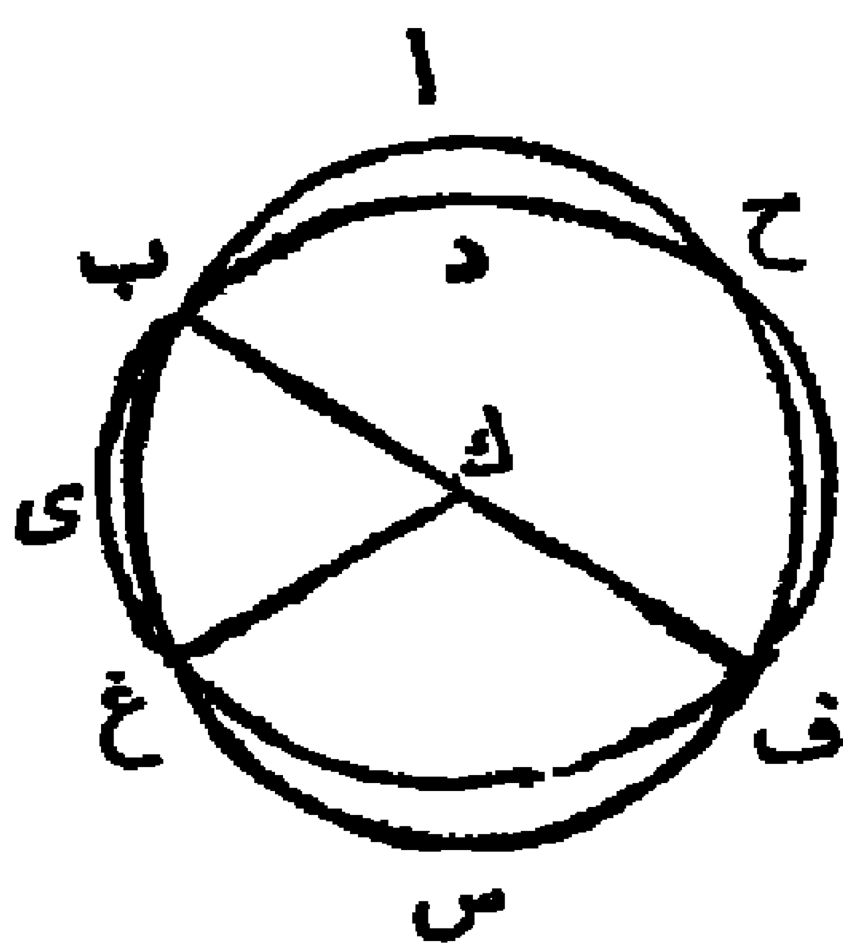


وقد فُرضت مساواتها فذاك محال فاذاً لا يمكن ان تكون ى المركز وهكذا يبرهن في كل نقطة غير د. فهي المركز

القضية العاشرة . ن

لا يمكن أن تقطع دائرةٌ دائرةً اخرى في اكثر من نقطتين

ان كان ممكنًا ليقطع المحيطُ ف اب المحيطَ د ى ف في اكثر من نقطتين اعني في ب وغ وف. استعلم ك مركز الدائرة اب س وارسم ك ب ك غ ك ف. فمن حيث انهُ قد تعينت النقطة ك داخل الدائرة د ى ف ووقع منها على المحيط اكثر من خطين مستقيمين متساويين اعني ك ب ك غ ك ف فهي اعني ك مركز الدائرة د ى ف (ق ٩ ك ٣) وهي ايضًا مركز اب س اي دائرةٌ تقطع دائرةً اخرى ولهما مركز واحد وذاك لا يمكن (ق ٥ ك ٣) فلا يمكن ان تقطع دائرةٌ دائرةً اخرى في اكثر من نقطتين

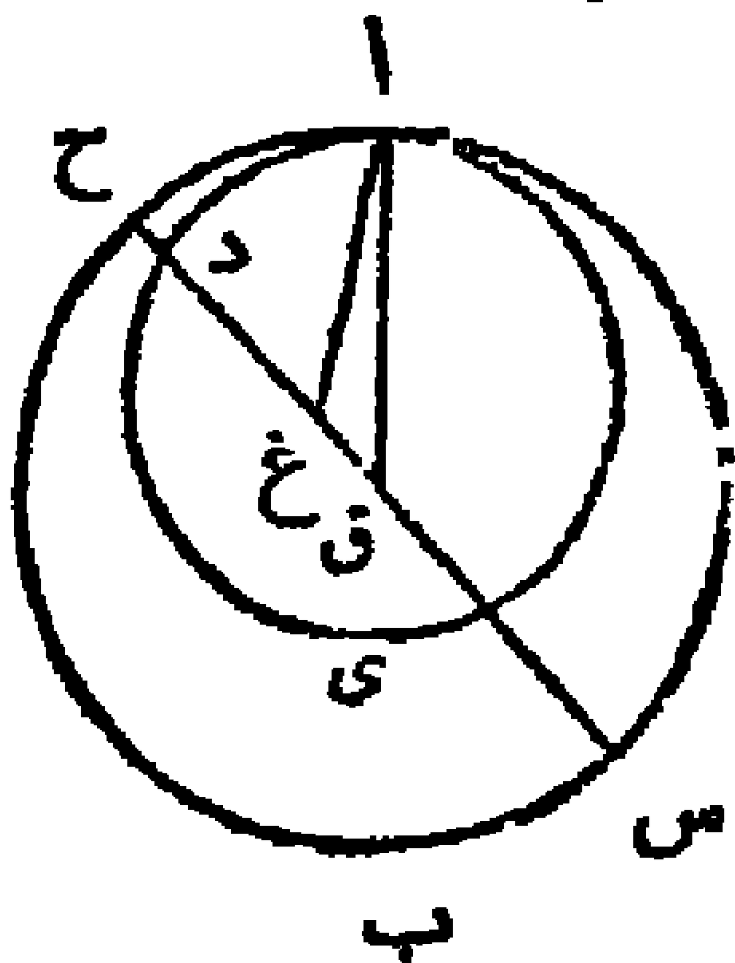


القضية الحادية عشرة . ن

اذا مسَّت دائرةٌ دائرةً اخرى من داخلها فالخط المستقيم الموصل بين مركزيهما اذا أُخرج يمرُّ بنقطة المماسَّة

لتكن اب س ا د ى دائرتين ولتمسّ احداهما الاخرى في النقطة ا وليكن ق مركز الدائرة اب س وغ مركز الدائرة ا د ى فالخط الموصل بين ق وغ اذا أُخرج يمرّ بنقطة المماسة ا

ولاَّ فليقع على نقطة اخرى ان كان ممكنًا مثل الخطّ ق غ د ح. ثم ارسم اغ ا ق. فمن حيث ان الضلعين اغ غ ق هما معًا اطول من اق (ق ٢٠ ك ١) او ق ح لانَّ ق ح ق ا نصفا قطرٍ لدائرةٍ واحدة فاذا



طُرح الجزء المشترك ق غ فالباقي غ ا يعدل الباقي غ ح ولكن ا غ يعدل غ د فاذاً غ د يعدل غ ح اعني الجزء يعدل الكل وذاك محال. فالخط الموصل بين المركزين لا يمكن وقوعهُ مثل الخط ق غ د ح وهكذا يبرهن في كل خط ما عدا الذي يقع على النقطة ا

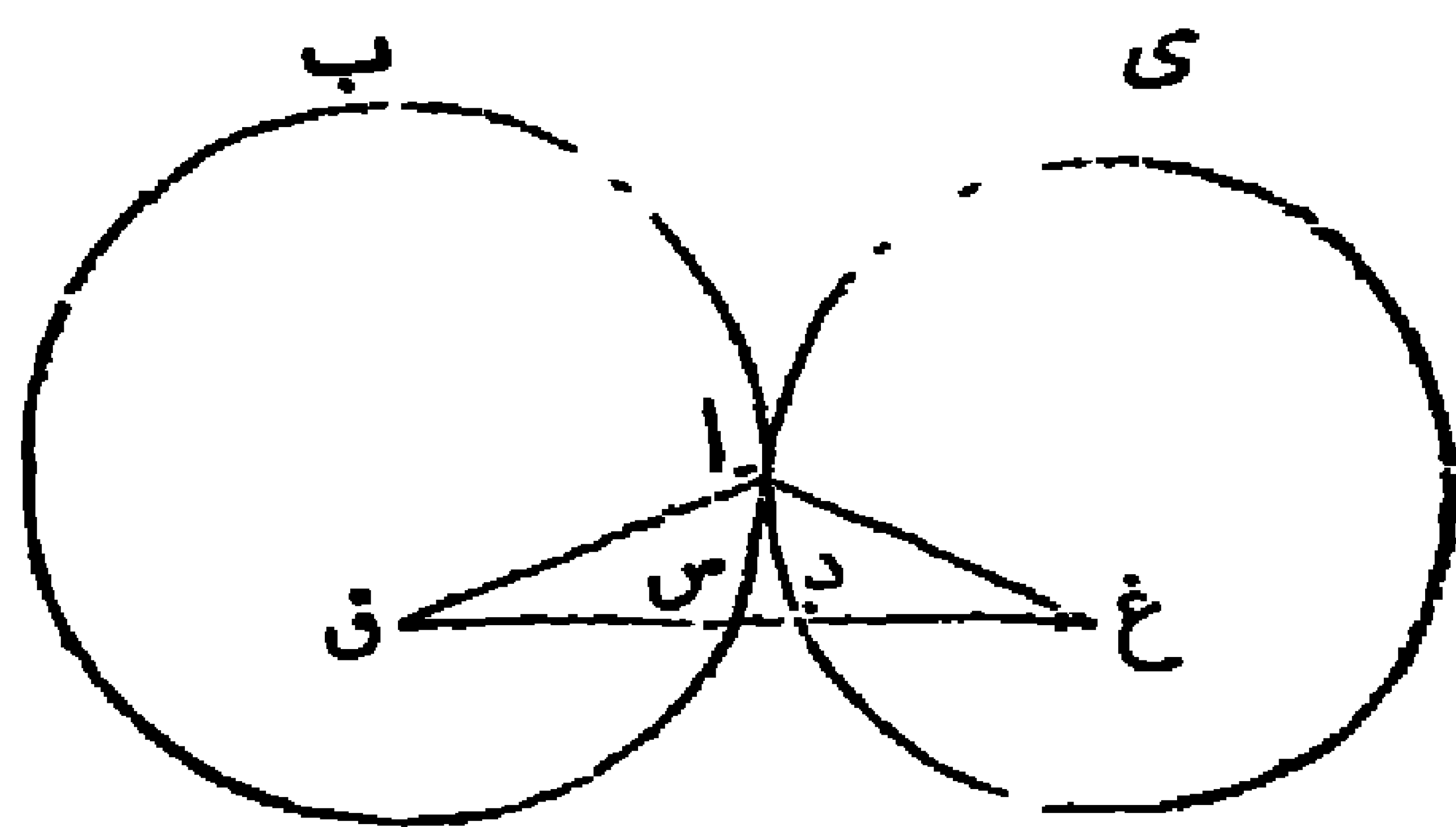
فرعٌ اول. اذا مسَّت دائرةٌ دائرةً اخرى من داخلها فالبعد بين مركزيها يعدل فضلة نصفَي قطريها لان المحيطين يمرَّان بنقطة واحدة في الخط الموصل بين المركزين

فرعٌ ثانٍ. بالقلب اذا عدل البعدُ بين المركزين فضلةَ نصفَي القطرين فالدائرة الواحدة تمسُّ الاخرى من داخلها

القضية الثانية عشرة. ن

اذا مسَّت دائرةٌ دائرةً اخرى من خارجها فالخط المستقيم الموصل بين مركزيها يمرُّ بنقطة المماسَّة

لتكن ا ب س ا د ى دائرتين ولتمسَّ احداها الاخرى في ا وليكن ق مركز الدائرة ا ب س وليكن غ مركز الدائرة ا د ى فالخط المستقيم الموصل بين ق وغ يمرُّ بنقطة المماسَّة



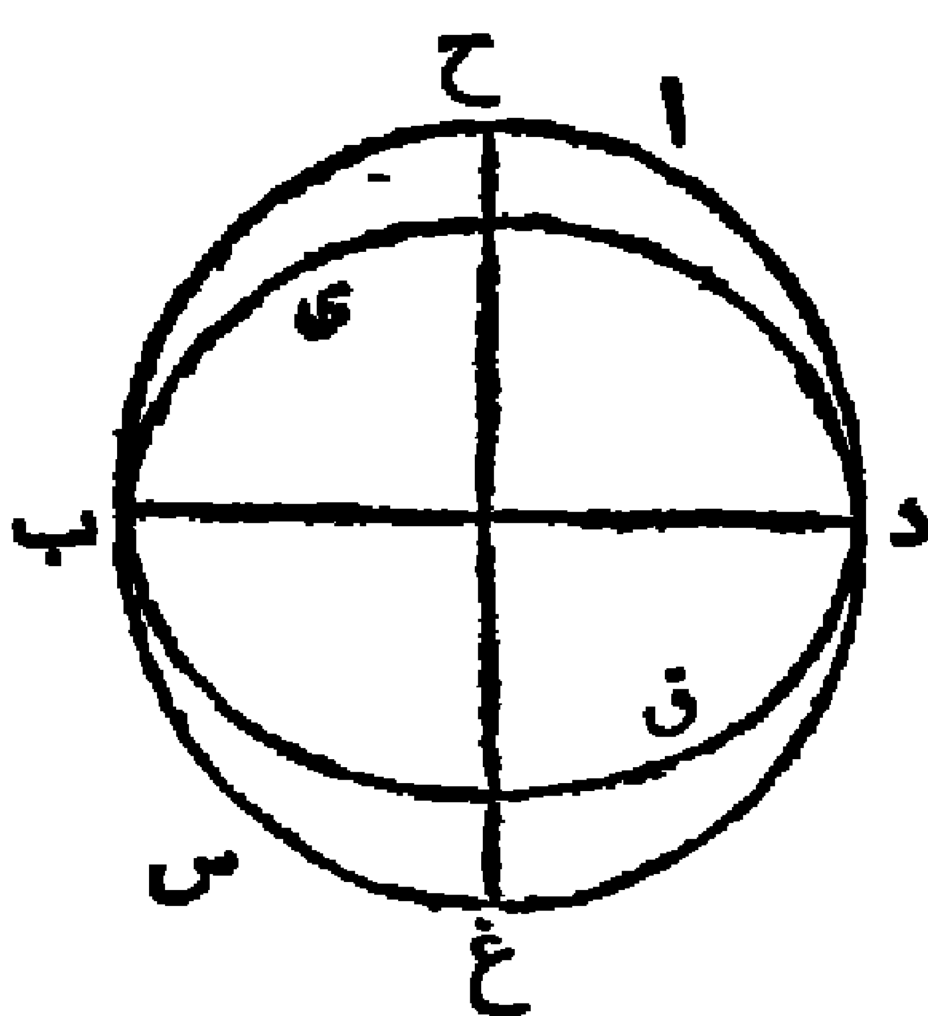
والاَّ فليقع على غير نقطة المماسة مثل الخط ق س د غ ارسم ق ا غ ا. فمن حيث ان ق مركز الدائرة ا ب س فالخط ق س يعدل ق ا وغ مركز ا د ى فالخط غ د يعدل غ ا فاذاً غ ا ا ق معًا يعدلان ق س غ د معًا فالكل ق غ اطول من ق ا ا غ معًا وذلك لا يمكن (ق ٢٠ ك ١) وهكذا يبرهن في كل خط غير الذي يمرُّ بنقطة المماسة

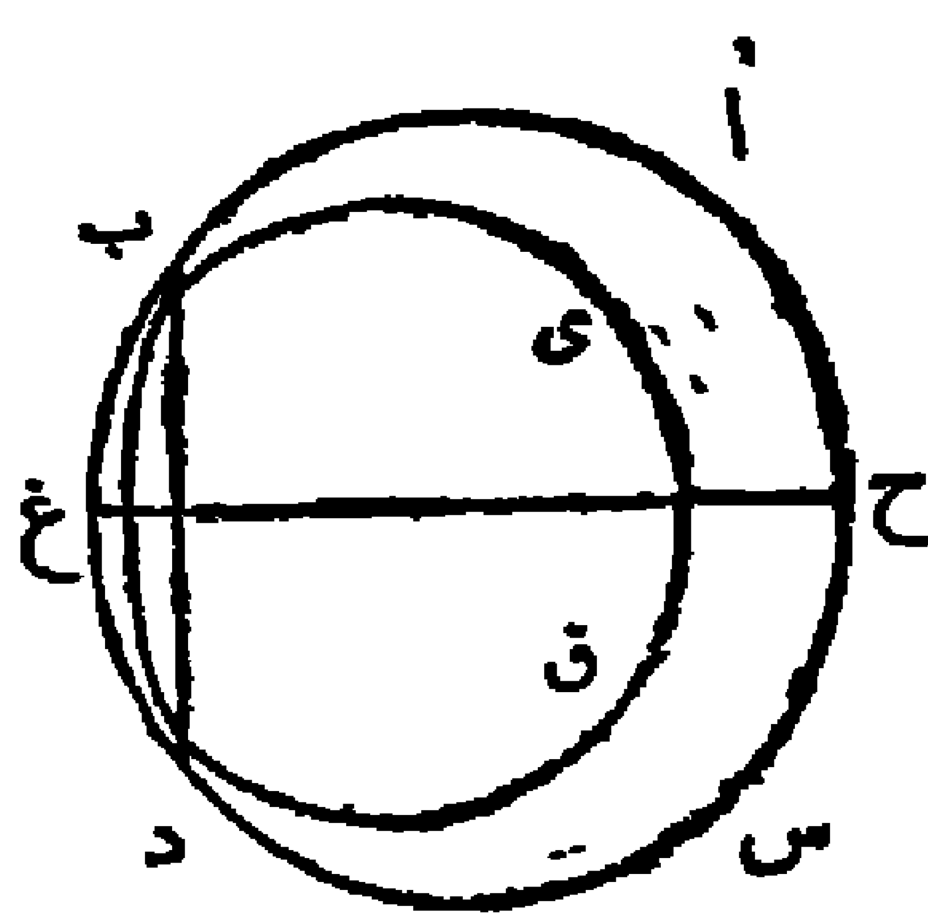
فرعٌ. اذا مسَّت دائرةٌ دائرةً اخرى من خارجها فالبعد بين مركزيها يعدل مجتمع نصفَي قطريها وبالقلب اذا عدل بعد مركزيها مجتمع قطريها فالواحدة تمسُّ الاخرى من خارجها

القضية الثالثة عشرة . ن

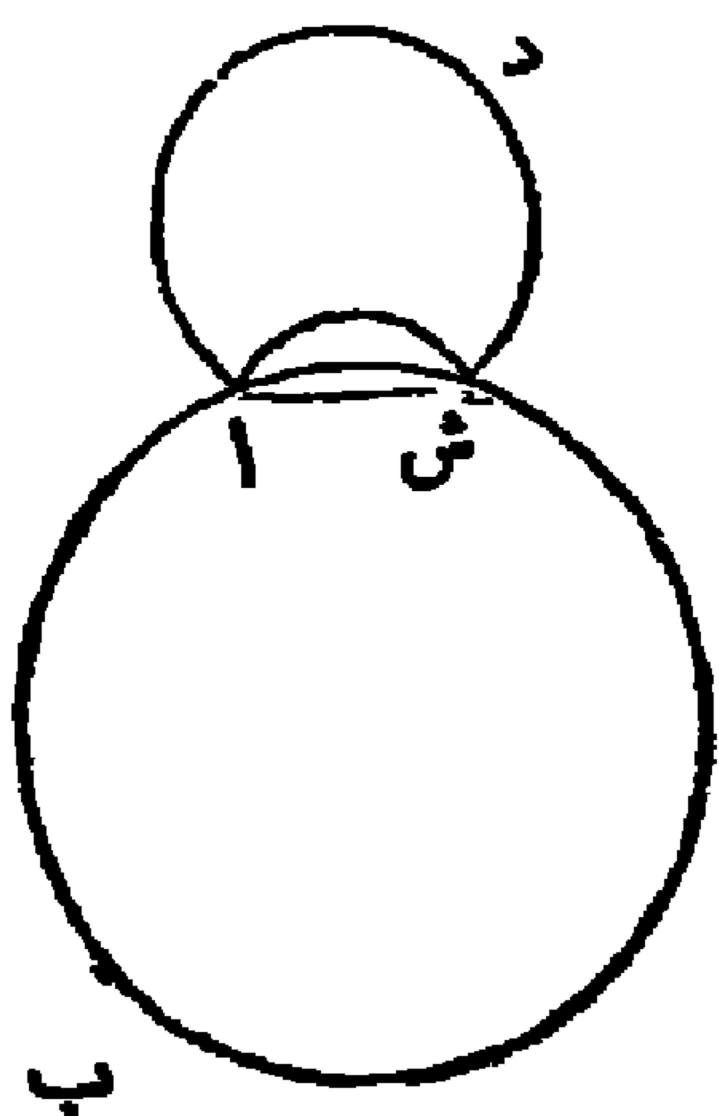
دائرةٌ لا تمسُّ اخرى في اكثر من نقطة واحدة ان كان من داخل او من خارج

ان كان يمكن لتمسَّ الدائرة ى ب ق الدائرة ا ب س في اكثر من نقطة واحدة واولاً من داخل في ب ود ارسم الخط ب د وارسم ح غ عمودًا عليهِ (ق٧ وق١١ ك١) ولينصفهُ





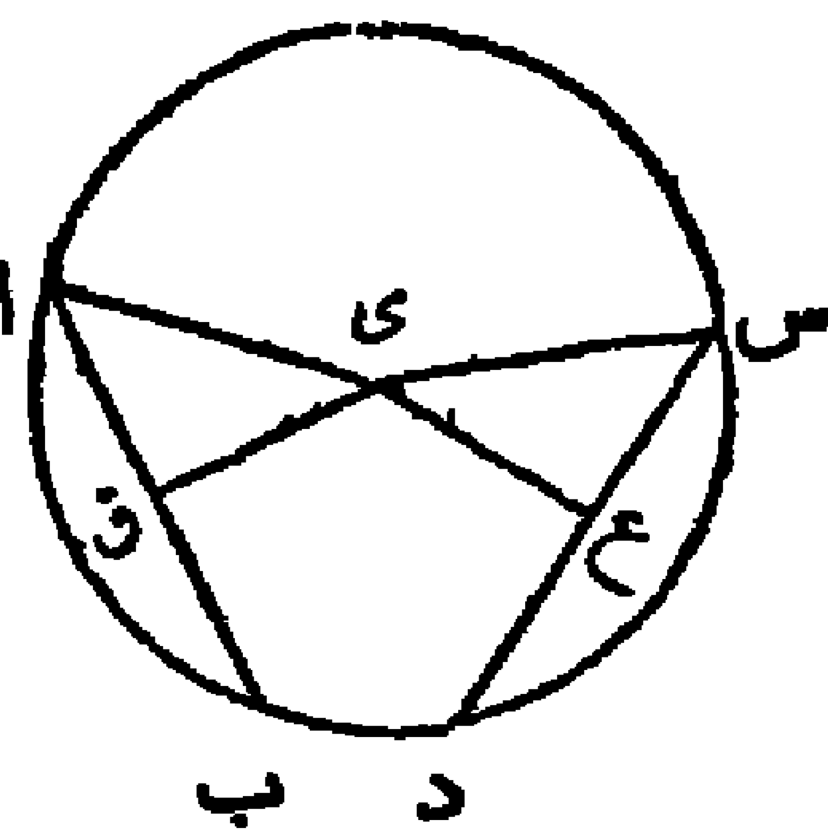
ايضًا . فمن حيث ان ب ود هما في محيط كل واحدة من الدائرتين فالخط المستقيم ب د واقع داخل كل واحدة منهما (ق٢ ك٣) ومركزاهما في الخط العمودي عليهِ المنصفهُ (فرع ق١ ك٣) فاذًا غ ح يمرّ بنقطة المماسة (ق١١ ك٣) وهو لا يمرُّ بهما لانَّ ب ود خارجتان عن الخط المستقيم غ ح فلا يمكن ان تمس الدائرة الاخرى في اكثر من نقطة واحدة من داخل ولا يمكن ذلك من خارج. فان كان يمكن فلتمسَّ الدائرة اش د الدائرة اش ب في ا وش ارسم اش فالنقطتان ا وش هما في محيط الدائرة اش د فيكون الخط اش كلهُ داخل اش د وااش د خارج اش ب فيكون اش خارج اش ب ايضًا ومن حيث ا وش هما في محيط اش ب فالخط اش هو داخل اش ب (ق٢ ك٣) وقد تبرهن انهُ خارجها وذاك محال فلا تمس دائرةٌ دائرةً اخرى من خارج في اكثر من نقطة واحدة



القضية الرابعة عشرة . ن

خطوطٌ مستقيمة متساوية في دائرةٍ هي على بعد واحدٍ من المركز.
وخطوط مستقيمة على بعد واحد من المركز هي متساوية.

ليكن ا ب وس د خطَّين مستقيمين متساويين في الدائرة ا ب د س فهما على بعدٍ واحدٍ من المركز. استعلم المركز ى (ق ا ك ٣)



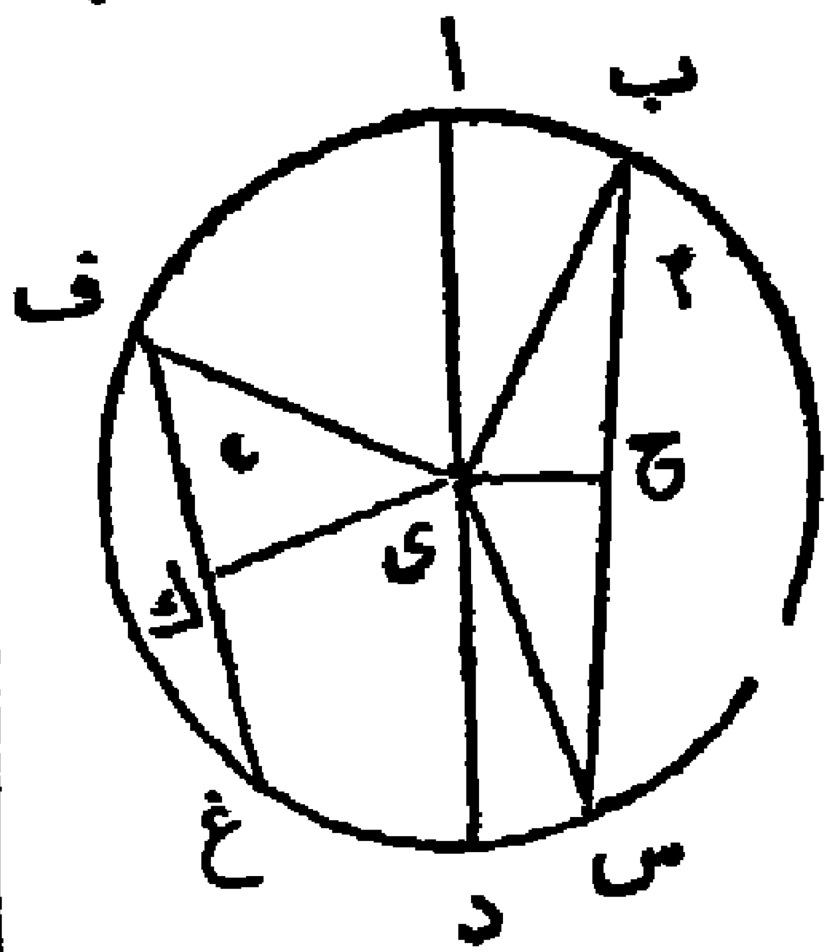
وارسم ى ق ى غ عمودين على ا ب وس د وارسم ايضاً ا ى وس ى. فمن حيث ان الخط المستقيم المارّ بالمركز اعني ى ق يجعل مع ا ب الذي لا يمرّ بالمركز زاويةً قائمةً فهو ينصفهُ ايضاً (ق ٣ ك ٣) فاذاً ا ق يعدل ق ب اعني ا ب هو مضاعف ا ق. وهكذا ايضاً يبرهن ان س د مضاعف س غ. وا ب يعدل س د فاذاً ا ق يعدل س غ. ومن حيث ان ا ى يعدل ى س فمربع ا ى يعدل مربع ى س ومجتمع مربعي ا ق ق ى يعدل مربع ا ى (ق ٤٧ ك ١) لانّ ا ق ى قائمة وهكذا ايضاً مجتمع مربّعي س غ غ ى يعدل مربع س ى. فمربعا ا ق ق ى يعدلان مربعي س غ غ ى ومربع س غ يعدل مربّع ا ق لان س غ يعدل ا ق فاذاً مربع الباقي غ ى يعدل مربع الباقي ى ق اعني غ ى يعدل ى ق فاذاً ا ب وس د هما على بعد واحدٍ من المركز (حد ٢ ك ٣)

ثم اذا فرض انهما على بعدٍ واحد من المركز اعني ان ق ى يعدل غ ى فهما متساويان لانهُ يبرهن على ذات الاسلوب السابق ان ا ب مضاعف ا ق وس د مضاعف س غ وان مجتمع مربعي ا ق ق ى يعدل مجتمع مربّعي س غ غ ى ومربع ق ى يعدل مربع غ ى فمربع الباقي ا ق يعدل مربع الباقي س غ وا ق يعدل س غ وا ب مضاعف ا ق وس د مضاعف س غ فاذاً ا ب يعدل س د

القضية الخامسة عشرة . ن

القطر هو اطول الخطوط التي تُرسم في دائرة اما البقية فالاقرب الى المركز اطول من الابعد عنهُ والاطول هو اقرب الى المركز من الاقصر

لتكن ا ب س د دائرة وا د قطرها وى مركزها وليكن ب س خطاً فيها وليكن اقرب الى المركز من الخط ف غ فالقطر ا د اطول من ايّ خطٍ آخر رُسم في الدائرة وب س اطول من ف غ



ارسم ى ح عموداً على ب س وى ك عموداً على ف غ وارسم ى ف ى ب ى س . فمن حيث ان ا ى يعدل ب ى وى د يعدل ى س فالكل ا د يعدل ب ى مع ى س وب ى مع ى س اطول من ب س (ق ٢٠ ك ١) فاذاً ا د اطول من ب س

ومن حيث ان ب س اقرب الى المركز من ف غ فالعمود ى ح اقصر من العمود ى ك (حد ٤ ك ٣) وب س هو مضاعف ب ح (ق ١٤ ك ٣) وف غ مضاعف ف ك ومجتمع مربعي ب ح ح ى يعدل مجتمع مربّعي ف ك ك ى ومربع ى ح اصغر من مربع ى ك فيكون مربع ح ب اكبر من مربع ك ف فاذاً ب ح اطول من ك ف وب س ايضاً اطول من ف غ

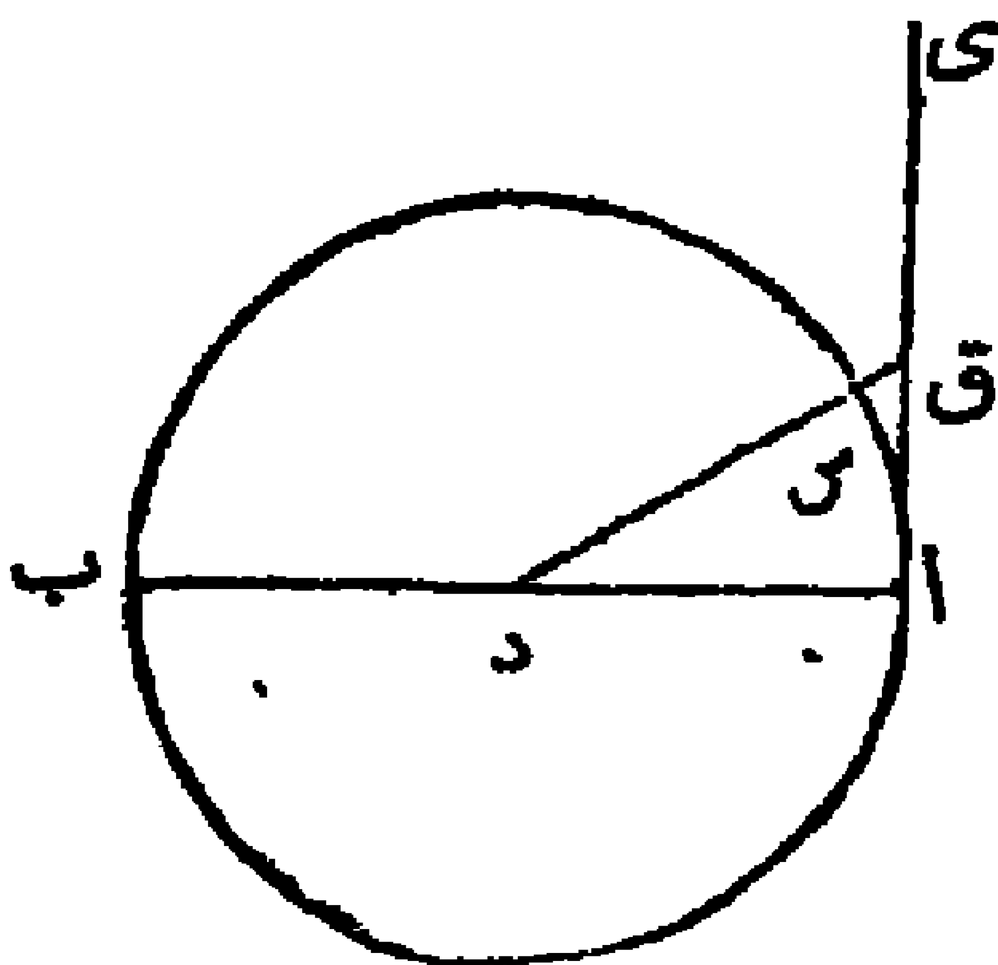
ثم ليُفرَض ان ب س اطول من ف غ فهو ايضاً اقرب الى المركز . فمن حيث ان ب س اطول من ف غ فاذاً ب ح اطول من ف ك ومجتمع مربعي ف ك ك ى يعدل مجتمع مربّعي ب ح ح ى ومربع ب ح اكبر من ف ك فيكون مربع ى ح اصغر من مربع ى ك اعني ى ح اقصر من ى ك فاذاً (حد ٤ ك ٣) ب س اقرب الى المركز من ف غ

فرعٌ . الوتر الاقصر هو الابعد عن المركز وبالقلب الوتر الابعد عن المركز هو الاقصر

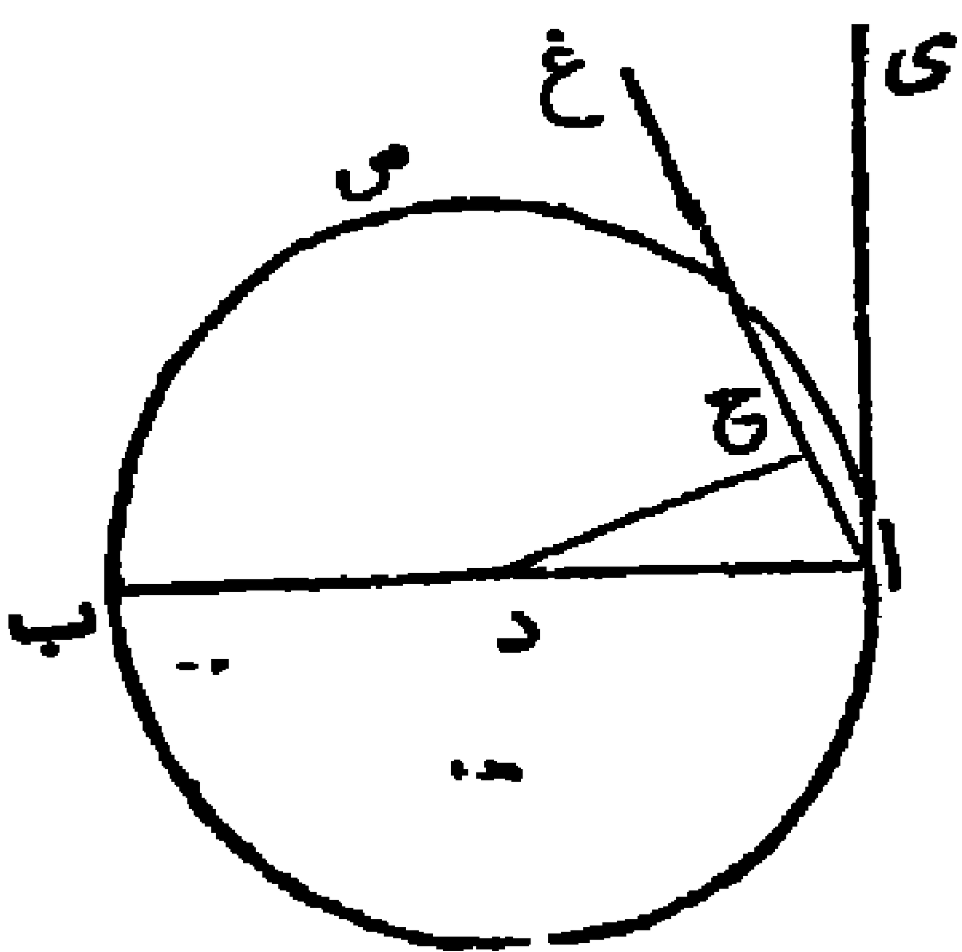
القضية السادسة عشرة . ن

الخط المستقيم العمودي على طرف قطر دائرة هو واقعٌ خارج الدائرة ولا يُرسم خطٌ مستقيم من طرف القطر بين ذاك العمود ومحيط الدائرة بدون ان يقطع المحيط

لتكن ا ب س دائرة ود مركزها وا ب قطرها وليُرسَم ا ى عمودًا على ا ب من النقطة ا فهو واقع خارج الدائرة



عيّن في ا ى ايّة نقطة شئت مثل ق وارسم ق د الذي يقطع المحيط في س. فمن حيث ان د ا ق قائمة فهي اكبر من ا ق د (ق ٣٢ ك ١) والزاوية الكبرى يقابلها الضلع الاطول (ق ١٩ ك ١) فاذًا د ق اطول من د ا ود ا يعدل د س فاذًا د ق اطول من د س فالنقطة ق واقعة خارج الدائرة وهي اية نقطة كانت من الخط ا ى فهو اذًا خارج الدائرة



كذلك لا يُرسم بين ى ا والمحيط خط مستقيم من النقطة ا الذي لا يقطع المحيط. ارسم غ ا في الزاوية د ا ى. وارسم د ح عمودًا على ا غ. فمن حيث ان د ح ا قائمة ود ا ح اصغر من قائمة فالضلع د ح اقصر من الضلع د ا (ق ١٩ ك ١) فالنقطة ح هي داخل الدائرة فالخط ا غ قاطع الدائرة

فرع اول. الخط العمودي على طرف قطر دائرة هو يمسّ الدائرة ويمسها في نقطة واحدة فقط لانهُ لو لاقاها في نقطتين لوقع داخل الدائرة (ق ٢ ك ٣) ولا يكون اكثر من مماسٍ واحد في نقطة واحدة من الدائرة

فرع ثانٍ. العمود على طرف القطر هو مماس للدائرة وبالقلب المماس هو عموديّ على طرف القطر

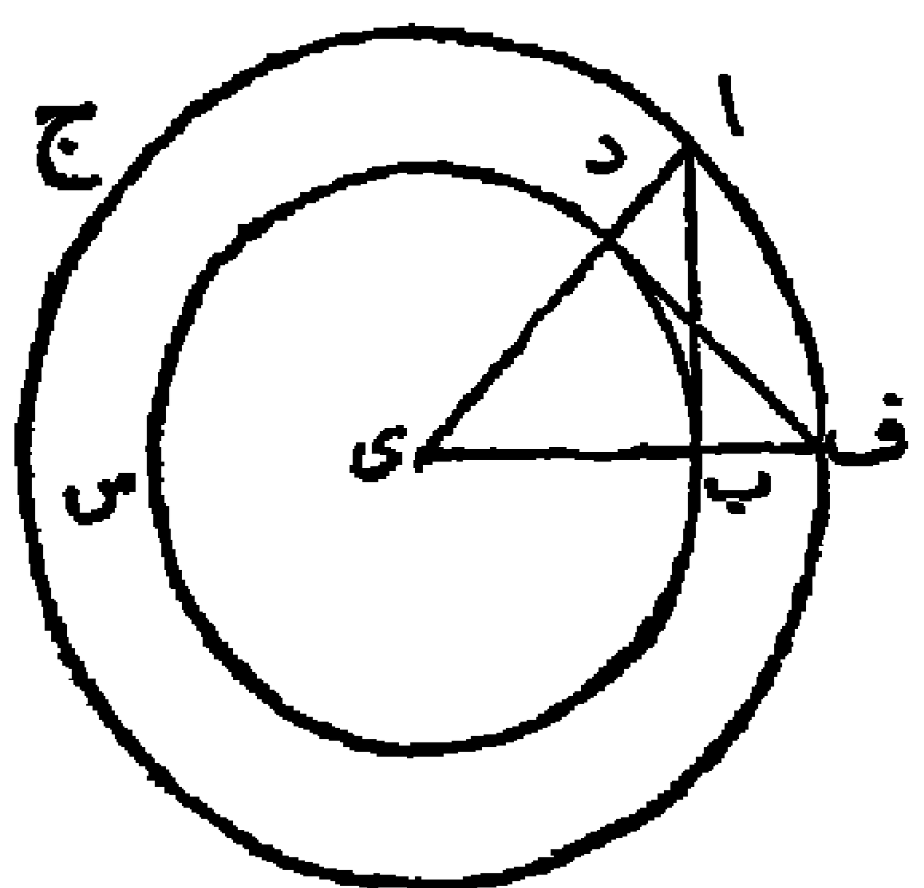
فرع ثالث. مماسان من طرفي القطر هما متوازيان (فرع ق ٢٨ ك ١) وبالقلب مماسان متوازيان هما عموديان على طرفي القطر

القضية السابعة عشرة. ع

علينا ان نرسم خطًّا مستقيمًا من نقطة مفروضة في محيط دائرة او خارج المحيط حتى يماسّ دائرةً مفروضة

اولاً لتكن ا النقطة المفروضة خارج الدائرة ب س د فعلينا ان نرسم منها خطاً مستقيماً يماسّ الدائرة

استعلم المركزى (ق ا ك ٣) وارسم ا ى واجعل ى مركزاً وى ا نصف قطرٍ وارسم الدائرة ا ف ج ومن د ارسم د ف عموداً على ى ا (ق ١١ ك ١) وارسم ى ب ف وايضاً ا ب فالخط ا ب يماسّ الدائرة



لان ى مركز الدائرتين ب س د ا ف ج فنصف القطرى ا يعدل ى ف وى د يعدل ى ب فالضلعان ا ى ى ب يعدلان الضلعين ف ى ى د ولها الزاوية عند ى المشتركة بين المثلثين ا ى ب ف ى د فالقاعدة ا ب تعدل القاعدة د ف والمثلث ا ى ب يعدل المثلث ف ى د وبقية زوايا الواحد تعدل بقية زوايا الآخر (ق ٤ ك ١) فالزاوية ى ب ا تعدل ى د ف ولكن ى د ف قائمة فاذاً ى ب ا قائمة ايضاً والخط ى ب قد رُسم من المركز وا ب عمود عليهِ فهو اذاً مماس (فرع ٢ ق ١٦ ك ٣) وقد رُسم من ا النقطة المفروضة

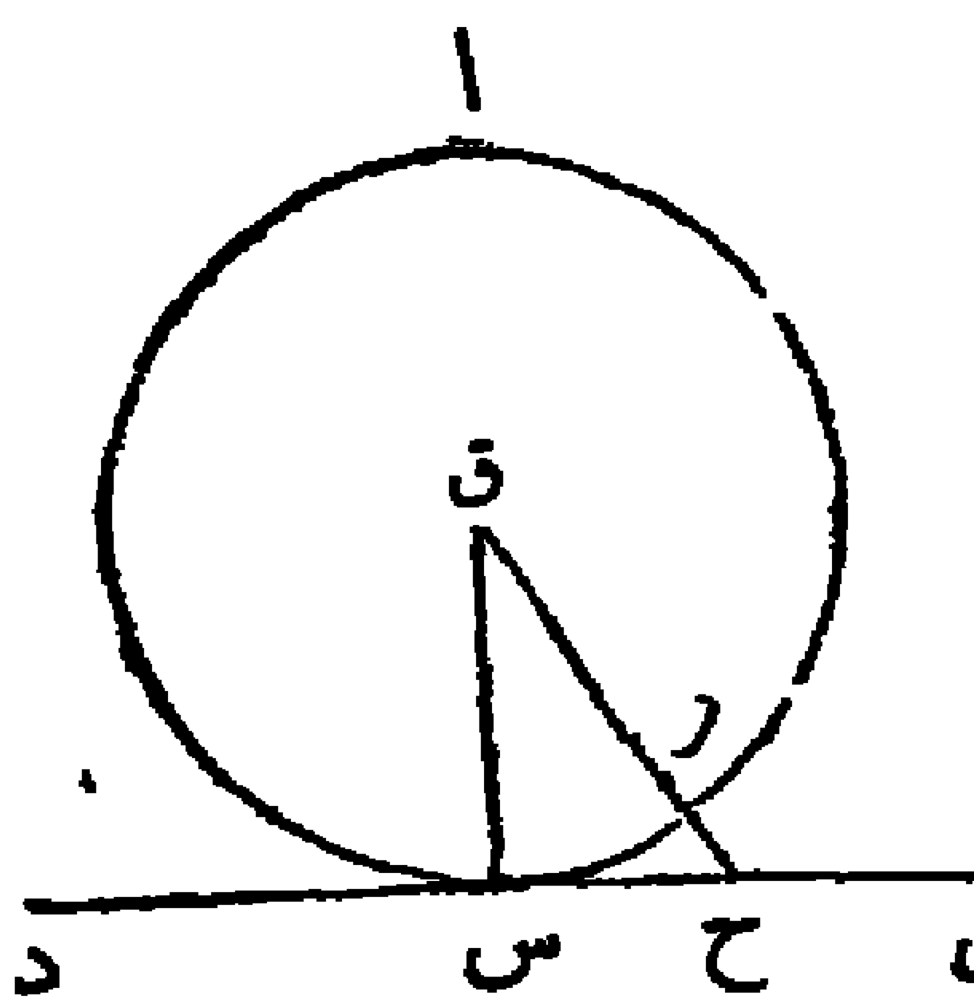
ثم اذا كانت النقطة المفروضة في محيط الدائرة مثل د فارسم د ى الى المركز ى وارسم د ف عموداً على طرفهِ فهو مماس (فرع اول ق ١٦ ك ٣)

تعليقة. متى كانت النقطة ا خارج المحيط يُرسم مماسان متساويان منها لانهُ اذا أُخرج المماس ف د حتى يلاقي المحيط ا ج ثم اذا رُسم خط من المركز الى نقطة الملاقاة وآخر من ا الى موضع تقاطع الخط الاول والمحيط ب د س يحدث مثلث ذو قائمة يعدل ا ب ى

القضية الثامنة عشرة. ن

اذا مسّ خطٌ مستقيم دائرةً فالخط المستقيم المرسوم من المركز الى نقطة المماسة هو عمودٌ على الخط المماس

لتكن ا س ب دائرة وليمسّها الخط المستقيم د ى في س. استعلم المركز ق وارسم

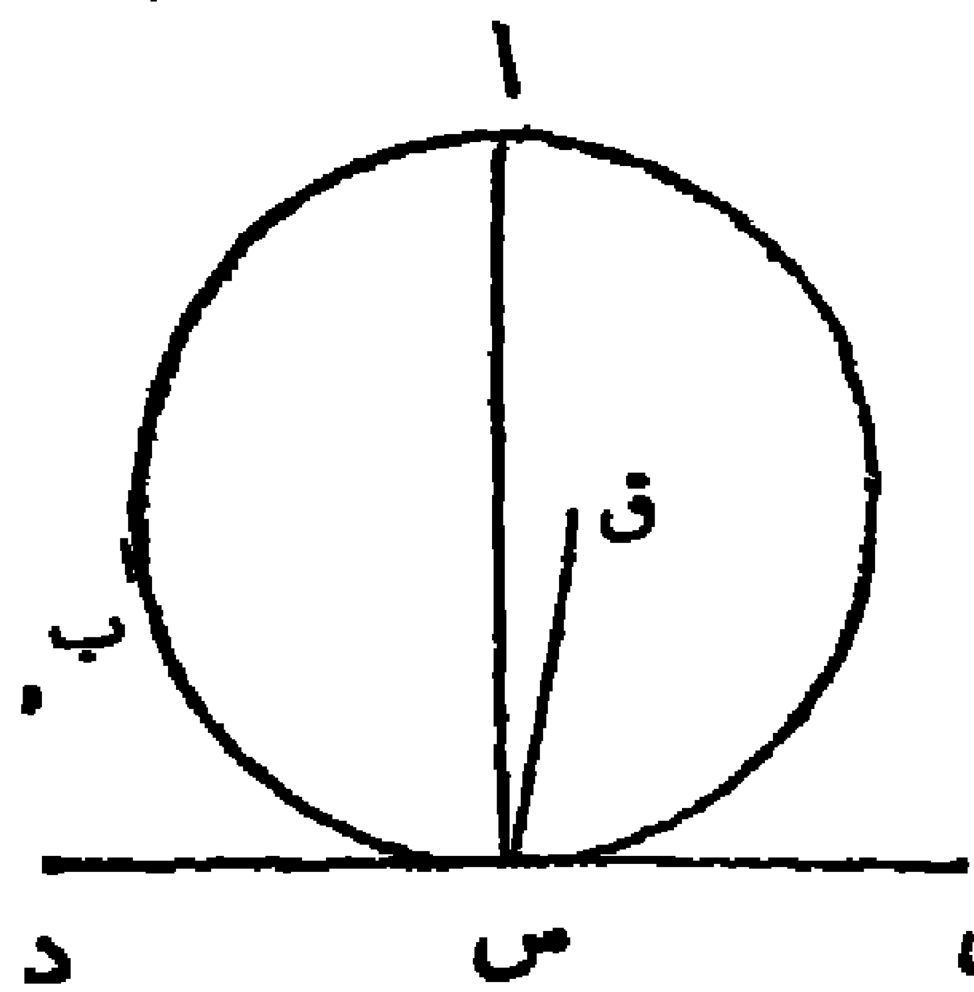


ق س فالخط المستقيم ق س انما هو عمود على د ى والاَّ فمن ق ارسم ق ب ج عمودًا على د ى فتكون ق ج س قائمة فتكون ج س ق حادَّة (ق ١٧ ك ١) والضلع الاطول يقابل الزاوية الكبرى (ق ١٩ ك ١) فالضلع ق س اطول من الضلع ق ج ولكن ق س يعدل ق ب فاذًا ق ب اطول من ق ج اعني الجزء اعظم من كلهِ وذاك محال فلا يمكن ان يكون ق ج عمودًا على د ى وهكذا يبرهن في كل خط ما عدا ق س فهو عمود على د ى

القضية التاسعة عشرة . ن

اذا مسَّ خطٌّ مستقيم دائرةً ورُسِم من نقطة المماسة خطٌّ مستقيم عمودٌ على المماس فمركز الدائرة واقع في ذلك الخط العمودي

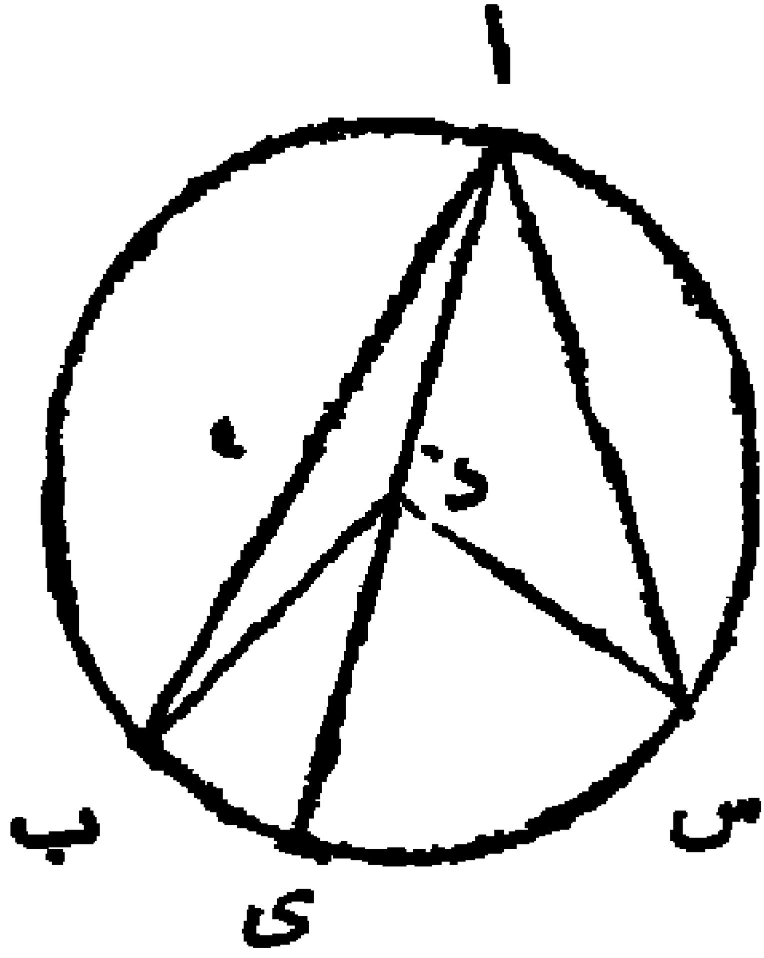
ليكن الخط المستقيم د ى مماسًّا للدائرة ا ب س ومن نقطة المماسَّة س ليُرسَم س ا عمودًا على د ى فمركز الدائرة واقع في الخط س ا والاَّ فلتكن ق المركز ارسم ق س فحسب القضية السابقة ق س هو عمودٌ على د ى وق س ى قائمة ولكن ا س ى ايضًا قائمة فاذًا ا س ى تعدل ق س ى اعني الكل يعدل جزءهُ وذاك محال فلا يمكن ان تكون ق المركز وهكذا يبرهن في كل نقطة لا تقع في الخط س ا فالمركز واقع في الخط س ا



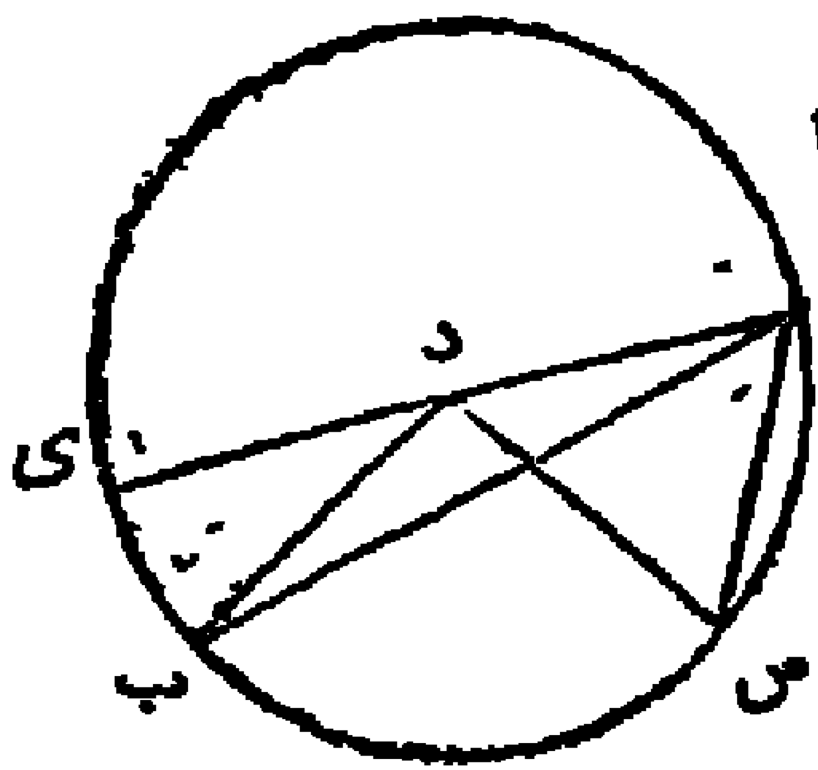
القضية العشرون . ن

الزاوية عند مركز دائرة هي مضاعف الزاوية عند المحيط اذا كانتا على قاعدة واحدة اعني على جزءٍ واحدٍ من المحيط

لتكن ا ب س دائرة وب د س الزاوية عند المركز وب ا س الزاوية عند المحيط وكلتاهما على جزء واحدٍ من المحيط ب س فالزاوية ب د س انما هي مضاعف ب ا س



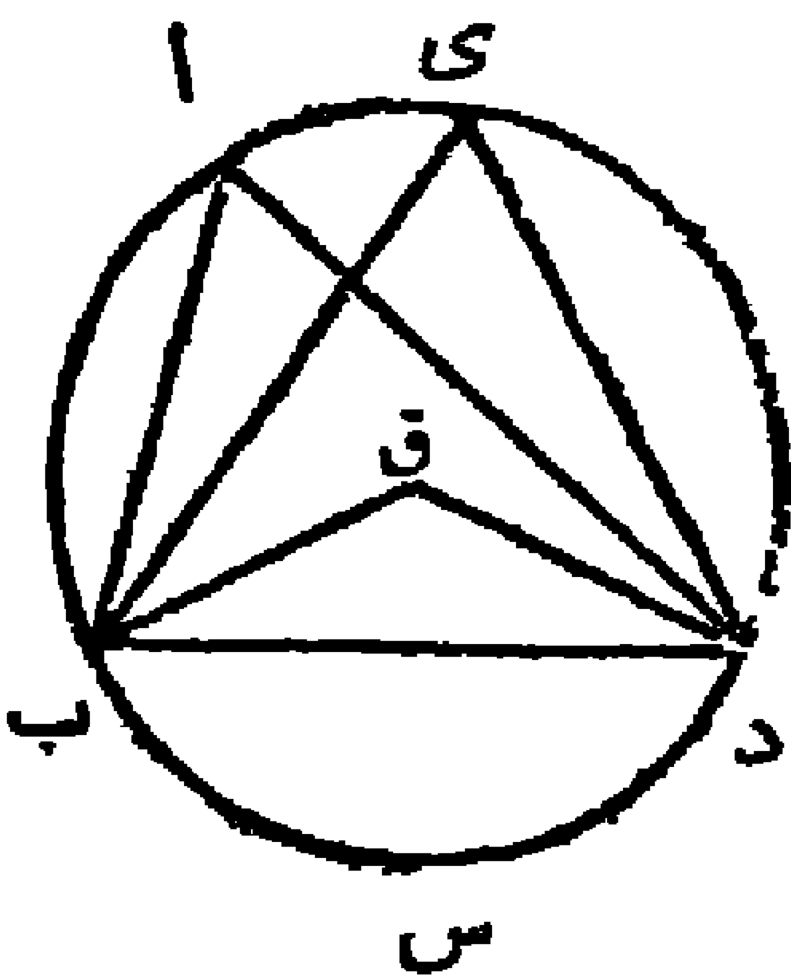
اولاً ليكن د مركز الدائرة داخل الزاوية ب اس ارسم ا د واخرجهُ الى ى. فمن حيث ان دا يعدل د ب فالزاوية د ا ب تعدل الزاوية د ب ا (ق ٥ ك ا) فالزاويتان د ب ا د ا ب هما معاً مضاعف د ا ب والزاوية ب د ى تعدل د ا ب د ب ا معاً (ق ٣٢ ك ا) فاذاً ب د ى هي مضاعف د ا ب وهكذا يبرهن ان ى د س مضاعف د ا س فالكل ب د س مضاعف الكل ب ا س



ثم ليكن المركز د خارج الزاوية ب ا س. ارسم ا د واخرجهُ الى ى. فيبرهن كما تقدم ان الزاوية ى د س هي مضاعف د ا س وان ى د ب جزء الاولى مضاعف د ا ب جزء من الثانية فالباقية ب د س مضاعف الباقية ب ا س

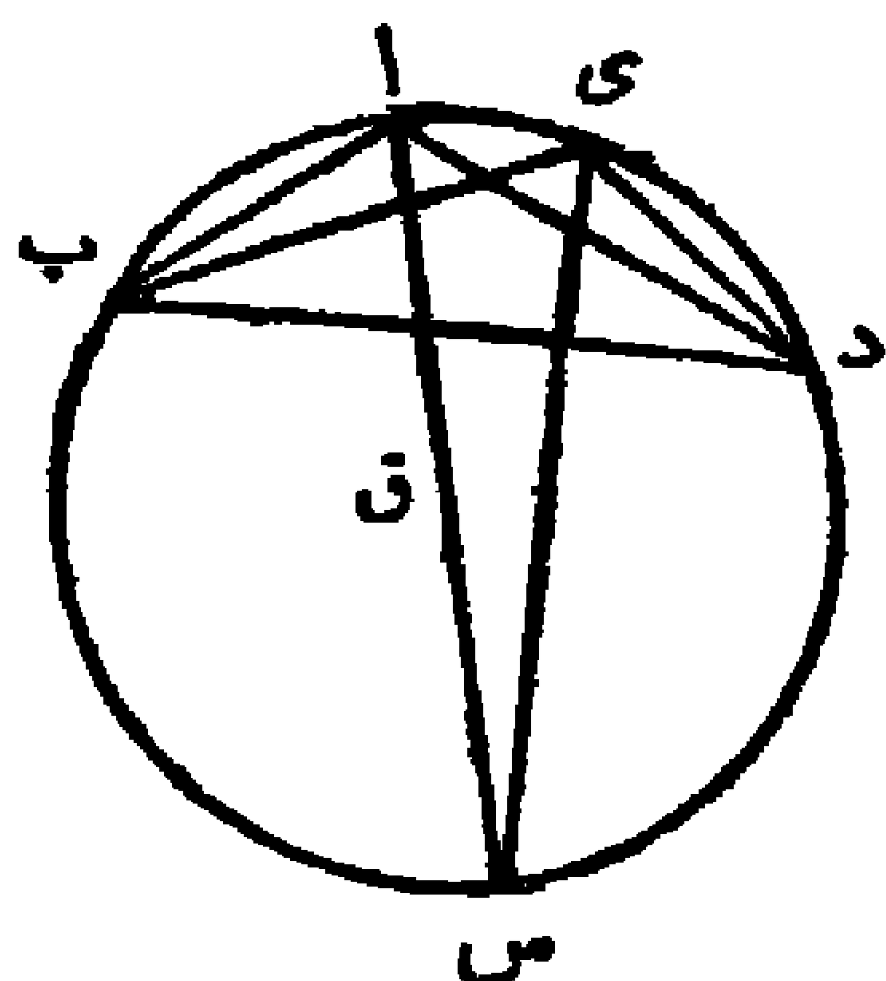
القضية الحادية والعشرون. ن

الزوايا في قطعة واحدة من دائرة هي متساوية



لتكن ا ب س د دائرة وب ا د ب ى د زاويتين في قطعة واحدة منها ب ا ى د فهما متساويتان

استعلم ق مركز الدائرة واولاً لتكن القطعة ب ا ى د اكبر من نصف دائرة. ارسم ب ق د ق فالزاوية ب ق د عند المركز هي مضاعف الزاوية ب ا د عند المحيط لانهما على قاعدة واحدة ب س د (ق ٢٠ ك ٣) وب ق د ايضاً مضاعف ب ى د فاذاً ب ا د تعدل ب ى د

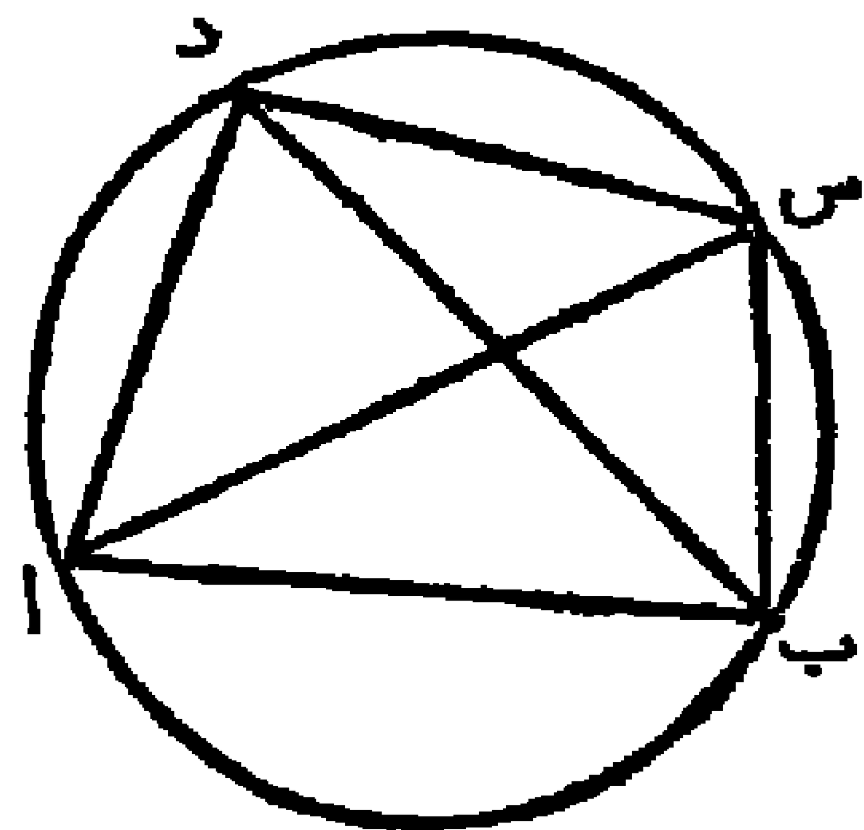


ثم اذا كانت القطعة ب ا ى د اصغر من نصف دائرة . ارسم ا ق الى المركز واخرجهُ الى س وارسم س ى فالقطعة ب ا د س هي اكبر من نصف دائرة والزاويتان فيها ب ا س ب ى س متساويتان حسبما تقدم وس ب ى د ايضاً اكبر من نصف دائرة والزاويتان فيها س ا د س ى د متساويتان ايضاً فالكل ب ا د يعدل الكل ب ى د

القضية الثانية والعشرون . ن

اذا رُسِم في دائرة شكلٌ ذو اربعة اضلاع فالزاويتان المتقابلتان منهُ يعدلان معًا قائمتين

ليكن ا د س ب ذا اربعة اضلاع في دائرة فكل اثنتين متقابلتين من زواياهُ تعدلان معًا قائمتين . ارسم ا س ود ب فالزاوية س ا ب تعدل س د ب (ق ا ٢ ك ٣) والزاوية ا س ب تعدل ا د ب فالكل ا د س يعدل الزاويتين س ا ب ا س ب . اضف الى كل واحدة منها ا ب س فلنا ا ب س مع ا د س تعدل ا ب س مع س ا ب مع ب س ا وهذه الثلاث تعدل قائمتين (ق ٣٢ ك ١) فاذًا ا ب س ا د س معًا تعدلان قائمتين . وهكذا يبرهن ان د ا ب د س ب تعدلان قائمتين



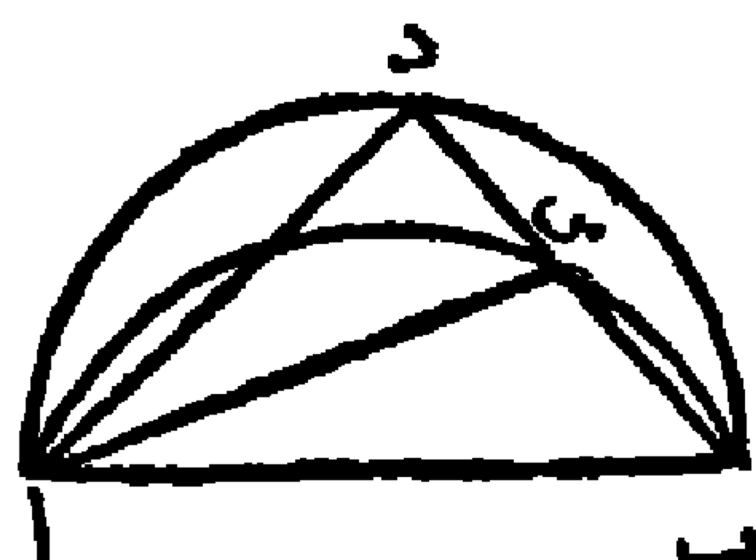
فرعٌ اول . اذا أُخرج ضلعٌ من شكل ذي اربعة اضلاع مرسوم في دائرة فالزاوية الخارجة تعدل الداخلة المتقابلة

فرعٌ ثانٍ . شكل ذو اربعة اضلاع كل زاويتين متقابلتين منهُ لا تعدلان قائمتين لا يُرسَم في دائرة

القضية الثالثة والعشرون. ن

لا تكون قطعتان متشابهتان على جانبٍ واحدٍ من خطٍّ مستقيم بدون ان تتطابقا

ان كان ممكنًا لتكن ا س ب ا د ب قطعتين متشابهتين على جانب واحد من الخط المستقيم ا ب وغير متطابقتين. فمن حيث ان الدائرتين ا د ب ا س ب تتقاطعان في ا و ب فلا يمكن ان تتقاطعا في نقطة اخرى (ق ١٠ ك ٣) وبالضرورة تقع احدى القطعتين داخل الاخرى

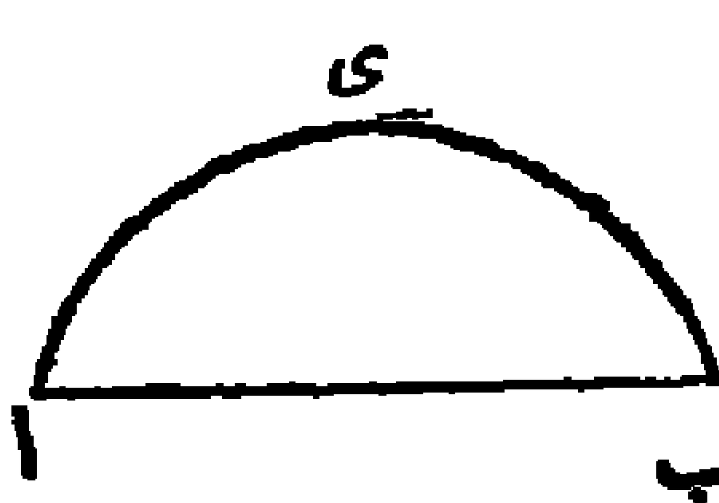


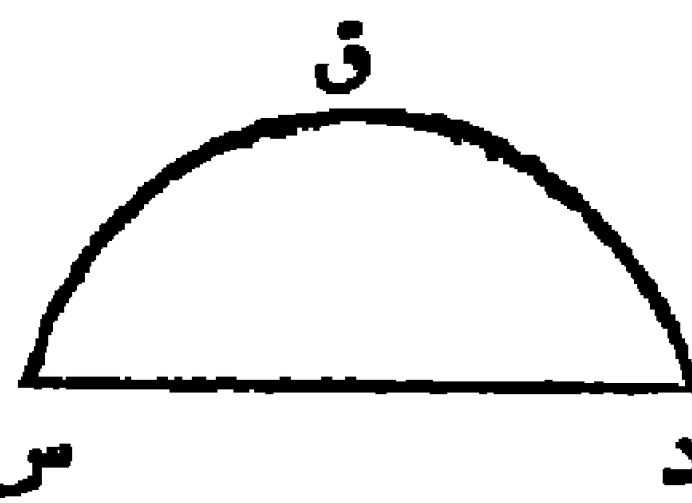
فلتقع ا س ب داخل ا د ب وارسم الخط ب س د وايضًا س ا و د ا. فمن حيث ان القطعتين متشابهتان اعني تحويان زوايا متساوية (حدّ ٩ ك ٣) فالزاوية الخارجة ا س ب تعدل الداخلة المقابلة ا د ب وذاك لا يمكن (ق ١٦ ك ١)

القضية الرابعة والعشرون. ن

قِطَعٌ متشابهة على خطوطٍ مستقيمة متساوية هي متساوية

لتكن ا ى ب س ق د قطعتين متشابهتين على خطين مستقيمين متساويين ا ب و س د فهما متساويتان لانهُ اذا وضعت القطعة ا ى ب على القطعة س ق د



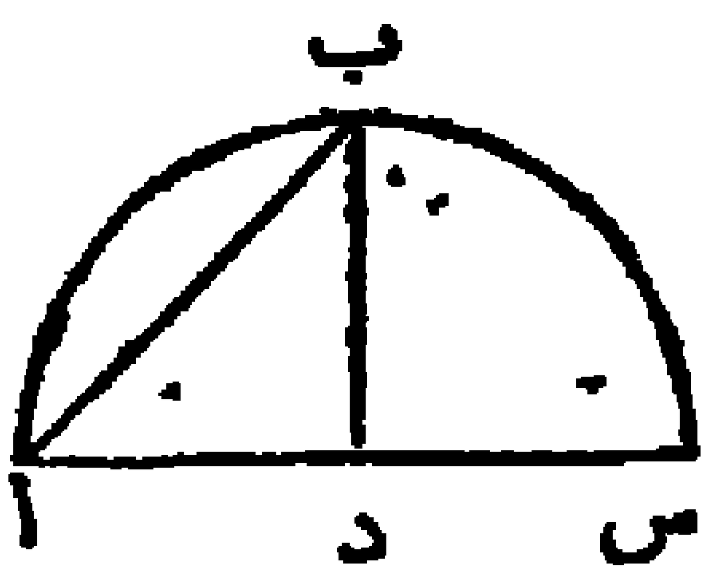


بحيث تقع النقطة ا على النقطة س والخط ا ب على الخط س د فالنقطة ب تقع على النقطة د لأنّ ا ب يعدل س د فبالضرورة تطبق القطعة ا ى ب على القطعة س ق د (ق ٢٣ ك ٣) فتعدلها

القضية الخامسة والعشرون. ع

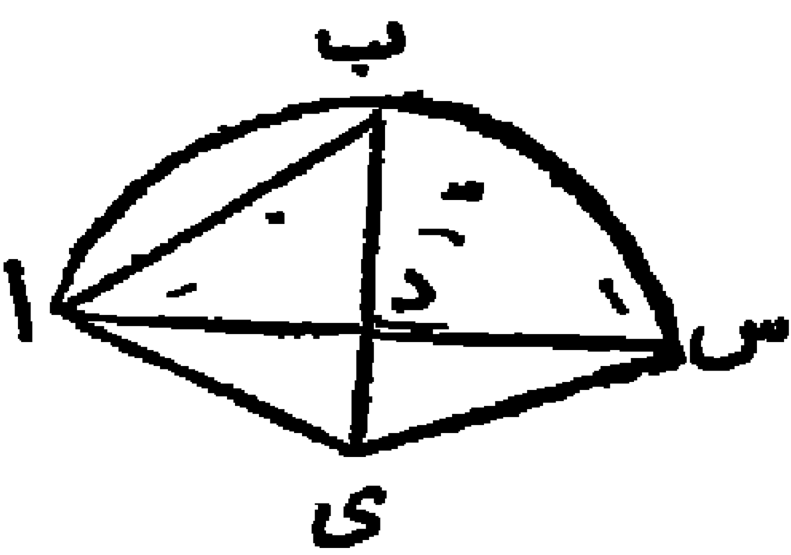
اذا فُرضت قطعة من دائرة فعلينا ان نتممها

لتكن ا ب س قطعة دائرة فعلينا ان نتم الدائرة

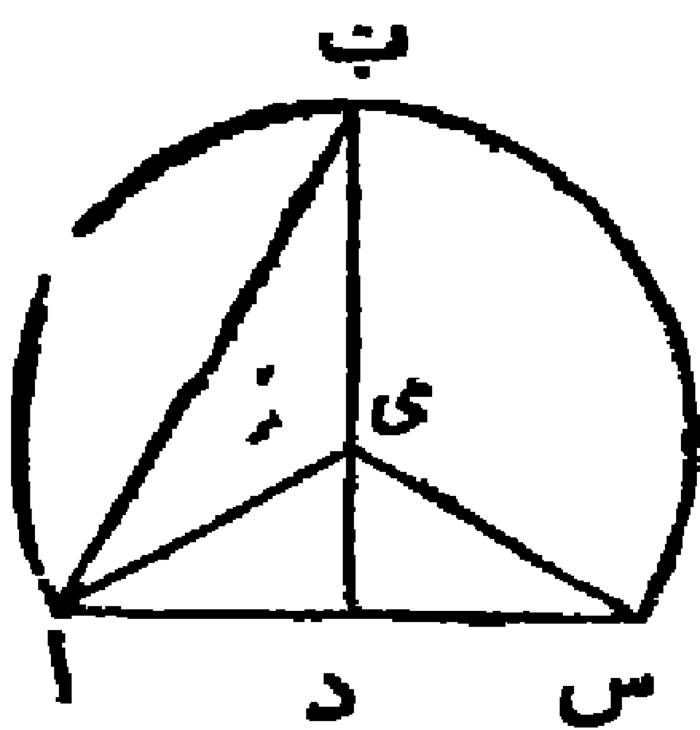


نصّف ا س في د (ق١٠ ك١) ومن د ارسم د ب عمودًا على ا س (ق١١ ك١) وارسم ا ب

ثم اوّلاً لتكن الزاويتان ا ب د ب ا د متساويتين فالخط ا د يعدل ب د (ق٦ ك١) ويعدل د س ايضًا فالخطوط الثلثة ا د د ب د س هي متساوية فتكون د مركز الدائرة (ق٩ ك٣) واذا جعلت د مركزًا وواحدًا من هذه الخطوط الثلثة نصف قطر تتم الدائرة التي كانت ا ب س قطعة منها. ومن حيث ان المركز واقع في ا س فالقطعة ا ب س انما هي نصف دائرة



ثم لتكن الزاويتان ا ب د ب ا د غير متساويتين ارسم الزاوية ب ا ى حتى تعدل ا ب د (ق٢٣ ك١) وان لزم فاخرج ب د الى ى وارسم ى س. فمن حيث ان ب ا ى تعدل ا ب ى فالخط ا ى يعدل ب ى (ق٦ ك١) ومن حيث ان ا د يعدل د س و د ى مشترك بين المثلثين ا د ى س د ى فالضلعان ا د د ى يعدلان الضلعين س د د ى اعني كل واحد يعدل نظيرهُ والزاوية ا د ى تعدل س د ى لانهما قائمتان فالقاعدة ا ى تعدل القاعدة ى س (ق٤ ك١) وا ى يعدل ب ى حسبما تقدم فالخطوط الثلثة ا ى ب ى س ى متساوية وى مركز الدائرة (ق٩ ك٣) التي كانت ا ب س قطعة منها واذا كانت الزاوية ا ب د اكبر من ب ا د فالامر واضح ان المركز واقع خارج القطعة ا ب س اعني انها اصغر من نصف دايرة

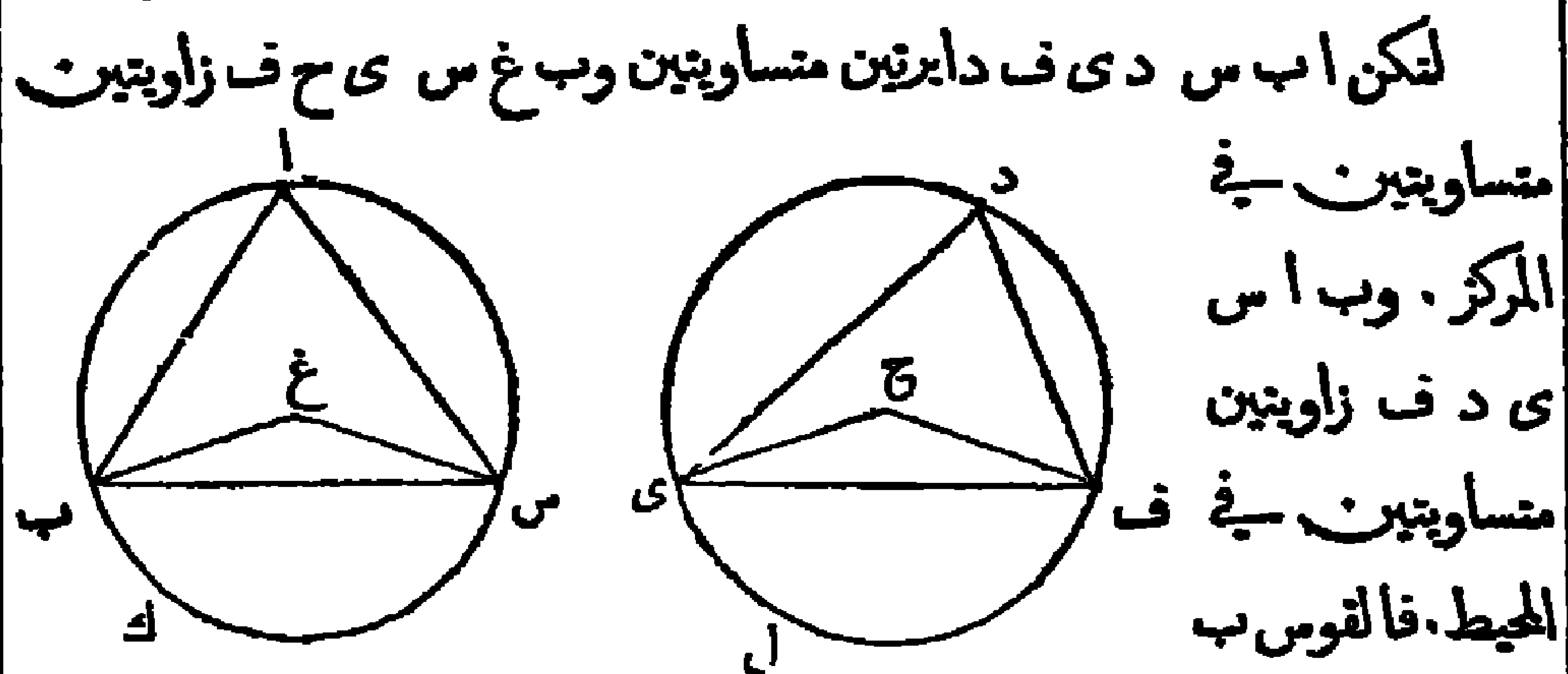


واذا كانت ا ب د اصغر من ب ا د فالمركز واقع داخل القطعة اعني هي اكبر من نصف دايرة وهكذا تتم الدايرة اذا فُرِضَت قطعة منها

القضية السادسة والعشرون . ن

زوايا متساوية في دوائر متساوية هي على اقواس متساوية ان كانت تلك الزوايا في المركز او في المحيط

لتكن ا ب س د ى ف دايرتين متساويتين وب غ س ى ح ف زاويتين متساويتين في المركز . وب ا س ى د ف زاويتين متساويتين في المحيط . فالقوس ب

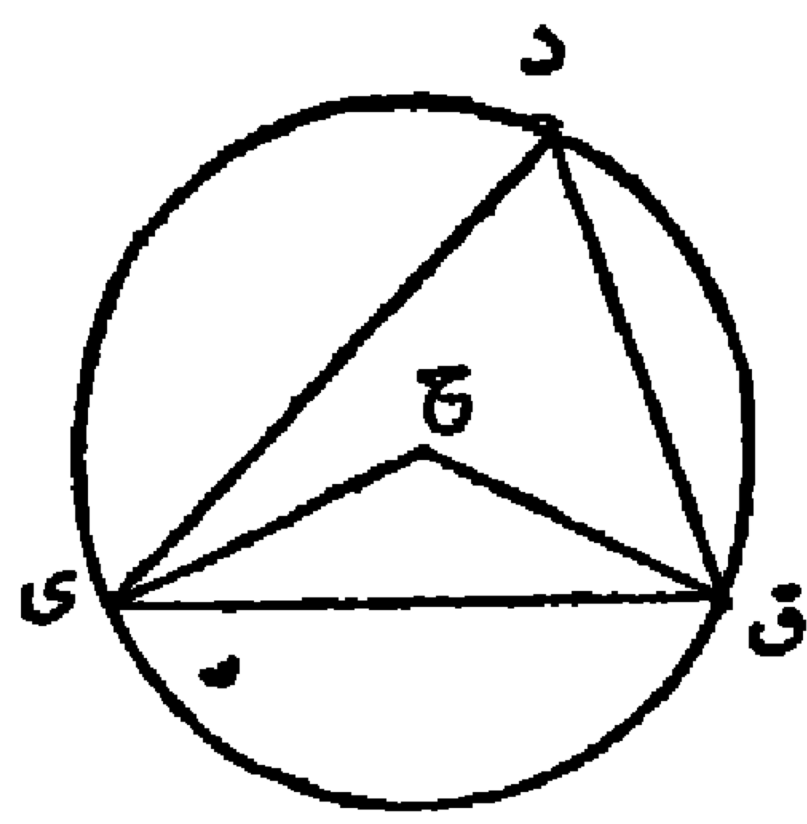


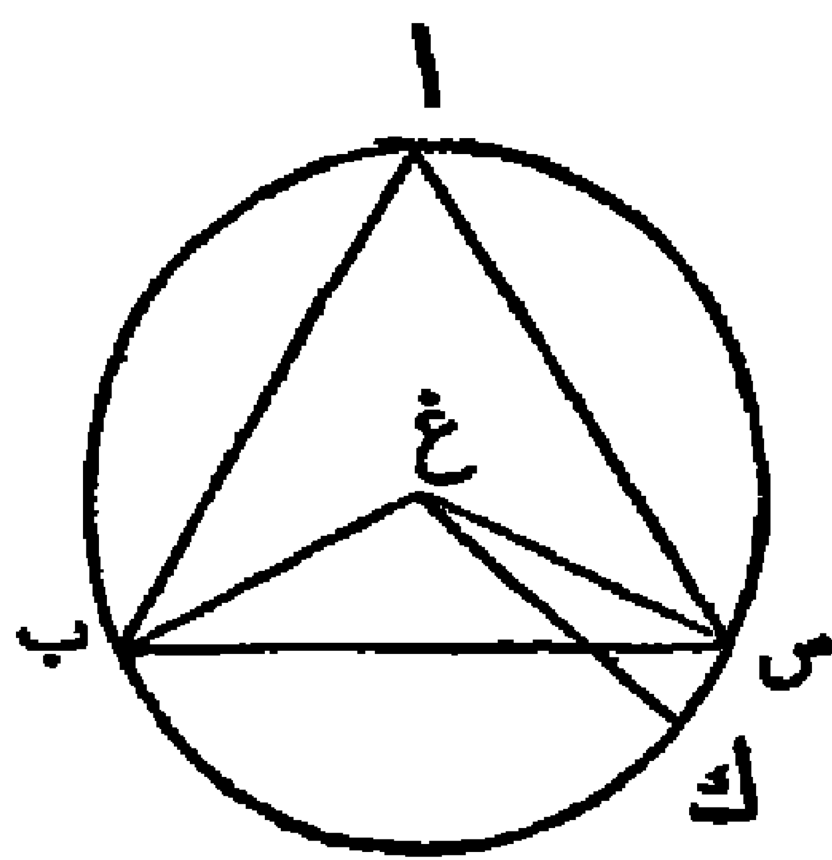
ك س يعدل القوس ى ل ف ارسم الوترين ب س ى ف . فمن حيث ان الدائرتين متساويتان فالخطوط المستقيمة المرسومة من مركزيهما متساوية . فالخطان ب غ غ س يعدلان ى ح ح ف والزاوية ب غ س تعدل ى ح ف فالقاعدة ب س تعدل القاعدة ى ف (ق ٤ ك ١) ومن حيث ان الزاوية عند ا تعدل الزاوية عند د فالقطعة ب ا س تشابه القطعة ى د ف (حد ٩ ك ٣) وهما على الخطين المتساويين ب س ى ف والقِطَع المتشابهة على خطوط متساوية هي متساوية (ق ٢٤ ك ٣) فالقطعة ب ا س تعدل القطعة ى د ف . ولكن كل الدايرة ب ا س تعدل الكل ى د ف فالبقية ب ك س تعدل البقية ى ل ف

القضية السابعة والعشرون . ن

زوايا واقعة على اقواس متساوية في دوائر متساوية هي متساوية ان كانت في المركز او في المحيط

في الدايرتين المتساويتين ا ب س د ى ق لتكن الزاويتان في المركز ب غ س



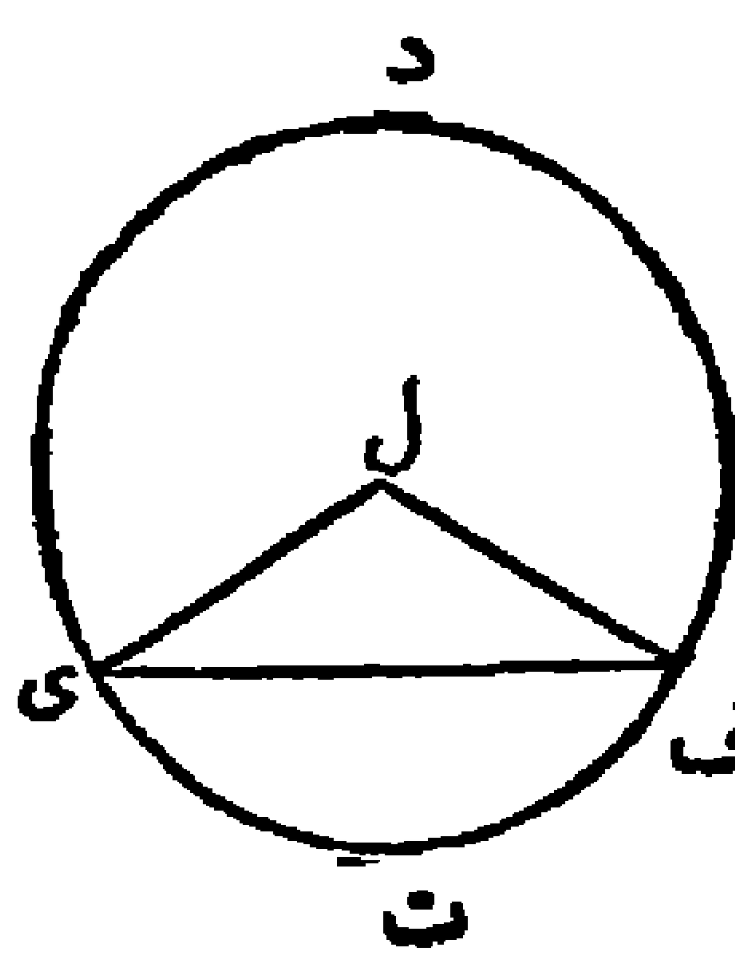


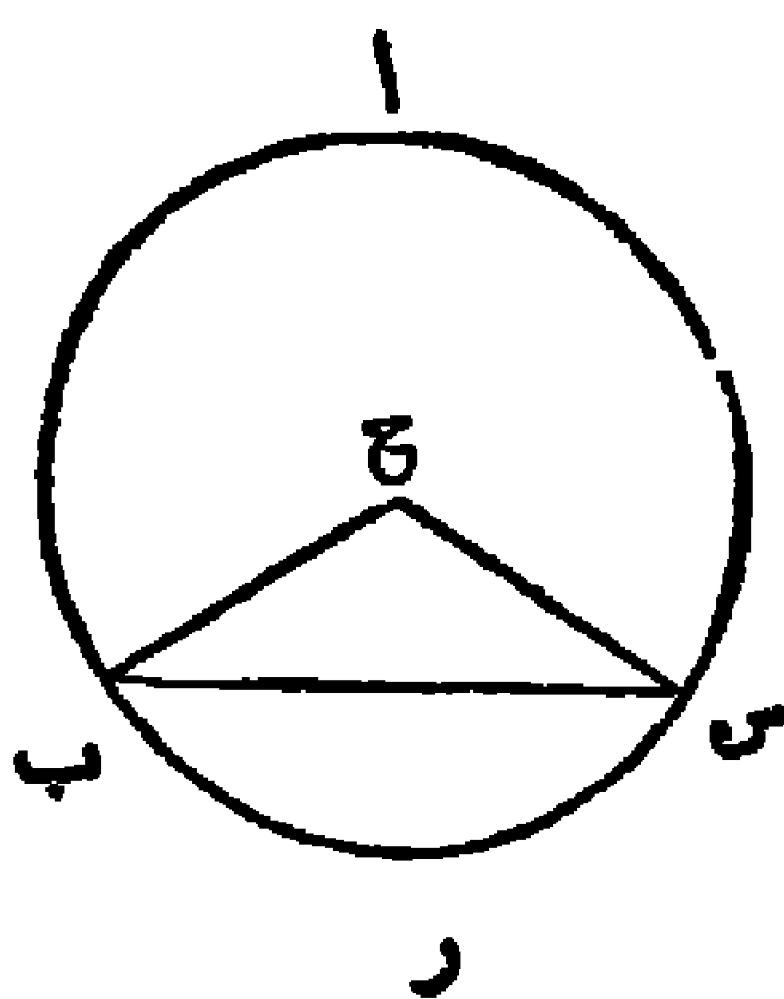
ى ح ق والزاويتان في المحيط ب ا س ى د ق على القوسين المتساويين ب س ى ق فالزاوية ب غ س تعدل ى ح ق وب ا س تعدل ى د ق

الزاوية ب غ س اذا عدلت ى ح ق فالامر واضح (ق ٢٠ ك ٣) ان ب ا س تعدل ى د ق والاَّ فتكون احداها اكبر من الاخرى. لتكن ب غ س اكبرها وعلى النقطة غ من الخطّ المستقيم ب غ ارسم الزاوية ب غ ك حتى تعدل ى ح ق (ق ٢٣ ك ١). فمن حيث ان الزوايا المتساوية عند المركز هي على اقواس متساوية (ق ٢٦ ك ٣) فالقوس ب ك يعدل القوس ى ق. وقد فُرِض ان ى ق يعدل ب س فالقوس ب ك يعدل ب س ايضًا اي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال. فلا يمكن ان تكون ب غ س ى ح ق غير متساويتين اي هما متساويتان. والزاوية عند ا هي نصف الزاوية ب غ س والزاوية عند د هي نصف ى ح ق فالزاوية عند ا تعدل الزاوية عند د

القضية الثامنة والعشرون. ن

خطوط مستقيمة متساوية في دوائر متساوية تقطع اجزاء متساوية الاكبر يعدل الاكبر والاصغر يعدل الاصغر





ليكن ب س ى ف خطين مستقيمين متساويين في دائرتين متساويتين ا ب س د ى ف ولينطعا القوسين الاكبرين ب ا س ى د ف والاصغرين ب ر س ى ث ف فالقوس ب ا س يعدل ى د ف

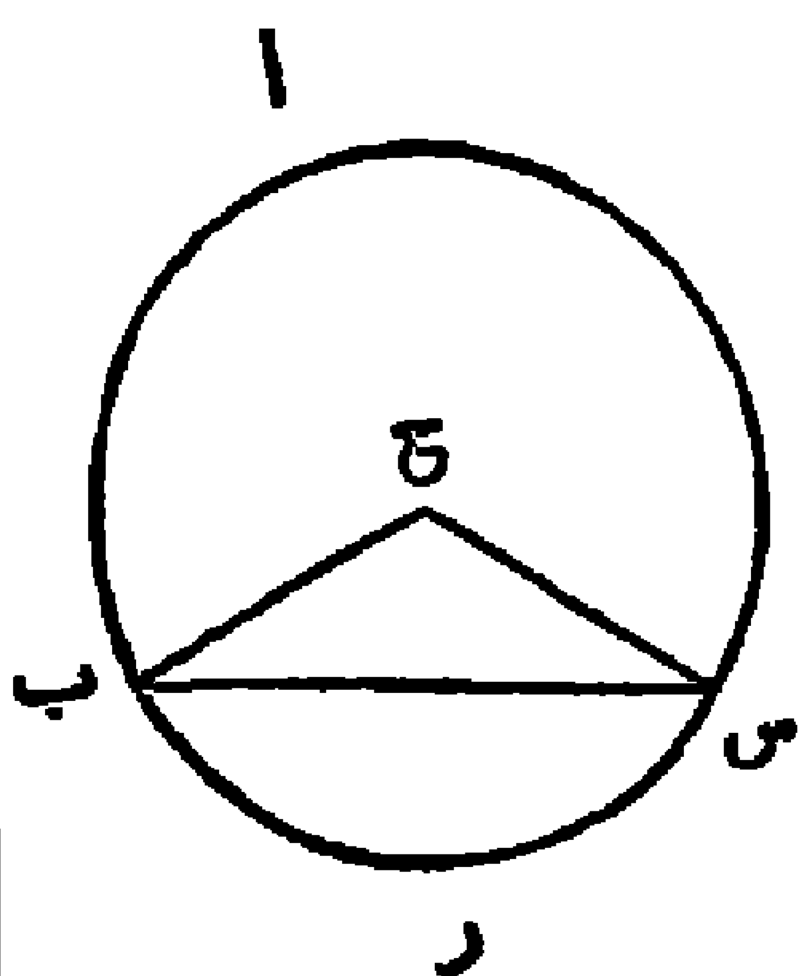
وب رس يعدل ى ث ف

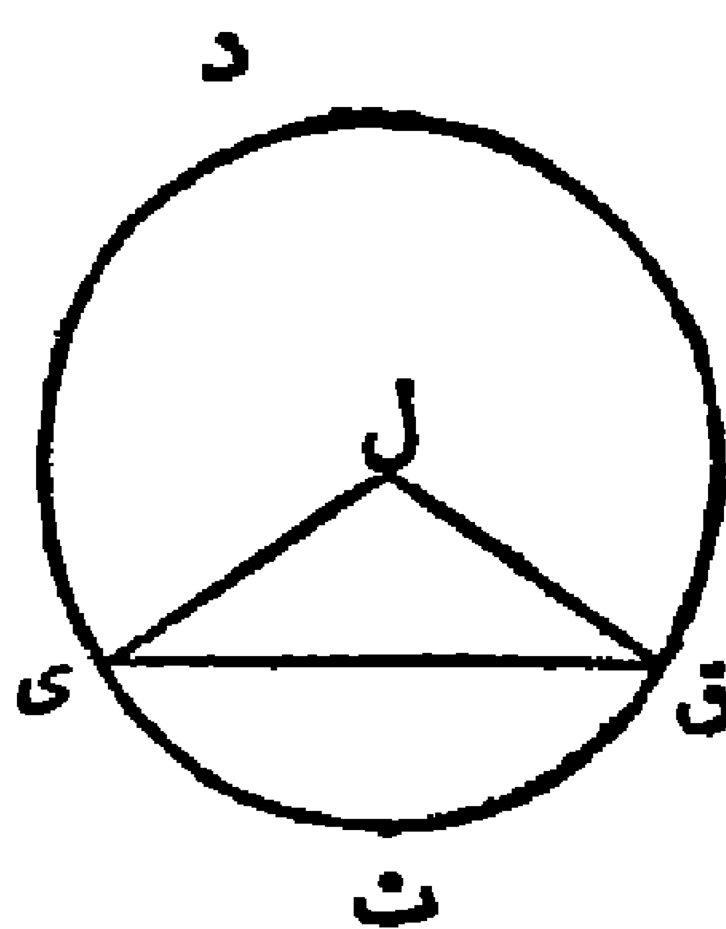
استعلم المركزين ح ول (ق١ ك٣) وارسم ح ب ح س ل ى ل ف. فمن حيث ان الدايرتين متساويتان فالخطوط المستقيمة المرسومة من مركزيهما هي متساوية فالخطان ب ح ح س يعدلان ى ل ل ف. وقد فُرِض ان القاعدة ب س تعدل القاعدة ى ف فالزاوية بَ ح س تعدل الزاوية ى ل ف (ق٨ ك١) والزوايا المتساوية عند المركز هي على اقواس متساوية (ق٢٦ ك٣) فالقوس بَ ر س يعدل القوس ى ث ف والدايرة ا ب س تعدل الدايرة د ى ف فالباقي ب ا س يعدل الباقي ى د ف

القضية التاسعة والعشرون. ن

اقواس متساوية في دوائر متساوية تقابلها خطوطٌ مستقيمة متساوية

لتكن ا بَ س د ى ق دايرتين متساويتين والقوسان بَ ر س ى ث ق متساويتين فالخطان المستقيمان المقابلان لهما ب س ى ق ايضًا متساويان



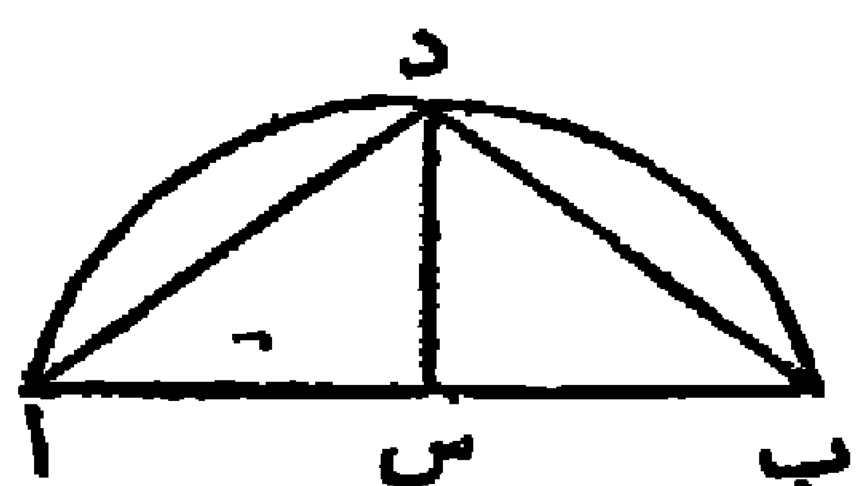


استعلم المركزين ح ول (ق١ ك٣) وارسم ح ب ح س ل ى ل ق. فمن حيث ان القوس ب ر س يعدل القوس ى ث ق والزاوية ب ح س تعدل الزاوية ى ل ق (ق٢٧ ك٣) وح ب ح س يعدلان ل ى ل ق لانها أنصاف اقطار دايرتين متساويتين فالقاعدة ب س تعدل القاعدة ى ق (ق٤ ك١)

القضية الثلثون. ع

علينا ان ننصّف قوسًا مفروضًا اي ان تقسمهُ الى قسمين متماثلين

ليكن ا د ب القوس المفروض. فعلينا ان ننصفهُ



ارسم ا ب ونصّفهُ في س (ق ١٠ ك ١) وارسم س د عمودًا على ا ب وارسم ا د د ب فقد تنصّف القوس ا د ب في النقطة د

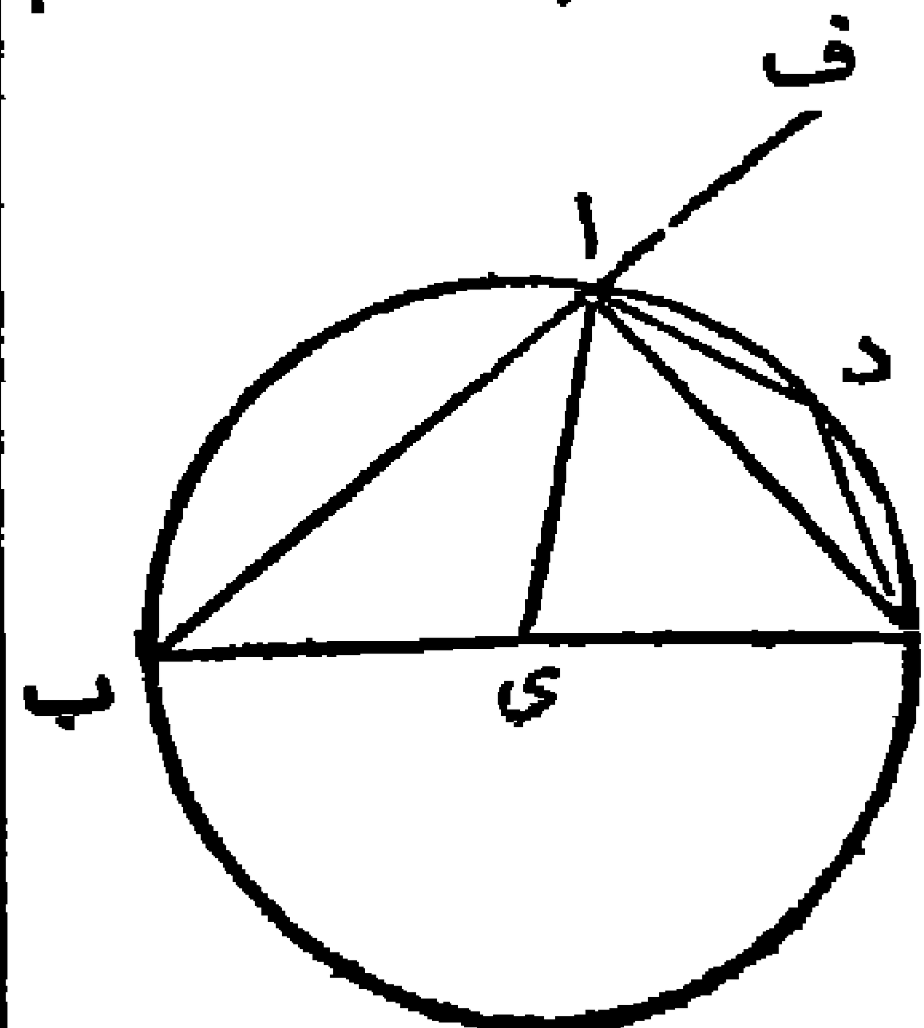
لان ا س يعدل س ب وس د مشترك بين المثلثين ا س د ب س د والزاوية ا س د تعدل الزاوية ب س د لأنَّ كل واحدة منهما قائمة فالقاعدة ا د تعدل القاعدة ب د (ق ٤ ك ١) والخطوط المستقيمة المتساوية تقطع اقواسًا متساوية (ق ٢٨ ك ٣) والاكبر يعدل الاكبر والاصغر يعدل الاصغر وكل واحد من ا د ب د اصغر من نصف دايرة لأنَّ د س يمرُّ بالمركز (فرع ق ١ ك ٣) فالقوس ا د يعدل القوس د ب فقد تنصف ا د ب في د

تعليقة. وعلى هذه الكيفية كل واحد من النصفين ا د د ب يتنصّف ايضًا فيقسَم قوس مفروض الى اربعة او ثمانية اجزاء او الى ستة عشر جزءًا متساوية وهلمَّ جرًّا

القضية الحادية والثلثون

الزاوية المرسومة في نصف دائرة هي قائمة والمرسومة في قطعة اكبر من نصف دائرة هي اصغر من قائمة والمرسومة في قطعة اصغر من نصف دائرة هي اكبر من قائمة

لتكن ا ب س د دايرة وب س قطرها وى مركزها. ارسم س ا الذي يقسم الدايرة الى قطعتين ا ب س ا د س وارسم ب ا ا د د س. فالزاوية في نصف الدايرة ب ا س هي قائمة والزاوية في القطعة ا ب س التي هي اكبر من نصف الدايرة اصغر من قائمة والزاوية في القطعة ا د س التي هي اصغر من نصف الدايرة اكبر من قائمة



ارسم ا ى واخرج ب ا الى ف. فمن حيث ان ب ى يعدل ا ى فالزاوية ى ا ب تعدل ى ب ا (ق ٥ ك ١) ولانَّ س ى

يعدل ا ى فالزاوية ى س ا تعدل ى ا س فالكل ب ا س يعدل الزاويتين ا ب س ا س ب. ولكن الزاوية ف ا س الخارجة من المثلث ا ب س تعدل الزاويتين ا ب س ا س ب (ق٣٢ ك١) فالزاوية ب ا س تعدل ف ا س وكل واحدة منها قائمة (حد٧ ك١) فالزاوية ب ا س في نصف الدائرة اما هي قائمة

ومن حيث ان الزاويتين ا ب س ب ا س من المثلث ا ب س هما معًا اقل من قائمتين (ق١٧ ك١) وب ا س قائمة فتكون ا ب س اصغر من قائمة فالزاوية في القطعة ا ب س التي هي اكبر من نصف دائرة هي اصغر من قائمة

ومن حيث ان ا ب س د هو ذو اربعة اضلاع في دائرة فكل اثنين من زواياه المتقابلة تعدلان قائمتين (ق٢٢ ك٣) فالزاويتان ا ب س ا د س تعدلان معًا قائمتين وقد تبرهن ان ا ب س اصغر من قائمة فتكون ا د س اكبر من قائمة

فرع. يتضح من هذه القضية ان زاوية واحدة من مثلث ان عدلت مجتمع الاخريين فهي قائمة لانّ الزاوية التي تليها تعدل الاخريين ايضًا ومتى كانت الزاويتان المتواليتان متساويتين فكل واحدة منها قائمة

القضية الثانية والثلاثون

اذا مسّ خطٌّ مستقيم دائرةً ورُسِم من نقطة المماسّة خطٌّ مستقيم قاطع الدائرة فالزوايا الحادثة بين المماس والقاطع تعدل الزوايا في القِطَع المتبادلة من الدائرة

ليكن الخط المستقيم ى ف مماسًّا للدائرة ا ب س د ومن ب نقطة المماسة ليُرسَم الخط المستقيم ب د قاطعها فالزاوية ف ب د تعدل الزاوية في القطعة د ا ب المتبادلة والزاوية د ب ى تعدل الزاوية في القطعة ب س د المتبادلة

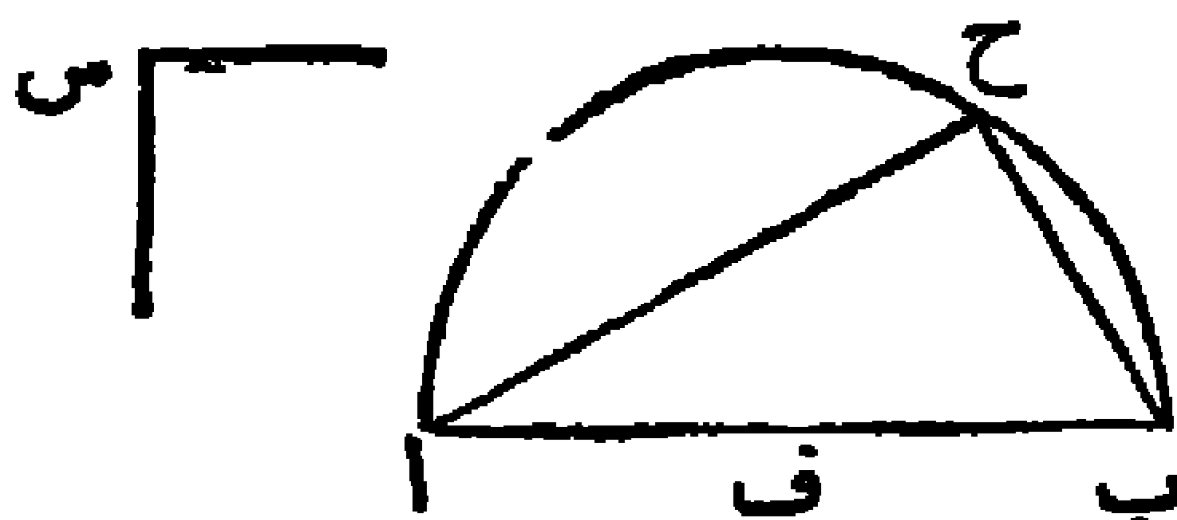
من النقطة ب ارسم ب ا عمودًا على ى ف (ق١١ ك١) وفي القوس ب د عيّن انه

نقطة شئت كالنقطة س وارسم الخطوط المستقيمة ا د د س س ب . فمن حيث ان الخط المستقيم ى ف يمس الدائرة ا ب س د في النقطة ب وقد رُسِم ب ا عمودًا على المماس من نقطة المماسة فمركز الدائرة في الخط ب ا (ق ١٩ ك ٣) والزاوية ا د ب هي في نصف دايرة وهي قائمة (ق ٢١ ك ٣) والزاويتان الاخريان د ا ب ا ب د تعدلان قائمة (ق ٣٢ ك ١) والزاوية ا ب ف قائمة فتعدل الزاويتين ب ا د ا ب د . اطرح الزاوية المشتركة ا ب د فالباقية د ب ف تعدل الباقية ب ا د في القطعة المتبادلة من الدايرة . ومن حيث ان الشكل ا ب س د ذو اربعة اضلاع في دايرة فالزاويتان المتقابلتان ب ا د ب س د معًا تعدلان قائمتين (ق ٢٢ ك ٣) ولذلك تعدلان ايضًا د ب ف د ب ى (ق ١٣ ك ١) وقد تبرهن ان د ب ف تعدل ب ا د فالباقية د ب ى تعدل الباقية ب س د في القطعة المتبادلة من الدايرة

القضية الثالثة والثلثون . ع

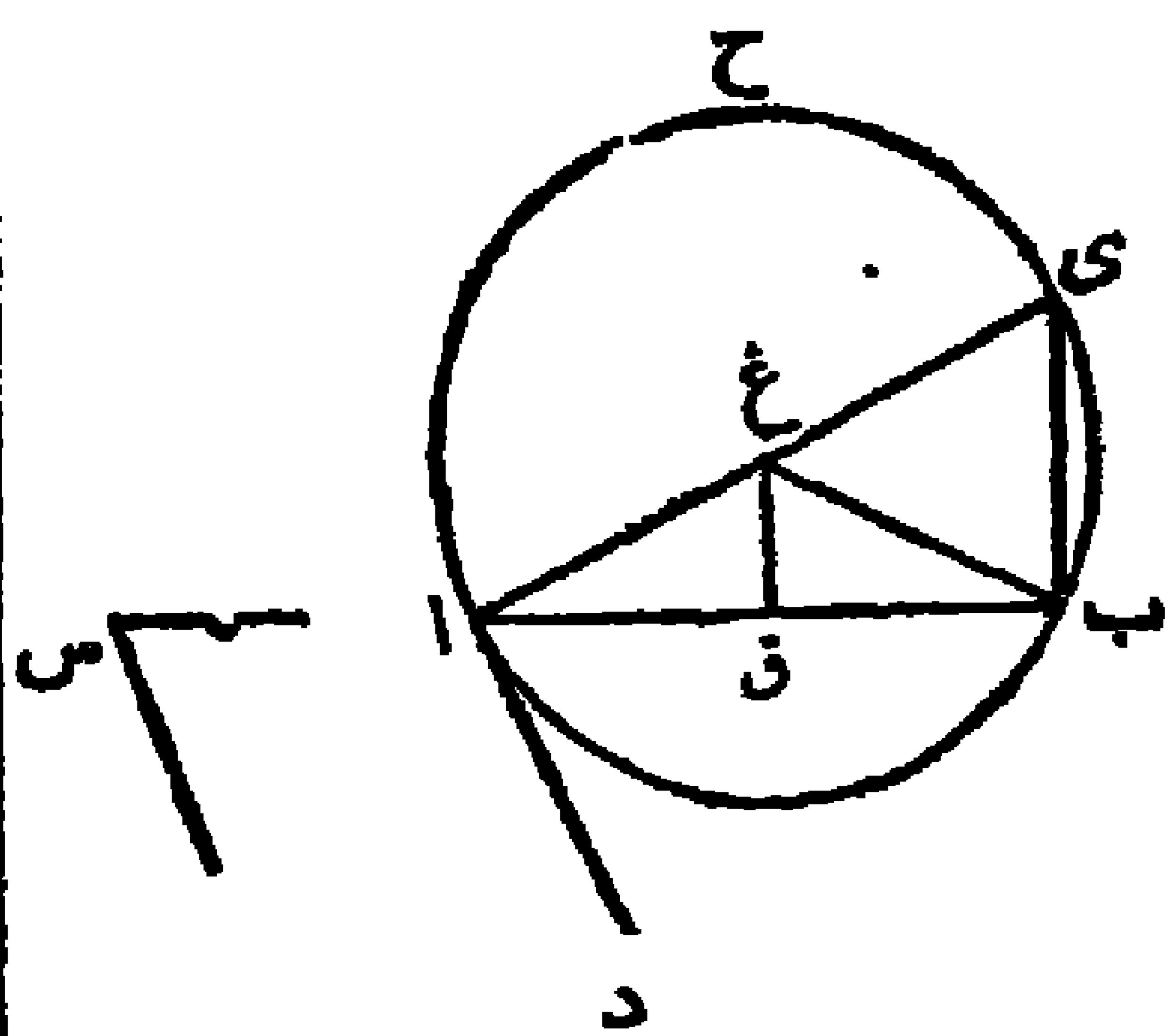
علينا ان نرسم على خطٍّ مستقيم مفروض قِطْعَةَ دائرةٍ فيها زاوية تعدل زاوية بسيطة مفروضة

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض وس الزاوية المفروضة . علينا ان نرسم على ا ب قطعة دايرة فيها زاوية تعدل الزاوية عند س



اولًا لتكن الزاوية عند س قائمة .
نَصِّفْ ا ب في ف (ق ١٠ ك ١) ثم اجعل ف مركزًا وف ب بعدًا وارسم الدايرة ا ح ب فالزاوية ا ح ب انما هي قائمة لانها في نصف دايرة (ق ٢١ ك ٣) وهي تعدل الزاوية القائمة عند س

ثانيًا ان لم تكن الزاوية س قائمة فعند النقطة ا من الخط ا ب اجعل الزاوية ب ا د تعدل س (ق ٢٣ ك ١) ومن النقطة ا ارسم ا ى عمودًا على ا د (ق ١١ ك ١)

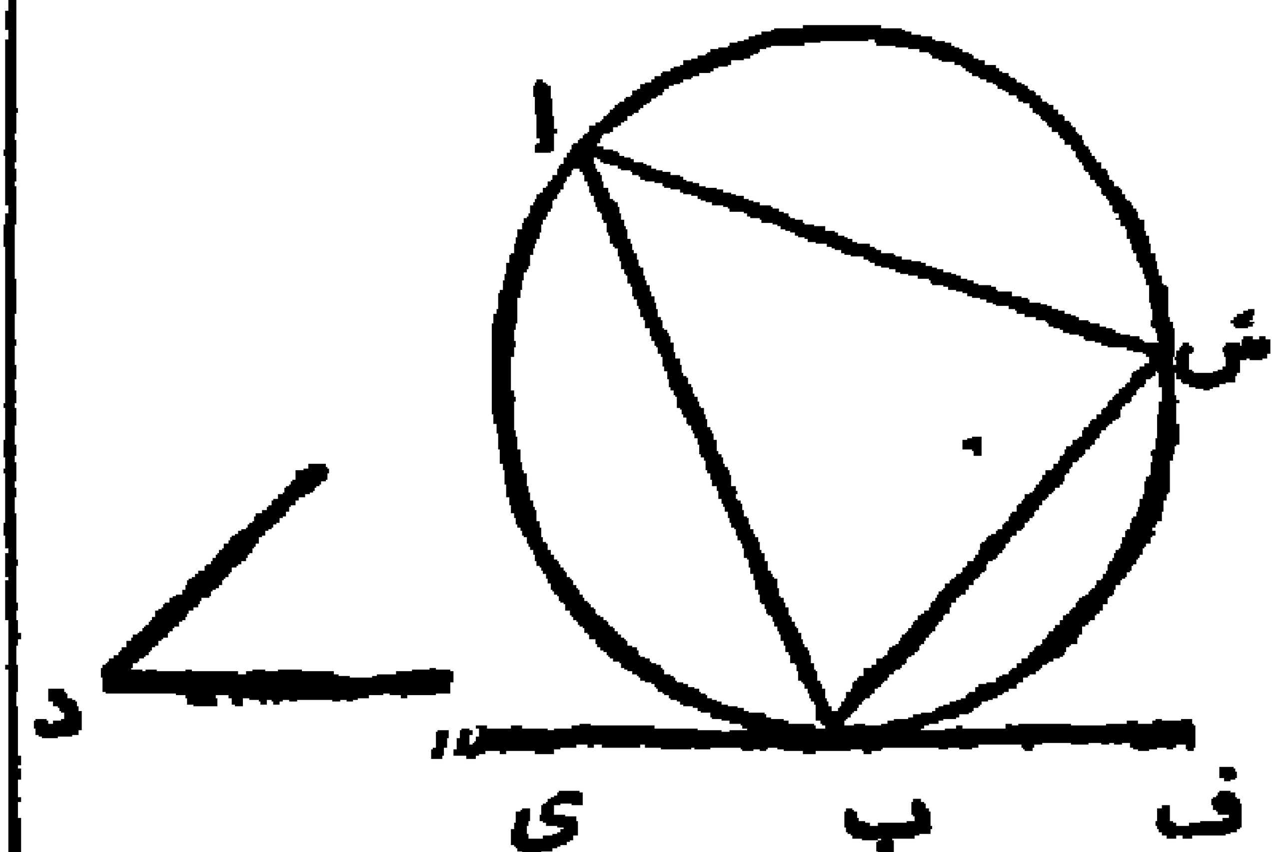


تَصِّف اب في ق (ق٠ ك١) ومن ق ارسم ق غ عمودًا على اب (ق١١ ك١) وارسم غ ب. فمن حيث ان اق يعدل ق ب وق ع مشترك بين المثلثين اق غ ب ق غ فالضلعان اق ق غ يعدلان الضلعين ب ق ق غ والزاوية اق غ تعدل ب ق ع فالقاعدة اغ تعدل القاعدة غ ب (ق٤ ك١) والدائرة المرسومة على المركز ع وعلى البعد غ ا تمرّ في النقطة ب. فلتكن اح ب هذه الدائرة. فمن حيث انهُ قد رُسِم اد عمودًا من طرف القطر اى فهو مماس الدائرة (فرع اول ق١٦ ك٣) ومن حيث انهُ قد رُسم القاطع اب من نقطة المماسّة فالزاوية د اب تعدل الزاوية في القطعة اح ب المتبادلة (ق٣٢ ك٣) والزاوية د اب تعدل الزاوية عند س فالزاوية عند س تعدل الزاوية في القطعة اح ب. فقد رُسِم على الخطّ المستقيم المفروض اب قطعة دائرة فيها زاوية تعدل الزاوية المفروضة عند س

القضية الرابعة والثلثون ٠ع

علينا ان نقطع من دائرةٍ مفروضة قِطعةً فيها زاوية تعدل زاوية بسيطة مفروضة

لتكن اب س الدائرة المفروضة ود الزاوية البسيطة المفروضة. علينا ان نقطع من الدائرة اب س قطعةً فيها زاوية تعدل الزاوية عند د. ارسم المماسّ ى ف (ق١٧ ك٣) حتى يمسّ الدائرة في النقطة ب ومن النقطة ب في الخط ى ف اجعل الزاوية ف ب س تعدل د

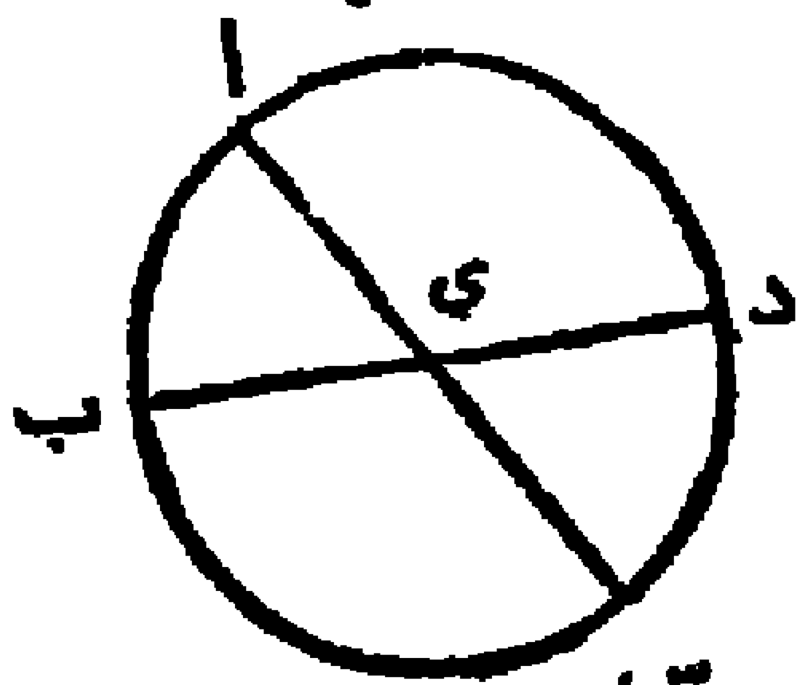


(ق ٣٢ ك ١). فمن حيث ان الخطّ المستقيم ى ف يمسّ الدائرة ا ب س وقد رُسِم من نقطة المماسّة الخط ب س قاطعًا فالزاوية ف ب س تعدل الزاوية في القطعة ب ا س المتبادلة (ق ٣٢ ك ٣) والزاوية ف ب س تعدل الزاوية عند د فالزاوية في القطعة ب ا س تعدل الزاوية عند د فقد قُطِعَتْ من الدائرة ا ب س القطعة ب ا س فيها زاوية تعدل الزاوية المفروضة عند د

القضية الخامسة والثلثون. ن

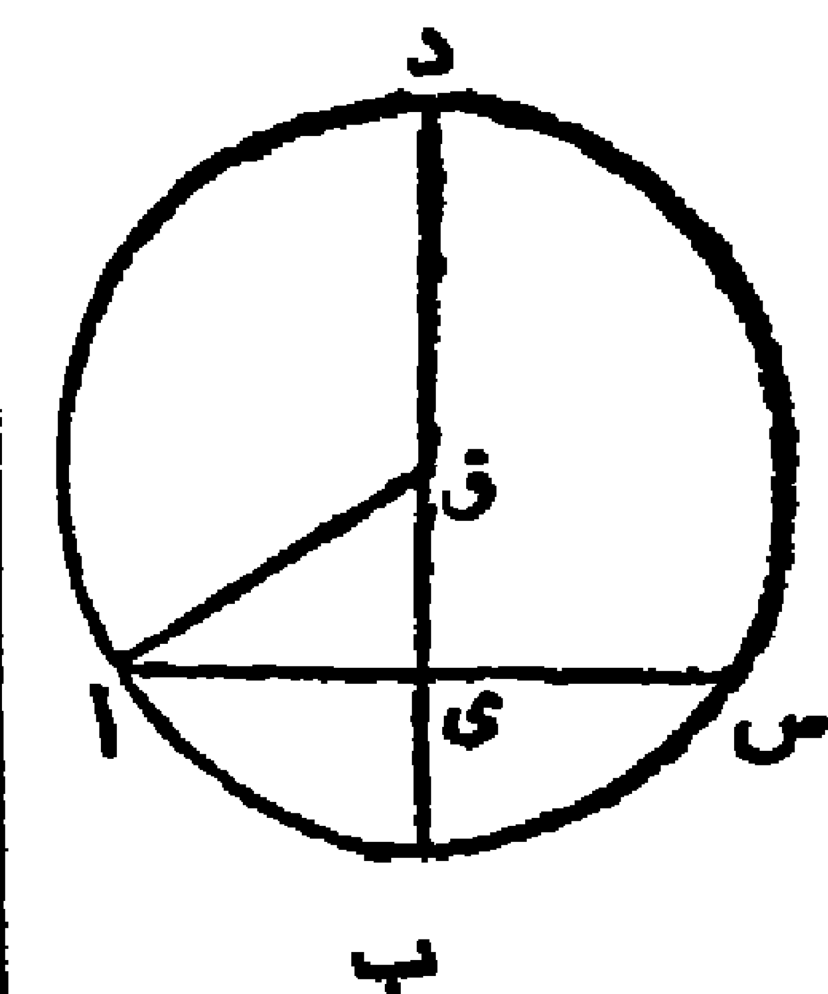
اذا تقاطع خطّان مستقيمان في دائرةٍ فالقائم الزوايا مسطح قسمَي احدهما يعدل القائم الزوايا مسطح قسمَي الآخر

ليتقاطع الخطان المستقيمان ا س ب د في الدائرة ا ب س د في النقطة ى فالقائم الزوايا ا ى في ى س يعدل القائم الزوايا ب ى في ى د



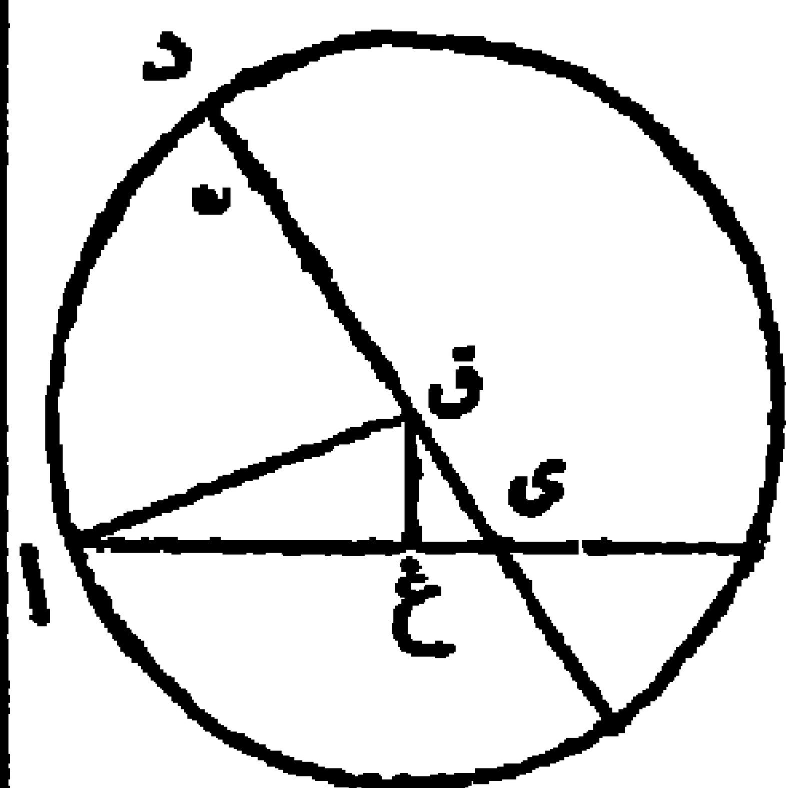
اذا مرّ كل واحد منهما في المركز وكان ذلك المركز ى فالامر واضح ان الخطوط ا ى ى س ب ى ى د متساوية والقائم الزوايا ا ى في ى س يعدل القائم الزوايا ب ى في ى د

ثم لنفرض مرور احدهما ب د في المركز وليكن عمودًا على الاخر ا س الذي لا يمرّ بالمركز وليقطعهُ في النقطة ى. فاذا تنصف ب د في ق فالنقطة ق هي مركز الدائرة (فرع ق ١ ك ٣) ارسم ا ق. فمن حيث ان الخط ب د المارّ بالمركز هو عمود على ا س الذي لا يمرّ بالمركز ويقطعهُ في ى فالقسمان ا ى ى س متساويان (ق ٣ ك ٣) ومن حيث ان الخطّ المستقيم ب د قد انقسم الى قسمين متساويَين في ق

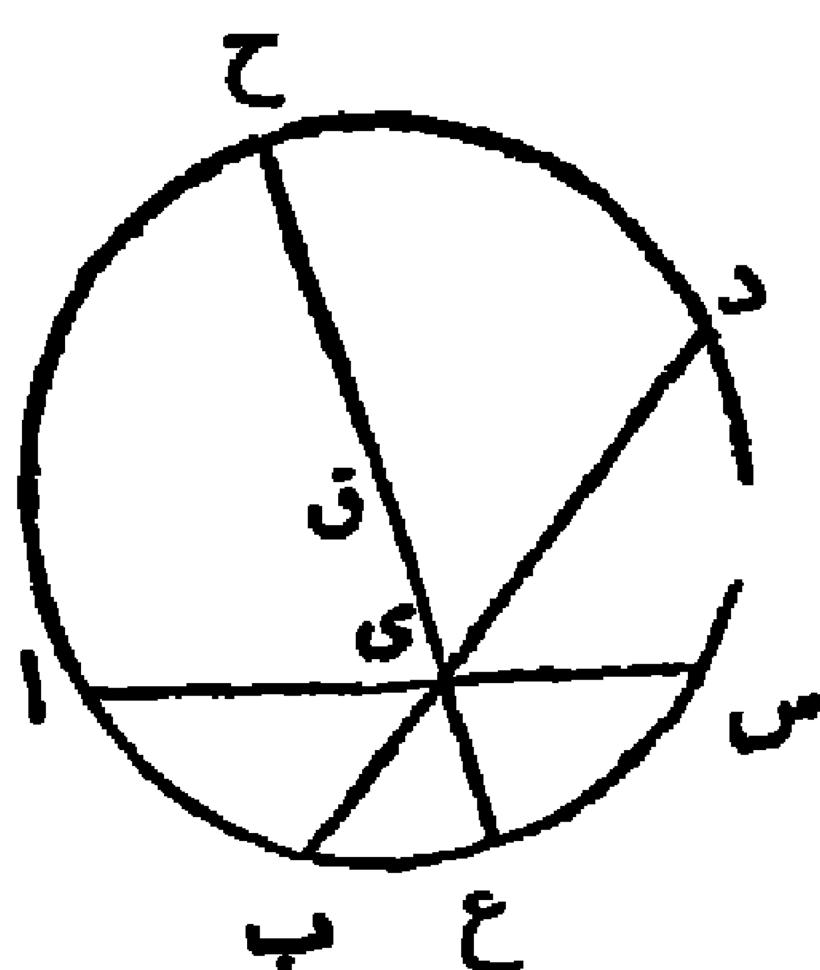


وغير متساويَين في ى (ق ٥ ك ٢) فالقائم الزوايا ب ى × ى د + ى ق^2 = ق ب^2 = ا ق^2 ولكن ا ق^2 = ا ى^2 + ى ق^2 (ق ٤٧ ك ١) فالقائم الزوايا ب ى × ى د +

ى ق² = ا ى² + ى ق². اطرح ى ق² من الجانبين فالباقي ب ى × ى د = ا ى² = ا ى × ى س



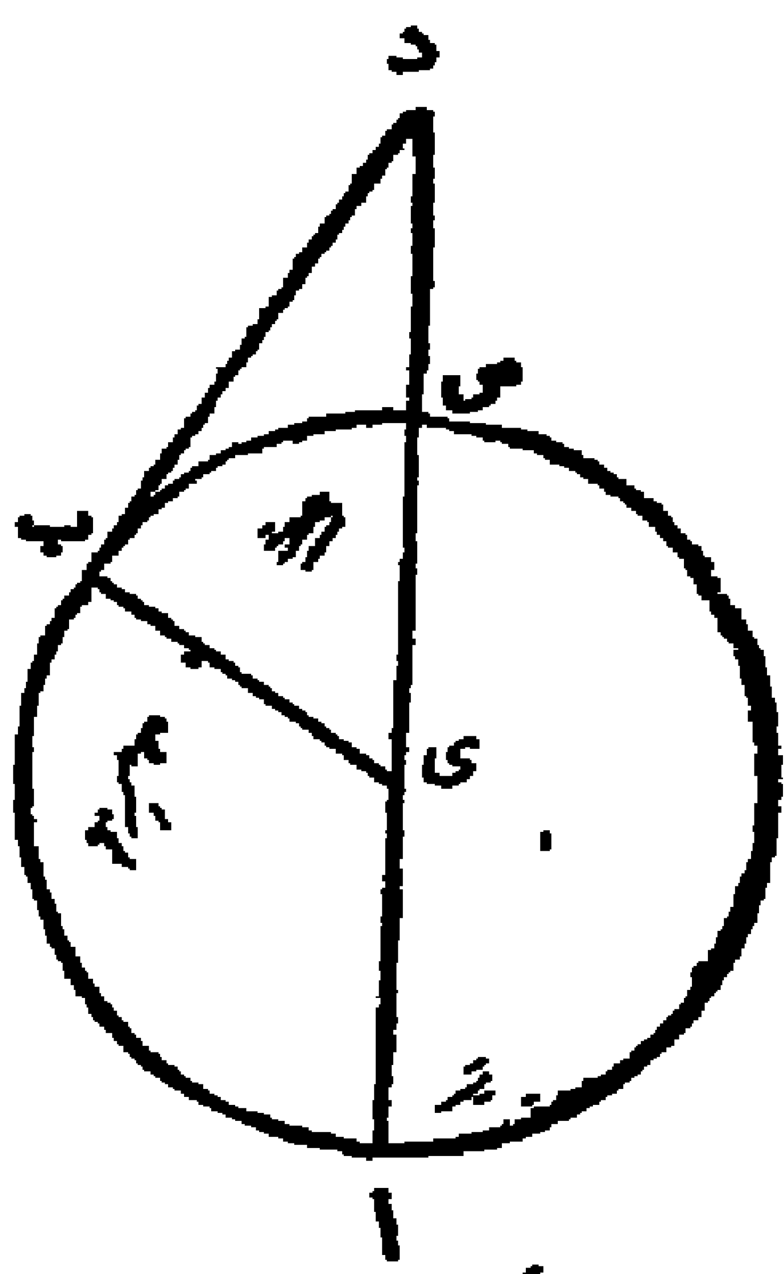
ثم لنفرض ان ب د الذي يمرّ بالمركز يقطع ا س الذي لا يمرّ بالمركز في النقطة ى ولكنهُ ليس عموداً عليهِ. فاذا تنصف ب د في ق فالنقطة ق هي مركز الدائرة. ارسم ا ق ومن ق ارسم ق غ عموداً على ا س (ق ١٢ ك ١) فالقسم ا غ يعدل القسم غ س (ق ٣ ك ٣) فالقائم الزوايا ا ى × ى س + ى غ² = ا غ². اضف اليهما غ ق² فالقائم الزوايا ا ى × ى س + غ ى² + غ ق² = ا غ² + غ ق² وا غ² + غ ق² = ا ق² وى غ² + غ ق² = ى ق² فالقائم الزوايا ا ى × ى س + ى ق² = ا ق² = ق ب². وق ب² = ب ى × ى د + ى ق² (ق ٥ ك ٢) فالقائم الزوايا ا ى × ى س + ى ق² = ب ى × ى د + ى ق². إطرح ى ق² من الجانبين فالباقي ا ى × ى س = ب ى × ى د



اخيراً ان لم يمرّ احد الخطين المستقيمين ا س ب د في المركز فاستعلم المركز ق ومن ى نقطة تقاطع الخطين ا س ب د ارسم القطر ع ى ق ح فكما تقدم ا ى × ى س = ع ى × ى ح وب ى × ى د = ع ى × ى ح فحسب الاولية الاولى ا ى × ى س = ب ى × ى د

القضية السادسة والثلثون . ن

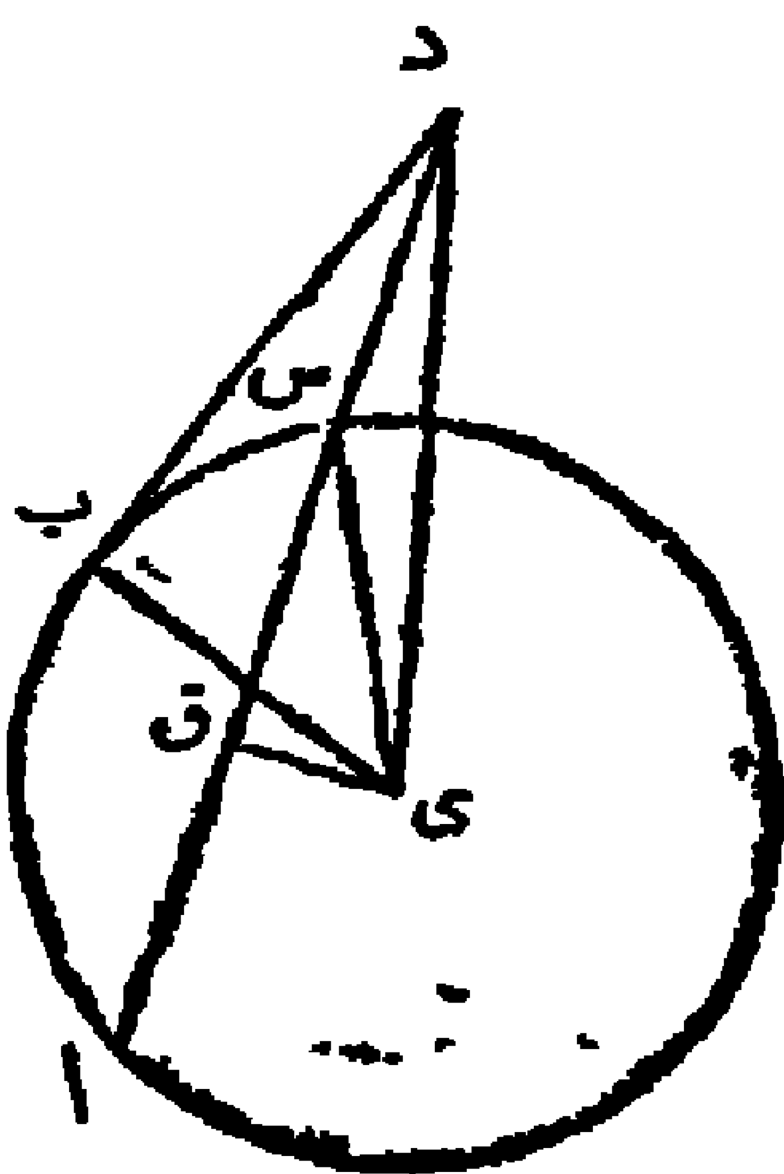
اذا رُسِم من نقطةٍ خارج دائرةٍ خطّان مستقيمان احدهما يقطع الدائرة والآخر يمسّها فالقائم الزوايا مسطح كل الخط القاطع في القسم منهُ الواقع خارج الدائرة يعدل مربّع الخط الماس



لتكن د نقطةً خارج الدائرة ا ب س وليُرسم منها الخط المستقيم د س ا حتى يقطع الدائرة والخط المستقيم د ب حتى يمسّها فالقائم الزوايا ا د×د س يعدل مربع د ب

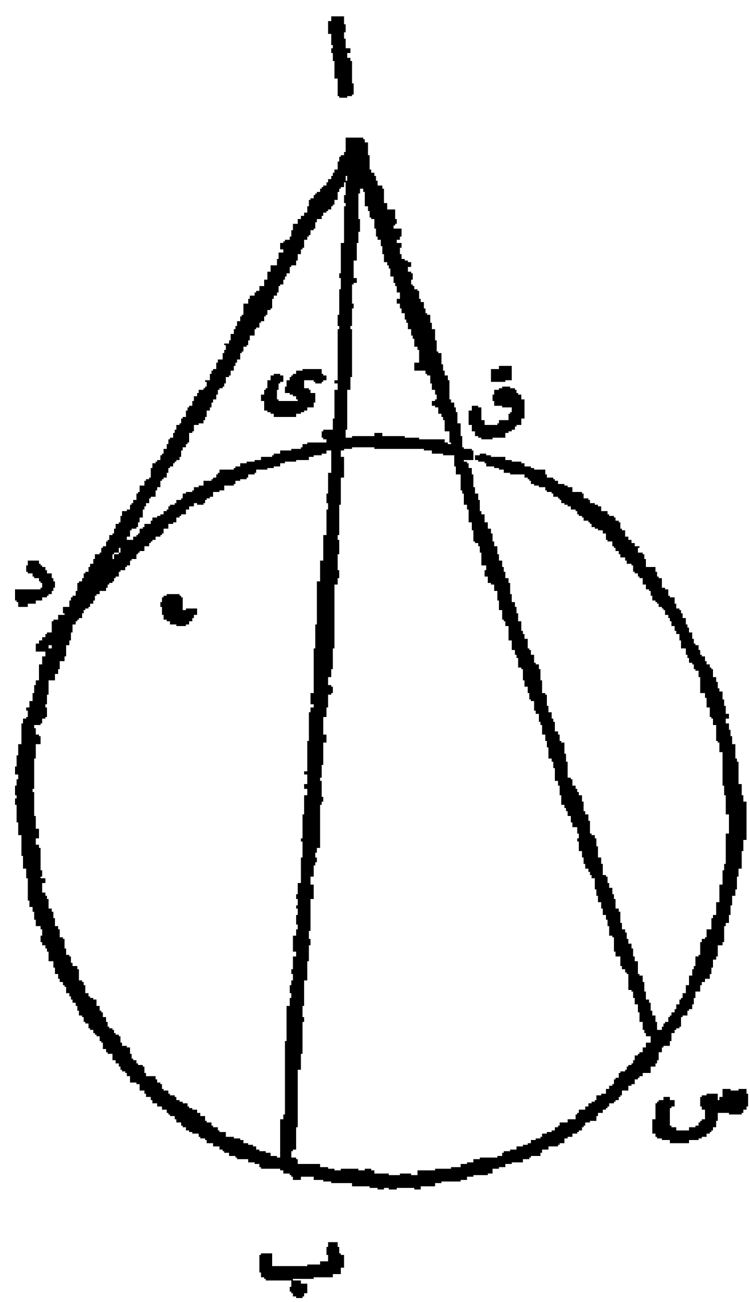
اولاً لنفرض ان د س ا يمرّ بالمركز. ارسم ى ب فالزاوية ى ب د انما هي قائمة (ق١٨ ك٣) ومن حيث ان الخط المستقيم ا س قد تنصّف في ى وأُخرج الى د فالقائم الزوايا ا د×د س+ى س^{٢}=ى د^{٢} (ق٦ ك٢) وى س=ى ب فالقائم الزوايا ا د×د س+ى ب^{٢}=ى د^{٢} ولكن ى د^{٢}=ى ب^{٢}+ب د^{٢}(ق٤٧ ك١) فالقائم الزوايا ا د×د س+ى ب^{٢}=ى ب^{٢}+ب د^{٢}. اطرح من الجانبين ى ب^{٢} فالباقي ا د×د س=ب د^{٢}

ثانياً ان لم يمرّ د س ا في مركز الدائرة ا ب س فاستعلم المركز ى (ق١ ك٣)



وارسم ى ق عموداً على ا س (ق١٢ ك١) وارسم ى ب ى س ى د. فمن حيث ان الخط المستقيم المارّ بالمركز ى ق هو عمود على الخط المستقيم ا س الذي لا يمرّ بالمركز فهو ينصّفهُ ايضاً (ق٣ ك٣) فالقسم ا ق يعدل القسم ق س. فمن حيث ان الخط المستقيم ا س قد تنصّف في ق واخرج الى د (ق٦ ك٢) فالقائم الزوايا ا د×د س+ق س^{٢}=ق د^{٢}. اضف اليهما ق ى^{٢} فالقائم الزوايا ا د×د س+ق س^{٢}+ق ى^{٢}= ق د^{٢}+ ق ى^{٢} وى س^{٢}= ق س^{٢}+ ق ى^{٢} وى د^{٢}=ق د^{٢}+ق ى^{٢} (ق٤٧ ك١) لان د ق ى قائمة. فالقائم الزوايا ا د×د س +ى س^{٢}=ى د^{٢}. ومن حيث ان ى ب د قائمة ى د^{٢}=ى ب^{٢}+ب د^{٢}=ى س^{٢} + ب د^{٢} فالقائم الزوايا ا د × د س + ى س^{٢}= ى س^{٢}+ ب د^{٢} وا د × د س= ب د^{٢}

فرعٌ اول. اذا رُسم من نقطةٍ خارج دائرة خطّان قاطعان مثل ا ب ا س



فالشكلان القائما الزوايا مسطحا كل خط في القسم منهُ الواقع خارج الدائرة هما متساويان فالقائم الزوايا ب ا ×ا ى=س ا ×ا ق لان كل واحد منهما يعدل مربَّع الخط المستقيم ا د الذي يمسُّ الدائرة

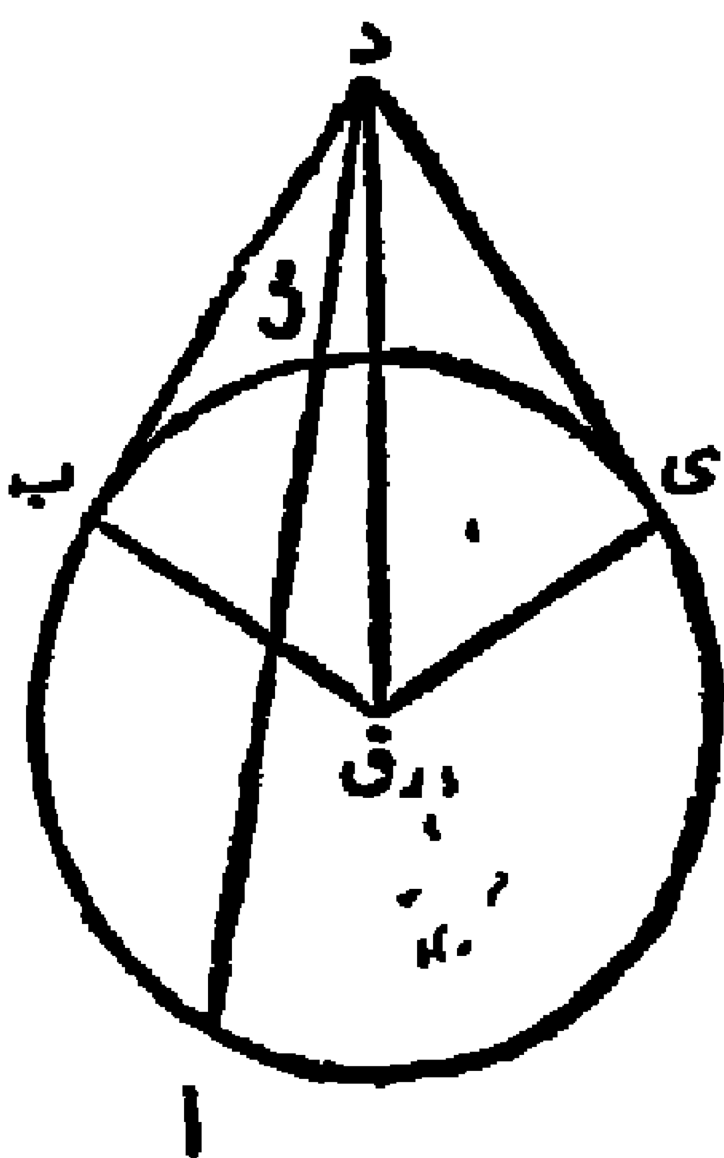
فرعٌ ثانٍ. مماسَّان مرسومان من نقطة واحدة هما متساويان

فرعٌ ثالث. بما ان نصف القطر الواقع على نقطة المماسة هو عمود على المماس فبالضرورة الزاوية الواقعة بين مماسَّين مرسومين من نقطة واحدة تتنصَّف بخط مستقيم مرسوم من مركز الدائرة الى تلك النقطة لانهُ وترٌ مشتركٌ بين مثلثين متساويين قائمي الزاوية

القضية السابعة والثلثون. ن

اذا رُسم من نقطة خارج دائرة خطان مستقيمان احدهما يقطع الدائرة والاخر يلاقيها فالقائم الزوايا مسطحُ كل الخط القاطع في الجزء منهُ الواقع خارج الدائرة ان عدل مربَّع الخط الذي يلاقيها فذلك الخط مماسُّ الدائرة

لتكن د نقطةً خارج الدائرة ا ب ى وليُرسَم منها الخط المستقيم د س ا حتى يقطع الدائرة والخط المستقيم د ب حتى يلاقيها فالقائم الزوايا ا د × د س ان عدل مربَّع د ب فالخط د ب يمسُّ الدائرة



ارسم الخط المستقيم د ى حتى يمسَّ الدائرة (ق١٧ ك٣) واستعلم المركز ق وارسم ق ب ق د ق ى فالزاوية ق ى د قائمة (ق١٨ ك٣) ومن حيث ان د ى يمسُّ الدائرة ا ب س ود س ا يقطعها فالقائم الزوايا ا د × د س يعدل مربَّع د ى (ق٣٦ ك٣) وقد فُرِض ان القائم الزوايا ا د×د س يعدل

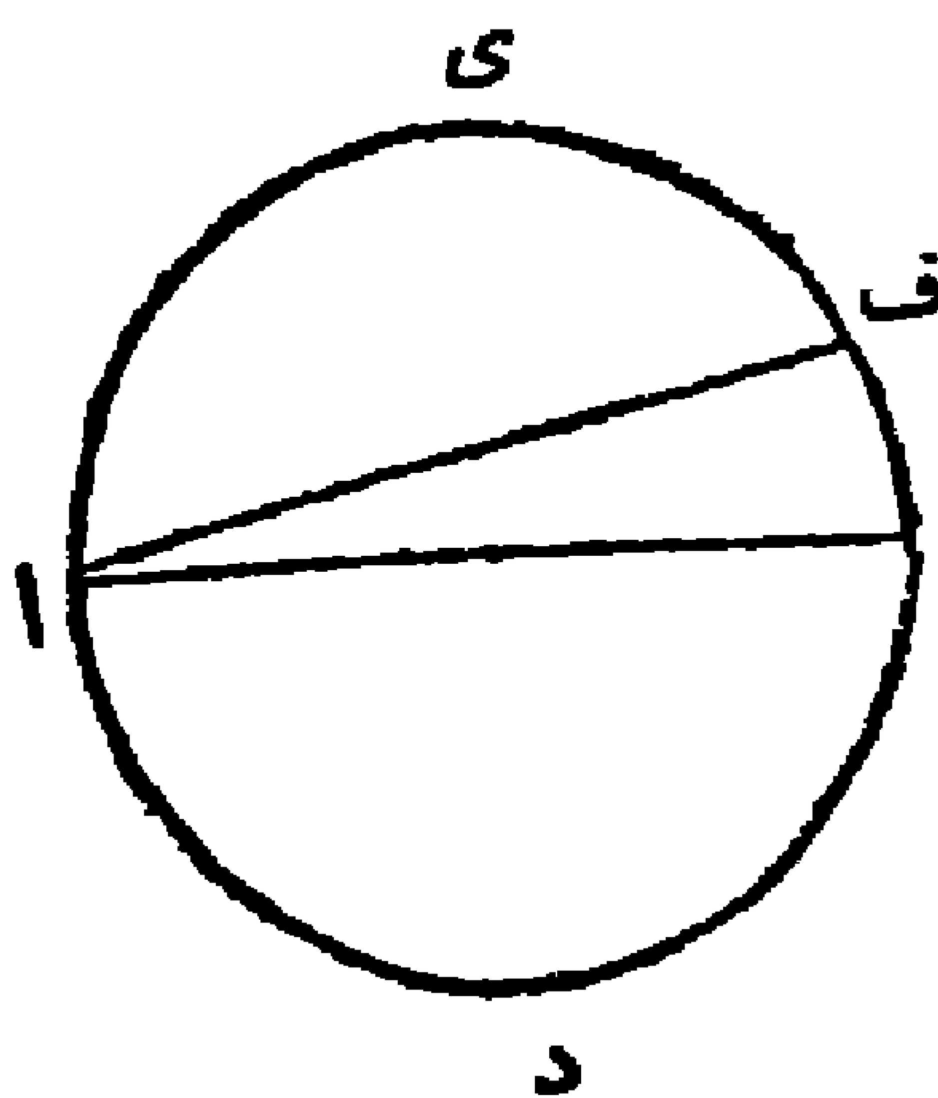
مربع د ب فمربع د ى يعدل مربع د ب والخط المستقيم د ى يعدل الخط المستقيم د ب. وق ى = ق ب فالخطان د ى ى ق يعدلان د ب ب ق والقاعدة د ق مشتركة بين المثلثين د ب ق د ى ق فالزاوية د ى ق تعدل الزاوية د ب ق (ق٨ ك١) ولكن د ى ق انما هي قائمة فالزاوية د ب ق ايضاً قائمة وب ق اذا أُخرِج يكون قطرًا للدائرة والخط الذي يُحدِث مع القطر من طرفهِ زاويةً قائمة فهو يمسّ الدائرة (ق١٦ ك٣) فالخط د ب هو مماسّ الدائرة ا ب س

مضافات الى الكتاب الثالث

قضية ا.ن

قطرُ الدائرة يقسمها ومحيطَها الى قسمين متماثلين. وبالقلب الخط الذي يقسم الدائرة الى قسمين متماثلين هو قطرٌ

ليكن ا ب قطر الدائرة ا ى ب د فالقسمان ا ى ب ا د ب متماثلان محيطًا ومساحةً. فان وُضِع الشكل ا ى ب على الشكل ا د ب وبقيت قاعدتها المشتركة ا ب على وضعها فالخط المحني ا ى ب يقع على الخط المحني ا د ب وإلّا كانت في احدها نُقَطٌ مختلفة البعد عن المركز وذلك خلاف حدّ الدائرة



وبالقلب الخط الذي يقسم الدائرة الى قسمين متماثلين هو قطرٌ

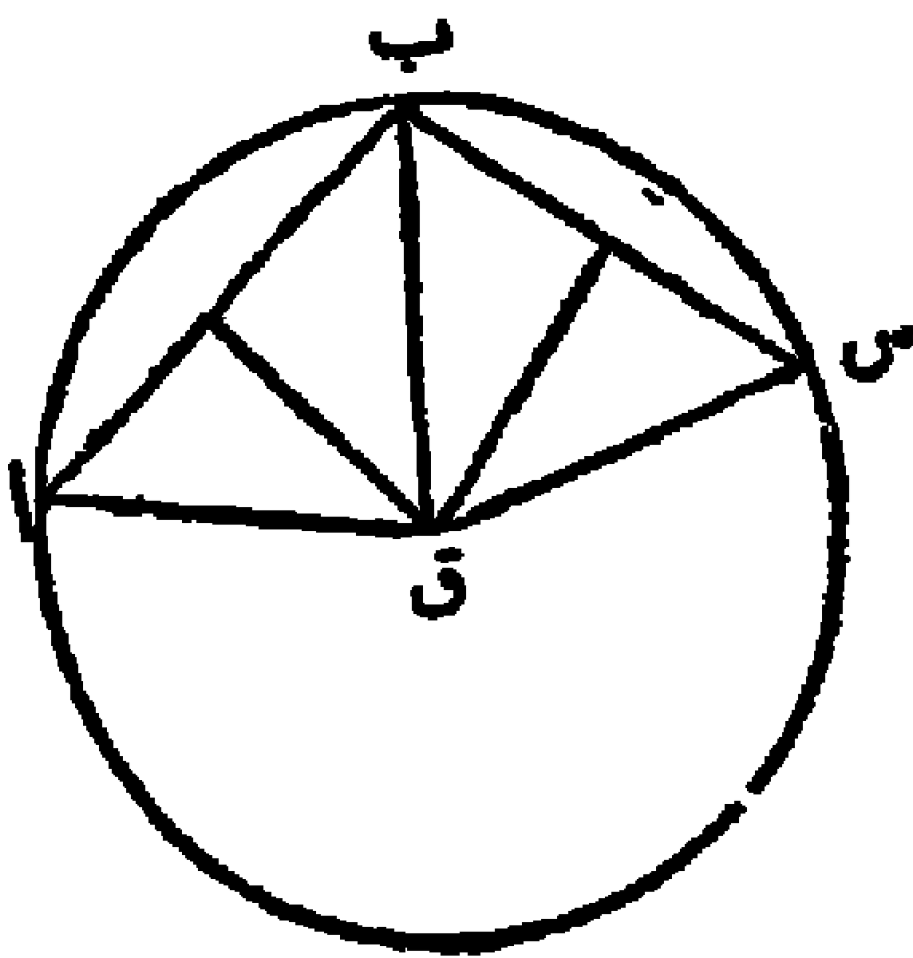
لنفرض ان ا ب يقسم الدائرة ا ى ب د الى قسمين متماثلين فان لم يكن المركز في ا ب فليُرسَم ا ف مارًّا في المركز. فهو اذًا قطرٌ ويقسم الدائرة الى قسمين متماثلين. فالقسم ا ى ف يعدل القسم ا ى ف ب وذاك محال

فرعٌ. قوسٌ وَتَرُهُ قطرٌ هو نصف محيطٍ. والشكل المحاط بهذا القوس مع وَتَرِهِ هو نصف دائرة

قضية ب ن

يمكن ان ترسم دائرة واحدة محيطها مارٌ بثلاث نقطٍ مفروضة ان لم تكن في خطٍ واحد مستقيم . ولا ترسم الاَّ دائرة واحدة محيطها مارٌ بهذه النقط الثلاث

لتكن ا ب س النقط الثلاث المعروضة ولا تكون في خطٍ واحدٍ مستقيم فهي في محيط دائرة واحدة



ارسم ا ب وب س ونصّفهما في د وى بالعمودين د ق ى ق اللذين لا بدّ من التقائهما في نقطةٍ ما كالنقطة ق . لأنهُ لو كانا متوازيين لكان د ب ب ى متوازيين ايضًا (فرع ٢ ق٩ ٢ ك١) او كانا في خطٍ واحد مستقيم ولكنهما التقيا في ب وا ب س ليس خطًّا مستقيمًا حسب المعروض اولاً . ارسم ق ا ق س ق ب . فمن حيث ان ق ا ق ب بلاقيان ا ب على بعدٍ واحدٍ من العمود فهما متساويان . ولهذا السبب ق ب ق س متساويان ايضًا فالنقط الثلاث ا ب س هي على بعدٍ واحد من النقطة ق وواقعة في محيط دائرة مركزها ق ونصف قطرها ق ا

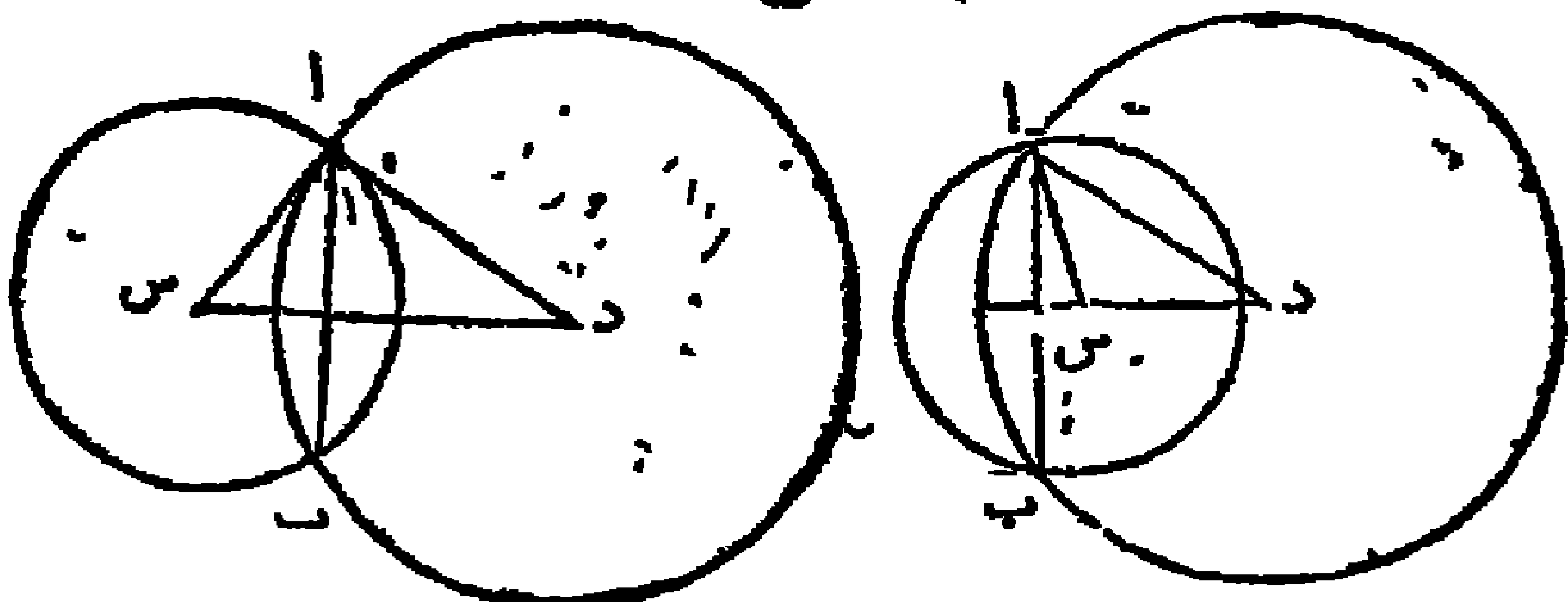
والامر واضح انهُ لا يمرُّ بهذه النقط محيطٌ آخر . لأنَّ المركز واقع في العمود د ق الذي ينصّف الوتر ا ب . وهو ايضًا في العمود ق ى الذي ينصّف الوتر ب س (فرع ا ق٣ ك٣) فلا بدَّ من وقوعهِ عند نقطة تقاطع هذين العمودين وحيث لا يكون الا مركز واحد لا يكون الا محيط واحد

قضية ج ن

اذا تقاطعت دائرتان فالخطُّ المستقيم المارُّ بمركزيهما هو عمودٌ على الوتر الموصل بين نقطتي التقاطع وينصّفه

ليكن س د الخط المستقيم الموصل بين مركزي دائرتين متقاطعتين . فهو

عمودٌ على الوتر ا ب الموصل بين نقطتي التقاطع



لأنَّ الخط ا ب الموصل بين نقطتي التقاطع هو وترٌ مشترك بين الدائرتين واذا رُسم عمودٌ من وسط هذا الوتر يمرُّ بكل واحدٍ من المركزين س ود (فرع ا ق ٣ ك ٣) ولا يمكن ان يُرسم اكثر من خطٍ واحدٍ مستقيم مارٍّ بنقطتين مفروضتين. فالخط المارُّ بمركزيها ينصف الوتر ويُحدِث معهُ قائمتين اي يكون عمودًا عليهِ

فرعٌ. الخط المستقيم الموصل بين نقطتي تقاطع دائرتين هو عمودٌ على الخط المستقيم الموصل بين مركزيها

تعليقة. اولاً. اذا تقاطعت دائرتان فالبُعد بين مركزيها هو اقصر من مجتمع نصفَي قطرَيها. ونصف القطر الاطول هو اقصر من مجتمع نصف القطر الاقصر مع البُعد بين المركزين. لأنَّ س د هو اقصر من س ا + ا د (ق ٢٠ ك ١) وا د < ا س + س د

ثانيًا. بالقلب. اذا كان البعد بين مركزي دائرتين اقل من مجتمع نصفَي قطرَيها وكان نصف القطر الاطول اقصر من نصف القطر الاقصر مع البعد بين المركزين فالدائرتان تتقاطعان

لانهُ لكي يكون التقاطع ممكنًا يلزم ان يكون المثلث س ا د ممكنًا ولذلك يلزم ان يكون س د < ا س + ا د وان يكون نصف القطر الاطول ا د < ا س + س د. واذا كان المثلث ا س د ممكنًا فالامر واضح ان الدائرتين المرسومتين على المركزين س ود تتقاطعان في ا وب

فرعٌ اول. اذا كان البُعد بين مركزَي دائرتين اكثر من مجتمع نصفَي قطرَيها فالدائرتان لا تتقاطعان

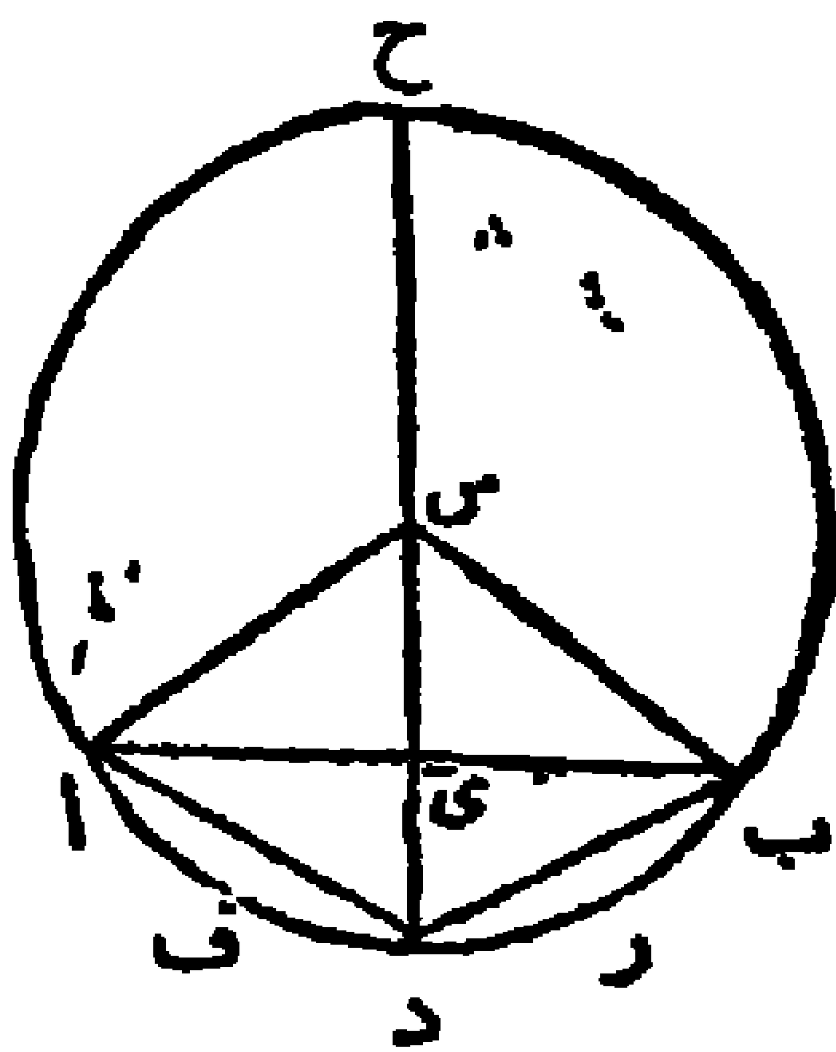
فرعٌ ثانٍ. اذا كان البُعد بين المركزين اقل من فضلة نصفَي القطرين فالدائرتان لا تتقاطعان. لأنَّ ا س + س د > ا د فاذًا س د > ا د − ا س اي ضلعٌ من مثلث

هو اطول من فضلة الضلعين الآخرين. فالمثلث غير ممكن متى كان البعد بين المركزين اقل من فضلة نصفي القطرين فلا يمكن عند ذلك ان تتقاطع الدائرتان

قضية د . ن

في دائرةٍ واحدة الزوايا المتماثلة في المركز تقابلها اقواسٌ متماثلة وبالقلب الاقواس المتماثلة تقابل الزوايا المتماثلة في المركز

لتكن س مركز الدائرة . والزاوية ا س د فلتعدل ب س د . فالقوس ا ف د الذي يقابل الزاوية الواحدة يعدل القوس ب ر د الذي يقابل الزاوية الاخرى



ارسم ا د و د ب . فالمثلثان ا س د ب س د هما متساويان لأنَّ ضلعين وزاوية من الواحد تعدل ضلعين وزاوية من الآخر فاذا وُضع احدهما على الآخر يتطابقان والنقطة ا تقع على النقطة ب . والنقطة د انما هي مشتركة بين القوسين . فطرفا القوس ا ف د يقعان على طرفي القوس ب ر د فلا بدَّ من مطابقة بقية اجزائها لأنها على بُعدٍ واحدٍ من المركز

وبالقلب لنفرض مساواة القوسين ا ف د ب ر د . فالزاوية ا س د = ب س د . لأنَّهُ اذا وُضع احد القوسين على الآخر يتطابقان . وطرفا الوتر ا د يقعان على طرفي الوتر ب د فالوتران متساويان (ق ٨ ك ١) والزاوية ا س د = ب س د

فرعٌ اول . الزوايا المتساوية في المركز يقابلها اوتارٌ متساوية . وبالقلب الاوتار المتساوية تقابل زوايا متساوية في المركز

فرعٌ ثانٍ . الاوتار المتساوية تقابل اقواسًا متساوية . وبالقلب الاقواس المتساوية تقابل اوتارًا متساوية

فرعٌ ثالث . اذا تنصفت الزاوية في المركز فالقوس والوتر اللذان يقابلانها ينتصفان ايضًا

فرعٌ رابع . العمود على وسط الوتر ينصف الزاوية في المركز ويمرُّ ايضًا بوسط

القوس الذي يقابلهُ الوَتَر

تعليقة . المركز س والنقطة ى التي هي وسط الوَتَر ا ب والنقطة د التي هي وسط القوس الذي يقابلهُ الوَتَر المذكور هي ثلث نُقط في خطٍ عموديٍ على الوَتَر . ولكن الخطَّ المستقيم يتعيَّن وضعهُ بنقطتَين . فكل خطٍ يمرُّ باثنتين من هذه النقط الثلاث يمرُّ بثالثها ايضًا ويكون عمودًا على الوَتَر

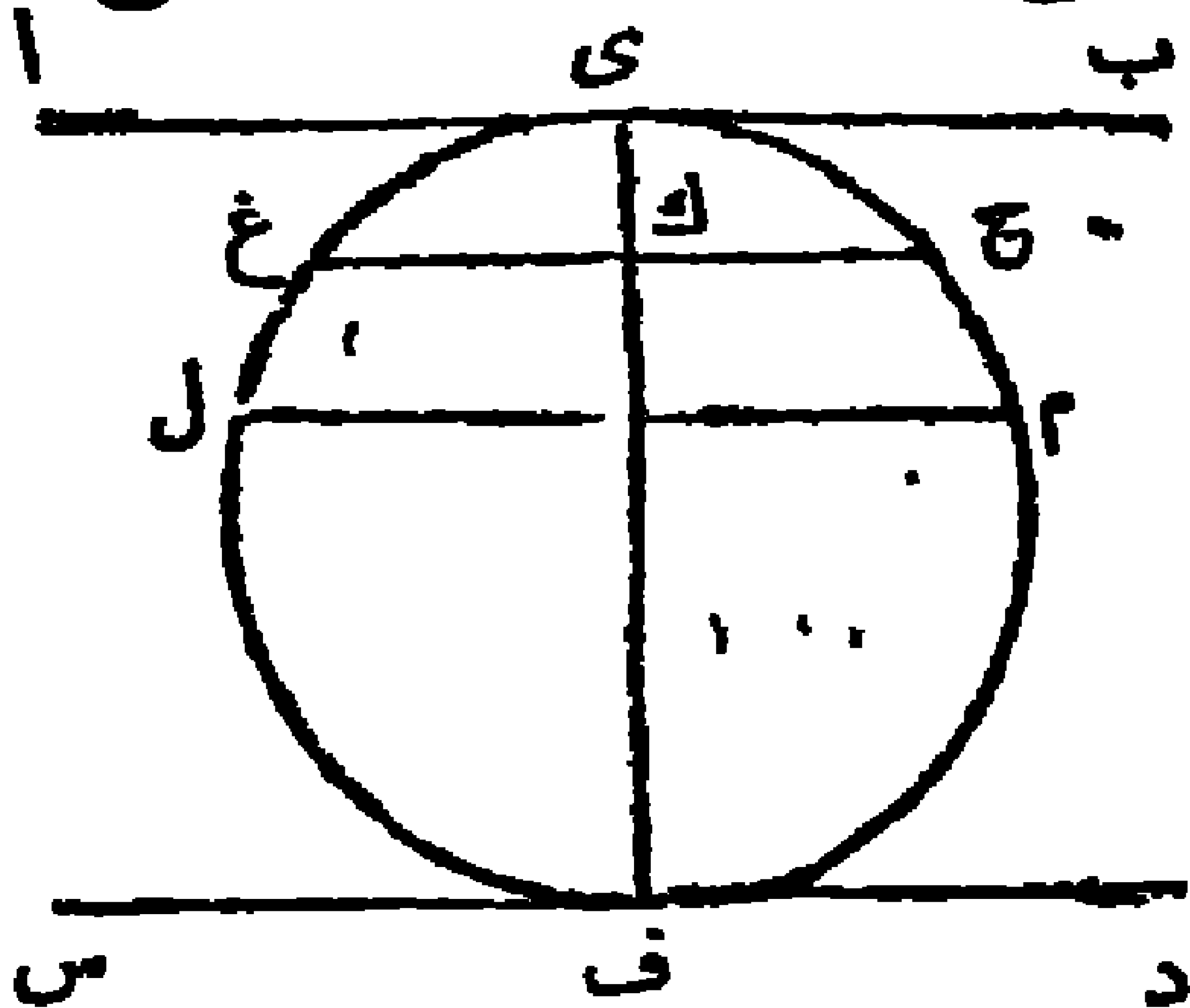
قضية ٥٠ ن

قوسان بين خطَّين متوازيين هما متساويان . وبالقلب اذا وقع بين خطين مستقيمين غير متقاطعين في الدائرة قوسان متساويان فالخطَّان متوازيان

لهذه القضية ثلاثة احوال

الاول متى كان الخطَّان المتوازيان مماسَّين مثل ا ب وس د . فكل واحد من القوسين بينهما نصف دائرة لأنَّ نقطتَي المماسَّة هما طرفا القطر (فرع ٣ ق ١٦ ك ٣)

الثاني متى كان احد الخطَّين مماسًّا مثل ا ب والآخر وَتَرًا مثل غ ح . وهو عمودٌ على ف ى الذي ينصِّف القوس غ ى ح (فرع ٤ ق د ك ٣) فالقوسان بينهما غ ى ح ى متساويان



ثالثًا متى كان الخطان المتوازيان وَتَرين مثل غ ح ول م

فلنفرض ان القطر ف ى عمودٌ على غ ح . فيكون عمودًا على ل م ايضًا لانهما متوازيان . والقطر ينصِّف كل واحد من القوسين اللذين يقابلان هذين الوترين اي غ ى = ح ى ول ى = م ى فبالضرورة ل ى — غ ى = م ى — ح ى اي غ ل = ح م

ثم بالقلب . اذا كان الخطَّان ا ب س د مماسَّين وكان القوسان ى ل ف ى م ف متساويَين يكون ى ف قطرًا (ق ١ ك ٣) وا ب س د متوازيين (فرع ٣ ق ١٦ ك ٣)

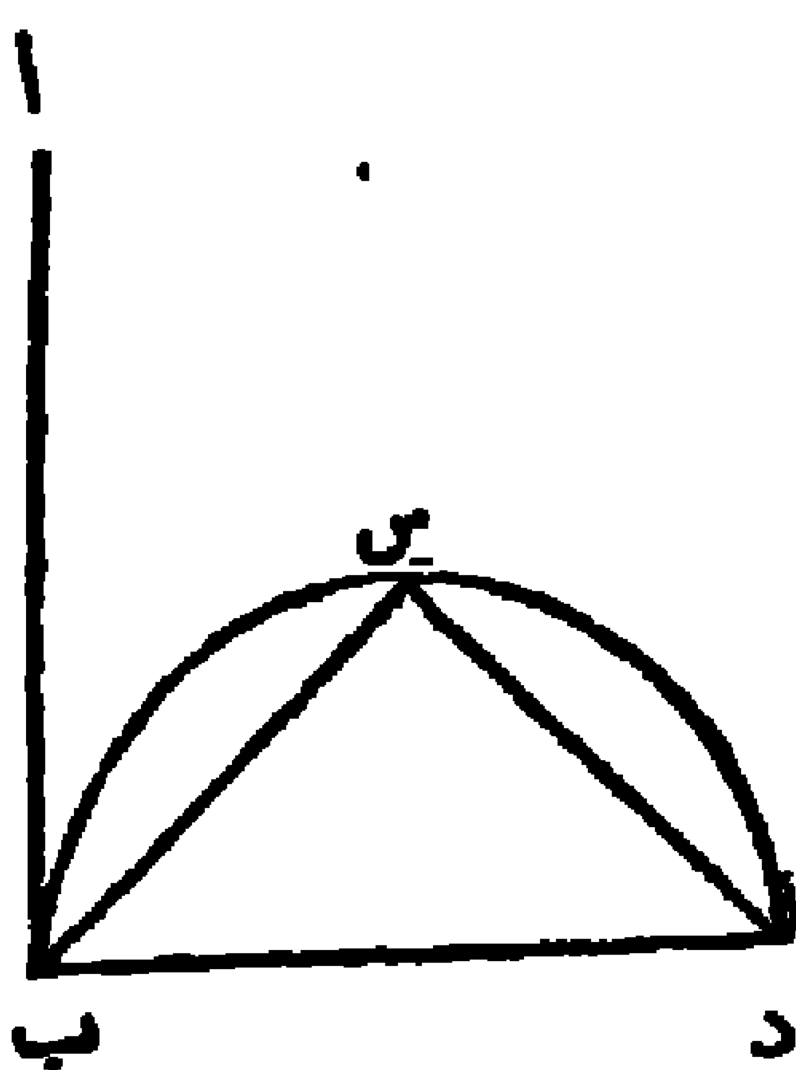
واذا كان احدها ا ب مماساً والآخر غ ح قاطعاً وكان القوسان ى غ ى ح متساويين يكون القطر ف ى الذي ينصف القوس غ ى ح عموداً على وتره غ ح (تعليقة ق د ك ٢) وعلى مماسه ا ب فهما متوازيان

واذا كان كلا الخطين قاطعاً مثل غ ح ول م وكان القوسان غ ل خ م بينهما متساويين فلنفرض ان القطر ف ى ينصف احدها مثل غ ح في ك فهو ينصف القوس غ ى ح ايضاً اي ى غ = ى ح وقد فرض ان غ ل = ح م فالكل ى ل = الكل ى م فالوتر ل م قد تنصف بالقطر ف ى. فقد تنصف كلا الوترين بالقطر ف ى وهما اذ ذاك عمودان عليه ومتوازيان (فرع ق ٢٨ ك ١)

تعليقة. لا بد ان يشترط في هذه القضية ان الخطين لا يتقاطعان في الدائرة لأن خطين مستقيمين مارين في غ م وح ل يقطعان اقواساً متساوية غ ل ح م ولا يكونان متوازيين

قضية ٥٠

علينا ان نرسم مماساً في نقطة مفروضة من قوس دائرة بدون استعمال المركز



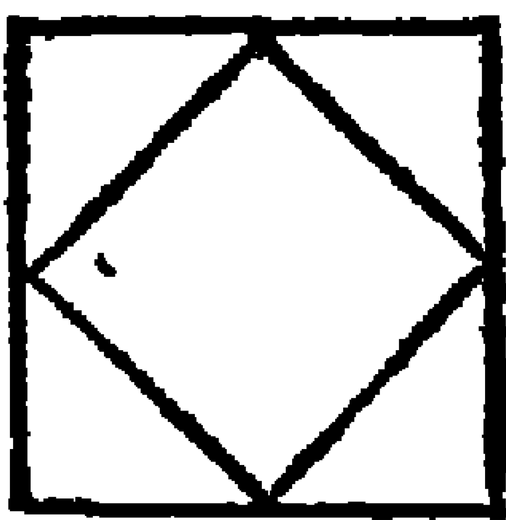
لتكن ب النقطة المفروضة. قس جزءين متماثلين من القوس مثل ب س س د. ارسم ب د وايضاً الوترين ب س س د واجعل الزاوية س ب ا تعدل س ب د (ق ٢٣ ك ١) فيكون الخط المستقيم ب ا المماس المطلوب

لأن الزاوية س ب د = س د ب فالزاوية س ب ا = س د ب (ق ٣٢ ك ٣) التي هي في القطعة المتبادلة فاذاً ب ا هو مماس في النقطة ب

اصول الهندسة

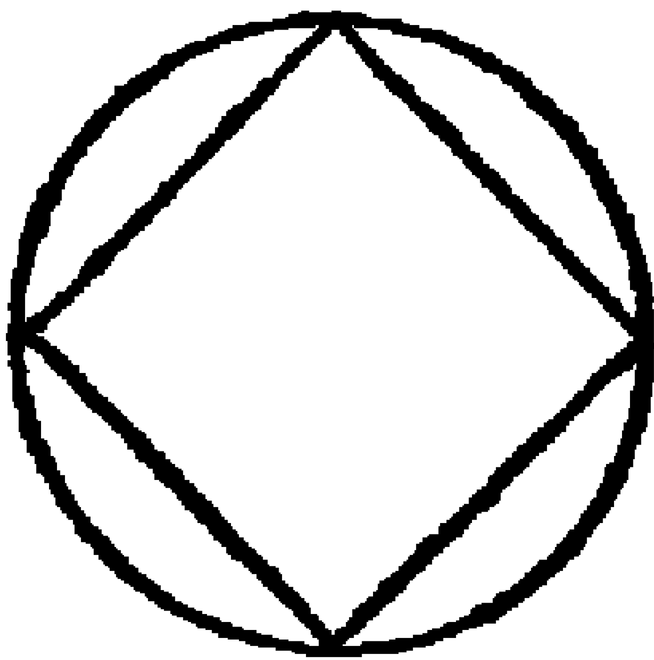
الكتاب الرابع

حدود

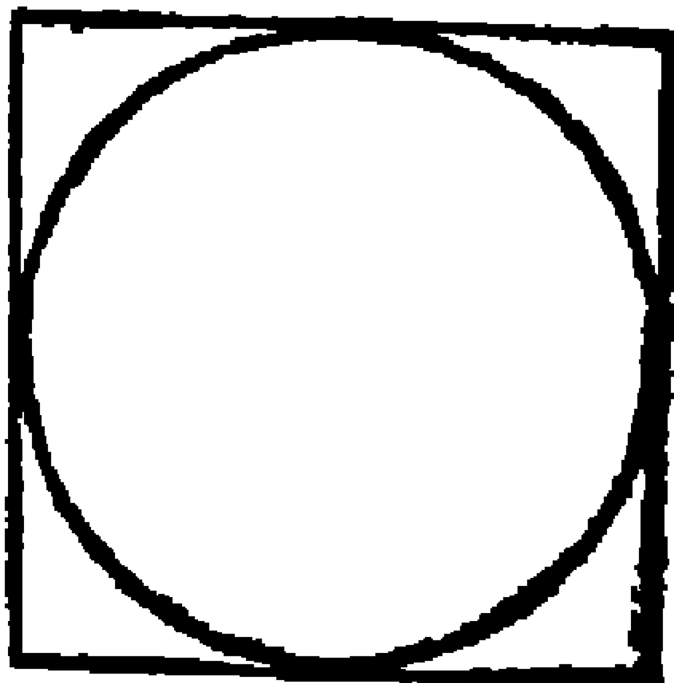


١ في شكلين اضلاعهما مستقيمة متى كانت زوايا احدهما في اضلاع الآخر يقال ان الواحد مرسومٌ في الآخر

٢ اذا مرّت اضلاع شكلٍ في زوايا شكلٍ آخر يقال ان الواحد محيط بالآخر

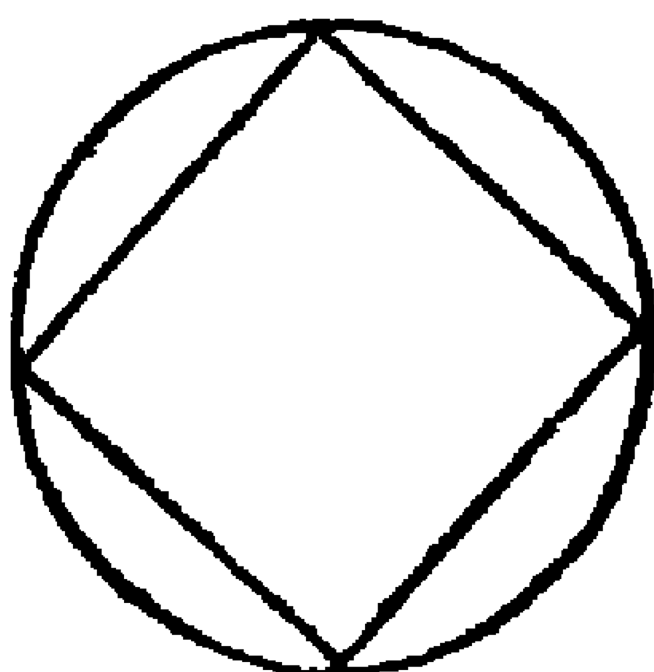


٣ متى كانت زوايا شكلٍ ذي اضلاع مستقيمة في محيط دائرة يقال ان الشكل مرسوم في الدائرة



٤ شكلٌ ذو اضلاع مستقيمة محيط بدائرة متى كانت اضلاعهُ مماسّات لمحيط الدائرة

٥ اذا مسّ محيط دائرة كلّ ضلعٍ من اضلاع شكلٍ ذي اضلاع مستقيمة يقال انها مرسومة في الشكل



٦ الدائرة محيط بشكلٍ ذي اضلاع مستقيمة متى مرّ محيطها بزوايا الشكل

٧ اذا انتهى طرفا خطٍّ مستقيم في محيط دائرة يقال انهُ موضوع او مرسوم في الدائرة

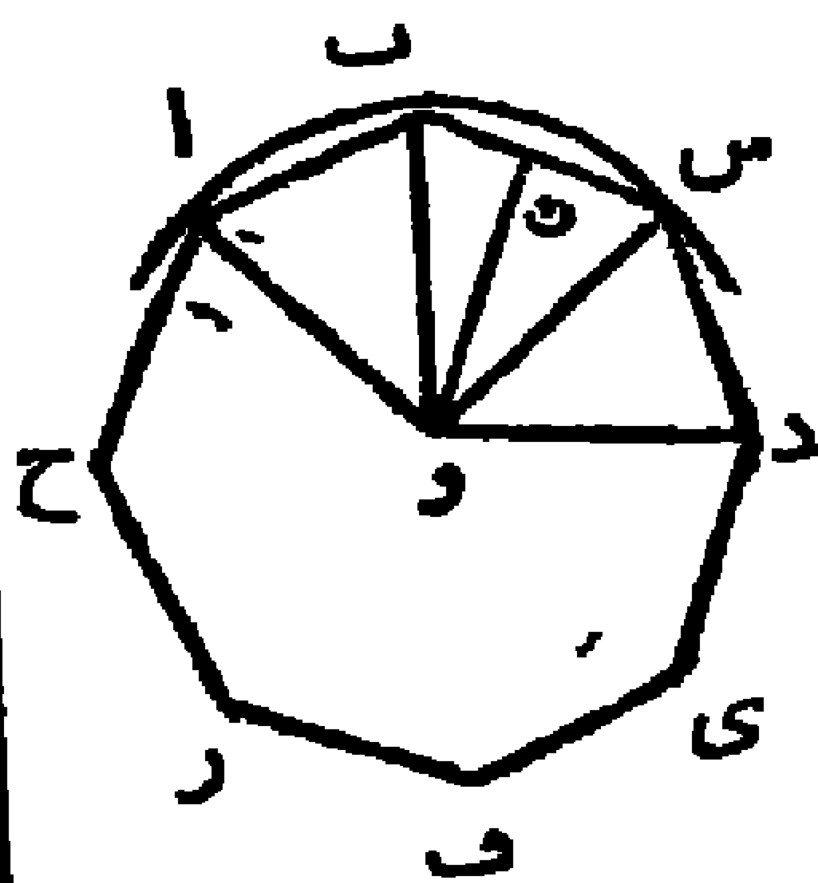
٨ شكلٌ ذو زوايا كثيرة متى كان لهُ خمسة اضلاع يسمّى ذا خمس زوايا ويسمى ذا ستّ زوايا متى كانت اضلاعهُ ستة وذا سبع زوايا متى كانت اضلاعهُ سبعة وهلم جرًّا

٩ شكل ذو زوايا كثيرة اذا كانت اضلاعهُ وزواياهُ متساوية يسمى قياسيًا

سابقة

يمكن ان يُرسَم في دائرة او محيطًا بها ايُّ شكلٍ ذي اضلاعٍ كثيرة قياسيٍّ فُرِض

ليكن ا ب س ى ح شكلاً قياسياً ذا اضلاع كثيرة. ارسم دائرة محيطها مارٌّ بالنقط الثلث ا ب س (ق ب مضافات ك ٢) ومركزها النقطة و وليكن و ن عموداً من المركز على وسط ب س. ارسم ا و د و



فاذا وُضع ذو الاضلاع الاربعة و ن س د على ذي الاضلاع الاربعة و ن ب ا يتطابقان. لأنَّ الضلع و ن مشترك بين الشكلين والزاوية و ن س = و ن ب لأنّها قائمتان. فالضلع ن س يقع على الضلع ن ب والنقطة س تقع على النقطة ب لأنَّ ن س = ن ب. وبما ان الشكل قياسيٌّ فالزاوية ن س د = ن ب ا فالخط س د يقع على ب ا والنقطة د تقع على النقطة ا لأنَّ س د = ب ا. فالشكلان يتطابقان والخطُّ و د = و ا والمحيط الذي يمرُّ في النقط ا ب س يمرُّ ايضاً في النقطة د. وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان المحيط المارّ في ب س د يمرُّ في ى ايضاً وفي كل زوايا الشكل المفروض فهو اذاً مرسومٌ في الدائرة

ثم اذا تمَّ الشكل والدائرة كما تقدم نرى الاضلاع ا ب ب س س د الى اخره انها اوتار متساوية وهي على بعدٍ واحدٍ من المركز (ق ١٤ ك ٣) فاذا جعلت النقطة و مركزًا والعمود و ن بعدًا ورُسِمَتْ دائرة محيطها يمسُّ الضلع ب س في وسطهِ وهكذا في جميع اضلاع الشكل فتُرسَم الدائرة في الشكل او الشكل حول الدائرة

فرعٌ اول. اذا فُرِض شكلٌ قياسيٌّ فيمكن ان تُرسَم دائرة فيهِ واخرى محيطة بهِ ويكون لهما مركزٌ واحدٌ

فرعٌ ثانٍ. اذا امكن ان تُرسَم دائرةٌ في شكلٍ مفروض واخرى محيطة بهِ فالشكل قياسيٌّ

تعليقة اولى. النقطة و هي مركز الدائرتين اي المحيطة بالشكل والمرسومة فيهِ فهي ايضاً مركز الشكل. وتسمى الزاويه ا و ب الزاوية في المركز وهي مصطنعة من نصفي

قطرَين مرسومَين من طرفَي الضلع ا ب

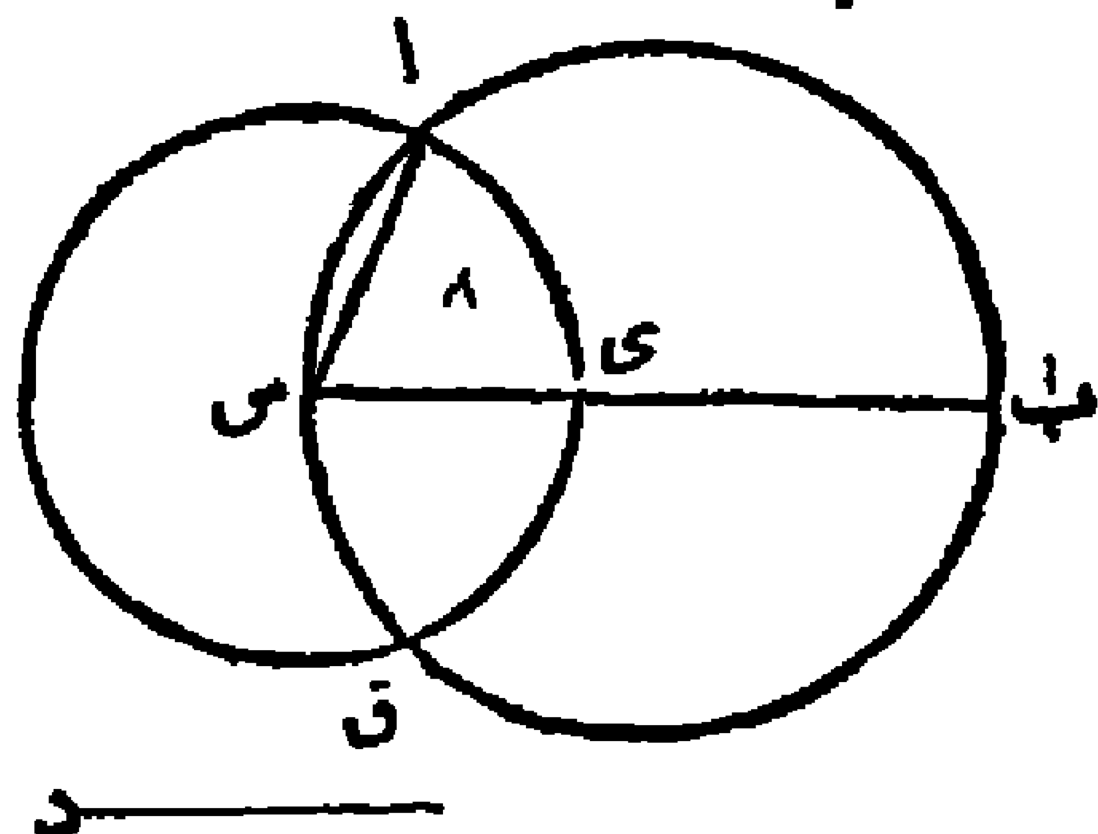
بما ان كل الاوتار متساوية فكل الزوايا في المركز متساوية. فتُستعلَم كميّة كل واحدة منها بقسمة اربع زوايا قائمة على عدد اضلاع الشكل

تعليقة ثانية. اذا اردنا ان نرسم شكلاً قياسيًّا مفروضًا عدد اضلاعهِ في دائرة مفروضة فلنقسم محيط الدائرة الى اقسام متساوية تماثل عدد اضلاع الشكل (انظر الشكل في ق ١٥ ك ٤)

القضية الاولى. ع

علينا ان نرسم في دائرة مفروضة خطًّا مستقيمًا يماثل خطًّا مستقيمًا مفروضًا ليس اطول من قطر الدائرة

لتكن ا ب س الدائرة المفروضة ود الخطّ المستقيم المفروض

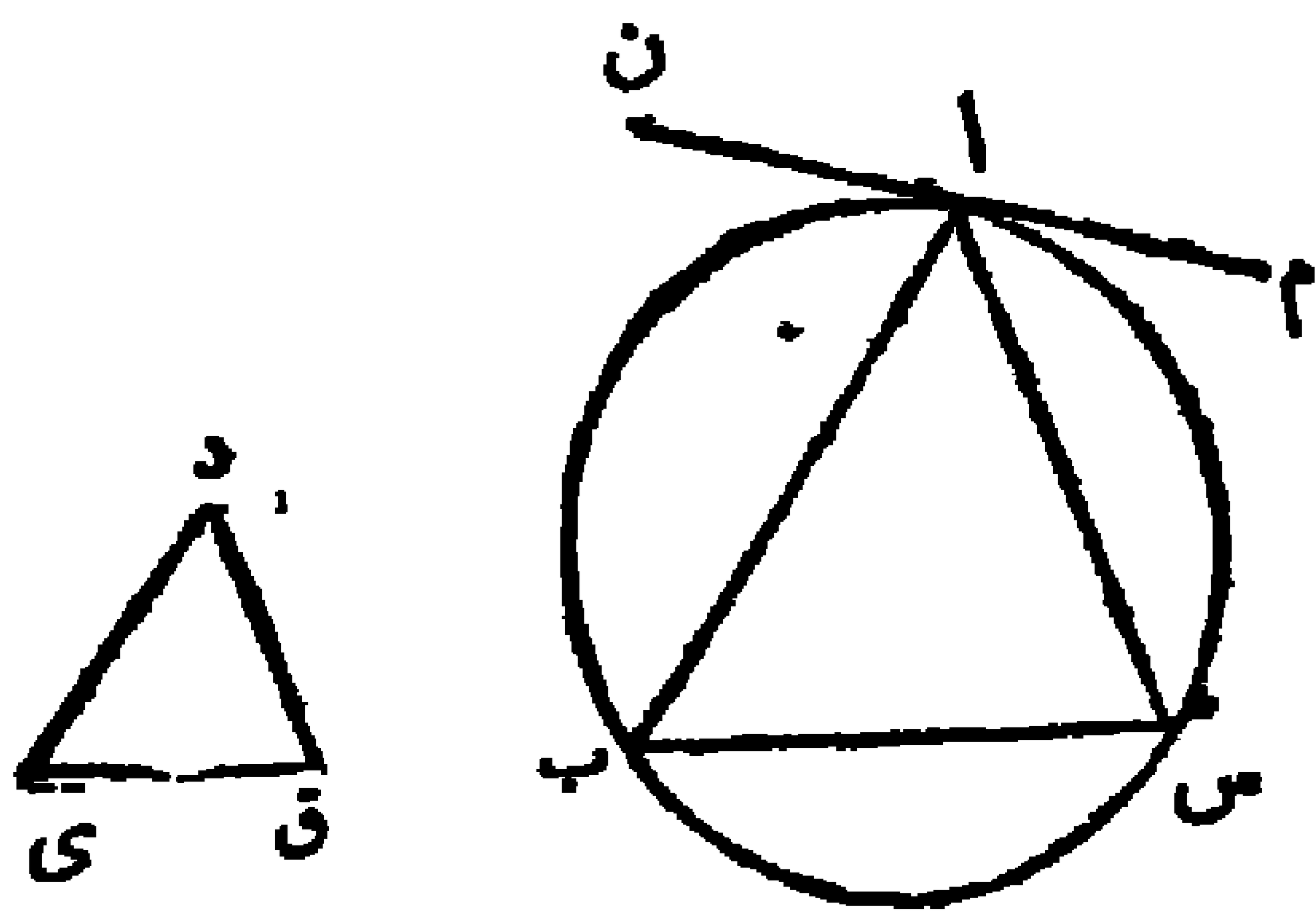


ارسم ب س قطر الدائرة ا ب س ثم اذا ماثل ب س الخط د فقد تمّ العمل لانهُ قد وضع في الدائرة خطّ مستقيم يماثل د. والاَّ فالخط ب س اطول من د. اقطع الجزء س ى حتى يماثل د (ق ٢ ك ١) واجعل س مركزًا وس ى بعدًا وارسم الدائرة ا ى ق وارسم الخط س ا. فبما ان س مركز الدائرة ا ى ق فالخط ا س يعدل س ى. ولكن س ى يعدل د فالخط س ا يعدل د ايضًا فقد رُسِم في الدائرة خطّ مستقيم يماثل الخط المستقيم المفروض د الذي ليس اطول من قطر الدائرة

القضية الثانية. ع

علينا ان نرسم في دائرة مفروضة مثلثًا زواياهُ تماثل زوايا مثلثٍ مفروض

لتكن ا ب س الدائرة المفروضة ود ى ق المثلث المفروض. علينا ان نرسم في



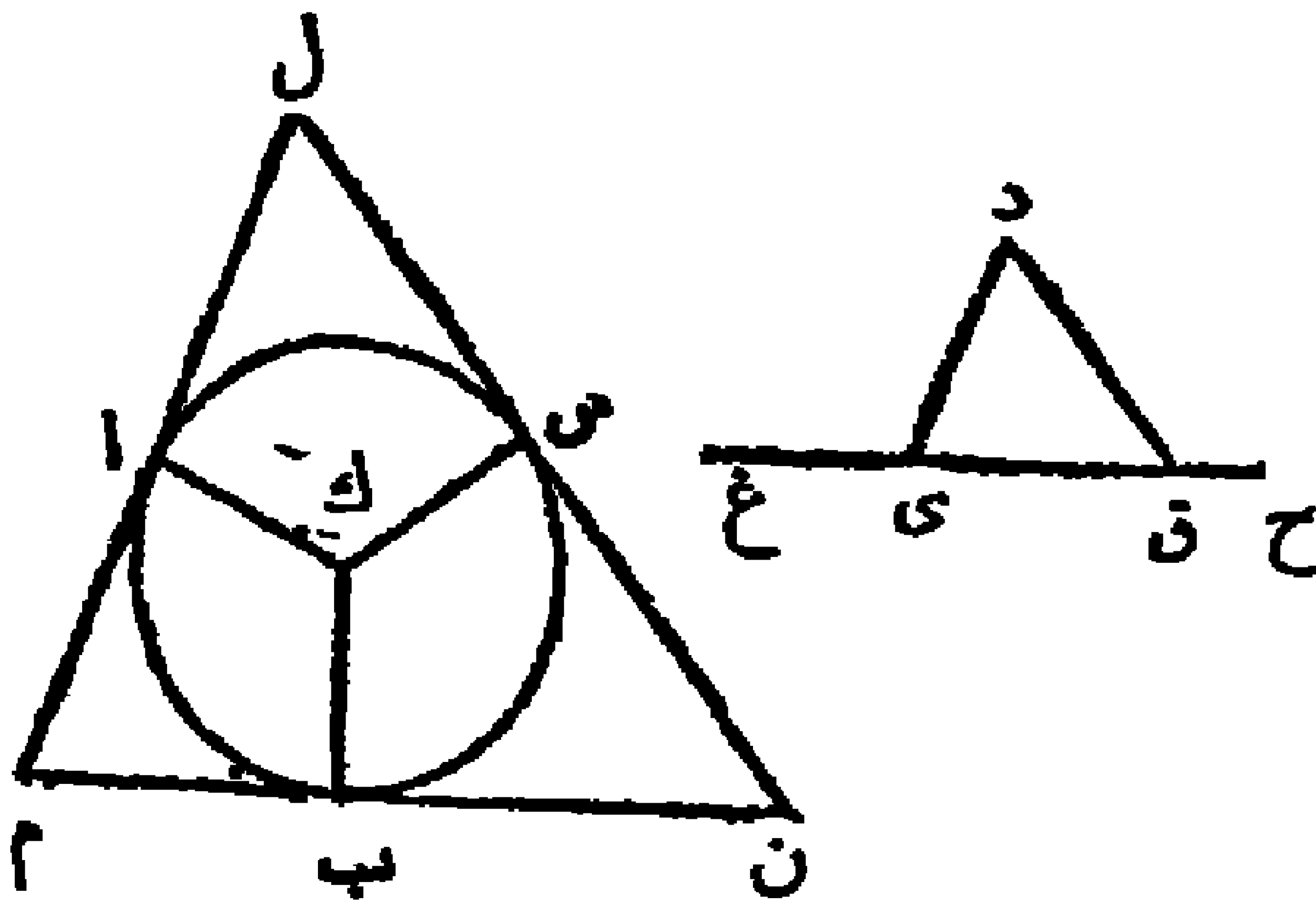
الدائرة ا ب س مثلثًا زواياهُ تعدل زوايا المثلث د ى ق

ارسم الخط المستقيم ن ا م حتى يمسّ الدائرة في النقطة ا (ق ١٧ ك٣) وفي النقطة ا من الخط المستقيم ا م اجعل الزاوية م ا س تعدل الزاوية د ى ق (ق٣٢ ك١) وفي النقطة ا من الخط المستقيم ا ن اجعل الزاوية ن ا ب تعدل د ق ى وارسم ب س. لأنّ الخط ن ا م يمسّ الدائرة ا ب س وا س يقطعها فالزاوية م ا س تعدل ا ب س في القطعة المتبادلة (ق٣٢ ك٣) وم ا س تعدل د ى ق فالزاوية ا ب س تعدل د ى ق ولهذا السبب ا س ب تعدل د ق ى فالزاوية الباقية من الواحد ب ا س تعدل الباقية من الاخرى د ق (فرع٤ ق٣٢ ك١) فزوايا المثلث ا ب س تعدل زوايا المثلث د ى ق وقد رُسِمَ في الدائرة ا ب س

القضية الثالثة ٠ع

علينا ان نرسم مثلثًا يحيط بدائرةٍ مفروضة وزواياهُ تعدل زوايا مثلثٍ مفروض

لتكن ا ب س الدائرة المفروضة وليكن د ى ق المثلث المفروض. علينا ان نرسم مثلثًا يحيط بالدائرة ا ب س وزواياهُ تعدل زوايا المثلث د ى ق



أخرج ى ق الى الجهتين الى غ وح واستعلم ك مركز الدائرة ا ب س (ق ١ ك٣) ومن ك ارسم خطًّا مستقيمًا كيفما شئت مثل ك ب وفي النقطة ك من الخط ب ك اجعل الزاوية ب ك ا تعدل الزاوية د ى غ (ق٢٣ ك١) وايضًا الزاوية

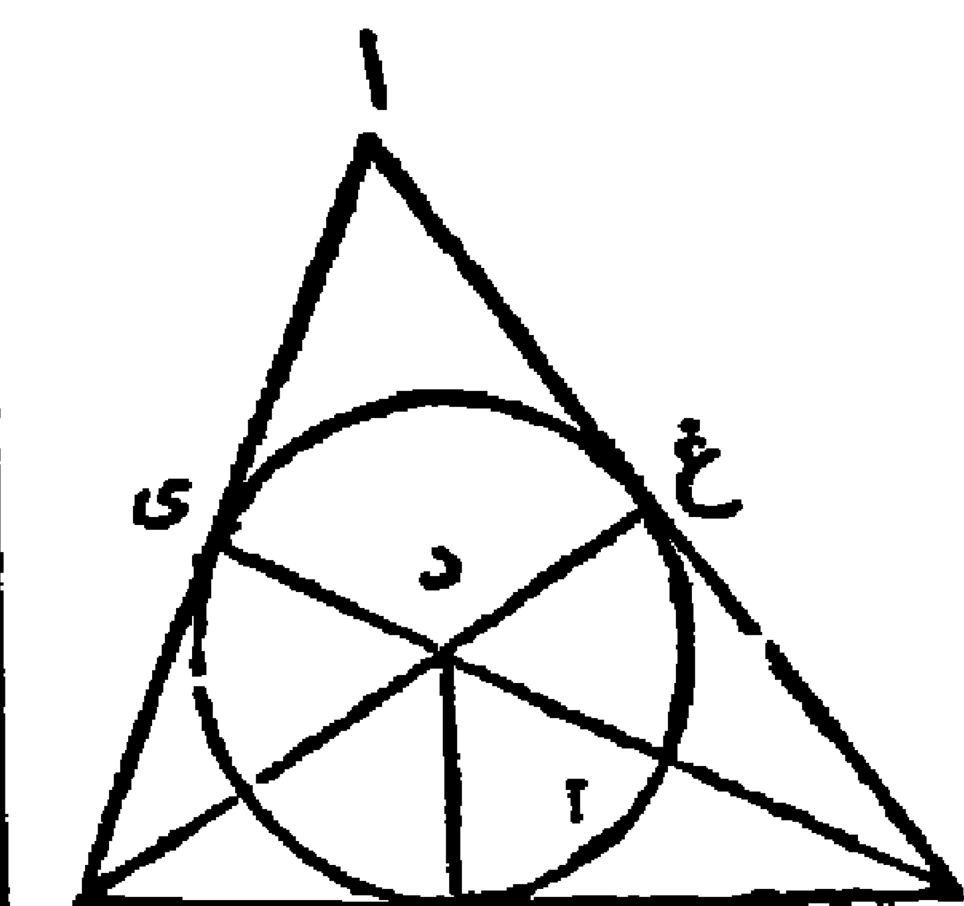
ب ك س تعدل الزاوية د ق ح. وفي النقط الثلاث ا ب س ارسم المماسات ل ا م م ب ن ن س ل (ق١٧ ك٣)

لانَّ م ل م ن ن ل مماسات في النقط ا ب س التي قد رُسِم اليها من المركز ك ا ك ب ك س فالزوايا عند هذه النقط الثلاث انما هي قائمات (ق١٨ ك٣) والشكل ا ك ب م ذو اربعة اضلاع وهو قابل الانقسام الى مثلثين فزواياهُ الاربعة تعدل اربع زوايا قائمة. وك ا م ك ب م قائمتان فالاخريان ا ك ب ب م ا تعدلان قائمتين والزاويتان د ى غ د ى ق تعدلان قائمتين (ق١٣ ك١) فالزاويتان ا م ب ا ك ب تعدلان د ى غ د ى ق. ولكن ا ك ب تعدل د ى غ فالاخرى ا م ب تعدل الاخرى د ى ق وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان الزاوية ل ن م تعدل د ق ى فالباقية من الواحد تعدل الباقية من الآخر اي م ل ن تعدل ى د ق (ق٣٢ ك١) فالمثلث ل م ن قد رُسِم محيطاً بالدائرة ا ب س وزواياهُ تعدل زوايا المثلث د ى ق

القضية الرابعة. ع

علينا ان نرسم دائرةً في مثلثٍ مفروض

ليكن ا ب س المثلث المفروض. فعلينا ان نرسم فيهِ دائرة نصّف الزاويتين ا ب س ا س ب (ق٩ ك١) بالخطّين المستقيمين ب د س د المتقاطعين في النقطة د. ومن د ارسم الخطوط د ى د ف د غ عموديَّة على الاضلاع ا ب ب س س ا



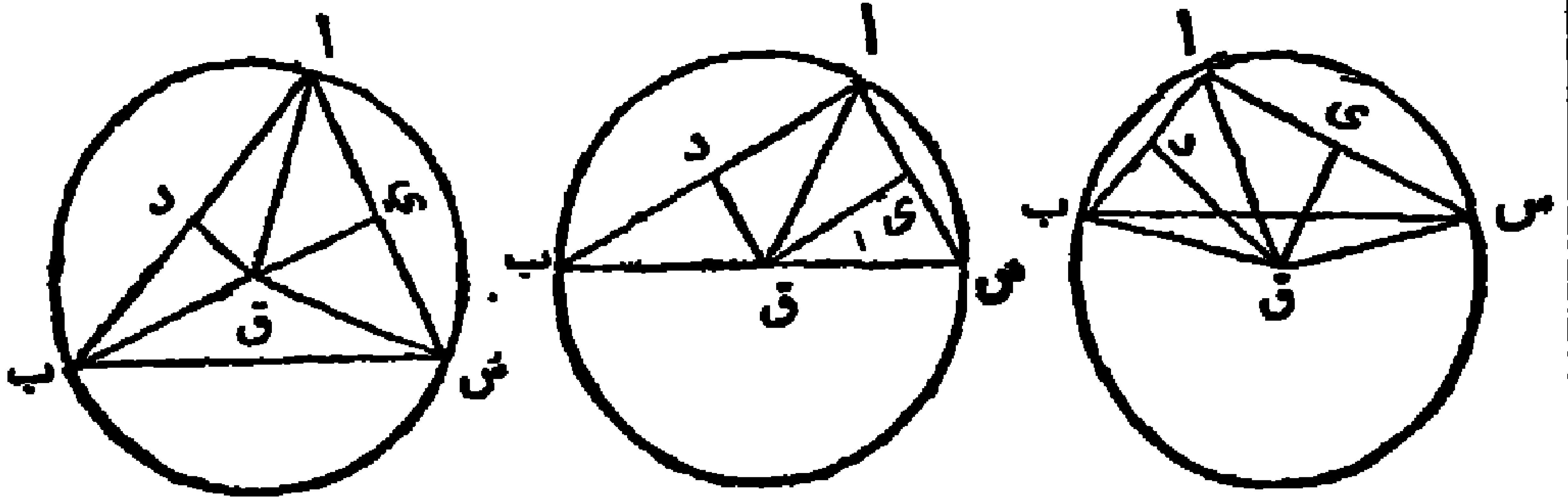
ثم لأنَّ الزاوية ى ب د تعدل ف ب د من حيث ان ا ب س تنصَّفت بالخط ب د ولان القائمة ب ى د تعدل القائمة ب ف د فالمثلث ى ب د لهُ زاويتان تعدلان زاويتين من المثلث ف ب د والضلع ب د الذي يقابل زاويتين متساويتين مشتركٌ بين المثلثين. فالضلعان الآخران من الواحد يعدلان الآخرين من الآخر (ق٢٦ ك١) اي د ى يعدل د ف وهكذا يبرهن ايضاً ان د غ يعدل د ف والخطوط الثلثة د غ د ف د ى متساوية واذا رُسِمت دائرة من المركز د وعلى بعد د ى يمرُّ المحيط في طرفي

د ف ودغ ايضاً ويمسّ الاضلاع ا ب ب س س ا لأنّ الزوايا عند هذه النقط ى ف غ هي قائمات. والخط المستقيم العمودي على طرف القطر هو مماسٌ (فرع اول ق ١٦ ك٣) فالخطوط الثلاثة ا ب ب س س ا تمسّ الدائرة فقد رُسِمت الدائرة في المثلث ا ب س .

القضية الخامسة. ع

علينا ان نرسم دائرة تحيط بمثلثٍ مفروض

ليكن ا ب س المثلث المفروض. فعلينا ان نرسم دائرة تحيط بهِ



نصّف ا ب و ا س في د و ى (ق ١٠ ك ١) ومن هاتين النقطتين ارسم د ق ى ق عمودَين على ا ب و ا س (ق ١١ ك ١) فاذا أُخرج د ق ى ق يلتقيان والّا فهما متوازيان و ا ب و ا س العموديان عليهما متوازيان ايضاً وذاك محال. فلنفرض التقاءهما في ق ولنرسم ق ا وان لم تكن النقطة ق في الخط ب س فارسم ب ق س ق لانّ ا د يعدل ب د و د ق مشترك بين المثلثين وعمودٌ على ا ب فالقاعدة ا ق تعدل القاعدة ب ق (ق ٤ ك ١) وهكذا يبرهن ان س ق يعدل ا ق ولذلك ب ق يعدل س ق والخطوط الثلاثة ق ا ق ب ق س متساوية واذا جُعِلَتْ النقطة ق مركزًا وواحدٌ من هذه الخطوط بعدًا فمحيط الدائرة تمرُّ بطرفي الآخرين ونرسم حول المثلث

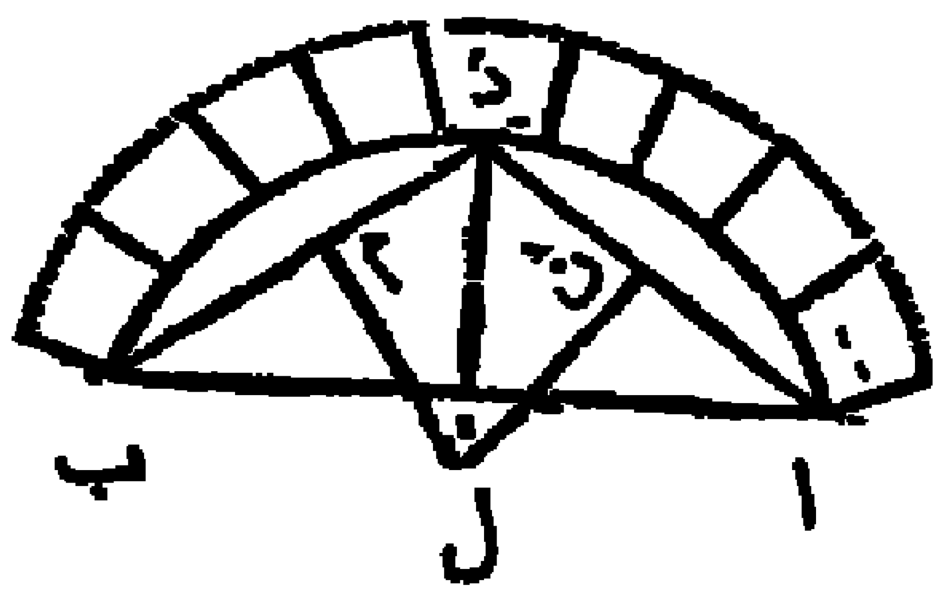
فرع. متى وقع مركز الدائرة داخل المثلث كانت كل واحدة من زواياهُ اصغر من قائمة لانّ كل واحدة منها في قطعة اكبر من نصف دائرة. ومتى كان المركز في احد الاضلاع فالزاوية المقابلة لهُ قائمة لانها في نصف دائرة. ومتى وقع المركز خارج المثلث فالزاوية المقابلة للضلع الذي كان المركز خارجهُ اكبر من قائمة لانها في قطعة اصغر

من نصف دائرة. فاذا كان المثلث المفروض حادّ الزوايا يقع المركز داخلهُ واذا كان ذا قائمة يقع المركز في الضلع الذي يقابل القائمة واذا كان منفرج الزاوية يقع المركز خارج الضلع الذي يقابل المنفرجة

تعليقة

(١) يتضح من هذه القضية ان الخطوط الثلاثة العمودية على اواسط اضلاع مثلث تلتقي في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث

(٢) بموجب هذه القضية نرسم قطعةً من قنطرة وترها وعلوها مفروضان

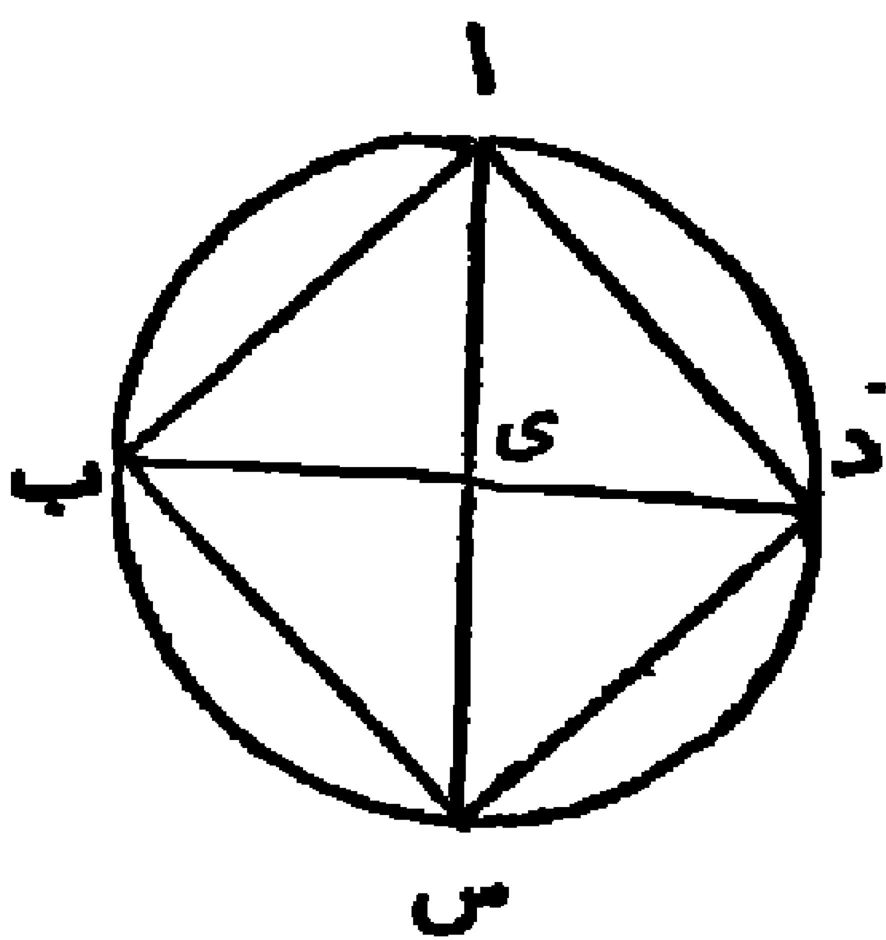


ليكن اب وترها والعمود على وسطهِ علوها. ارسم ا د ب د ونصِّفهما في م ون ومن م ون ارسم عمودين ل م ل ن الملتقيين في ل مركز الدائرة. فالخطوط ل ب ل د ل ا متساوية والحلول بين حجارة القنطرة هي كانها منقطعة من انصاف اقطار الدائرة

القضية السادسة. ع

علينا ان نرسم مربعًا في دائرة مفروضة

لتكن ا ب س د الدائرة المفروضة. فعلينا ان نرسم فيها مربعًا



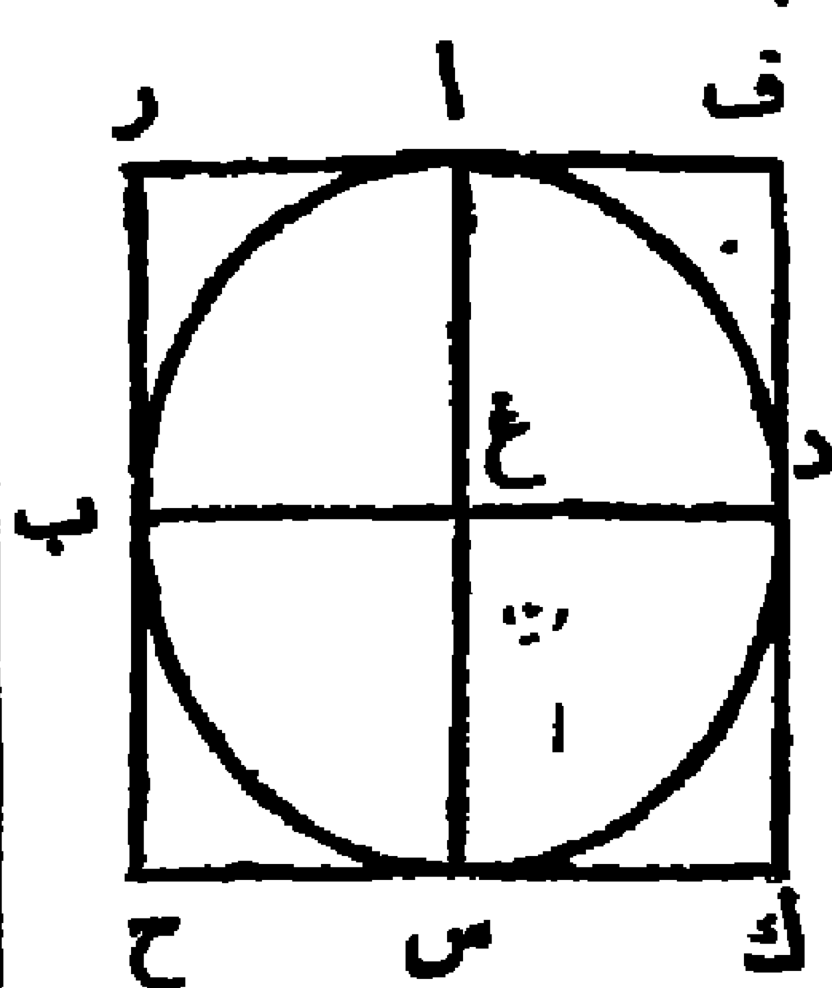
ارسم القطرين ا س ب د واجعل كل واحد منها عمودًا على الآخر. وارسم اب ب س س د دا النقطة ى هي مركز الدائرة ولذلك ب ى يعدل ى د وقد جعل ا ى عمودًا على ب د والمثلثان اب ى ا د ى لهما الضلع المشترك ا ى فالقاعدة ا ب تعدل القاعدة ا د (ق٤ ك١) وهكذا يبرهن ان ب س وس د يعدلان ا ب او اد فالشكل ا ب س د متساوي الاضلاع. وهو ايضًا قائم الزوايا. لانَّ ب د قطر وب ا د نصف دائرة فالزاوية ب ا د قائمة (ق ٣١ ك٣) هكذا يبرهن ايضًا ان ا ب س ب س د س د ا قائمات فالشكل ا ب س د قائم الزوايا وقد تبرهن انهُ متساوي الاضلاع فهو مربعٌ وقد رُسم في الدائرة ا ب س د

تعليقةٌ . المثلث ا ى د قائم الزاوية ومتساوي الساقين فلنا (فرع ٣ ق٤٧ ك ١) ا د : ا ى :: ٢١٫٠ : ١ اي ضلع مربع في دائرة الى نصف القطر كجذر اثنين المالي الى واحد

القضية السابعة . ع

علينا ان نرسم مربعًا محيطًا بدائرة مفروضة

لتكن ا ب س د الدائرة المفروضة . فعلينا ان نرسم مربعًا محيطًا بها

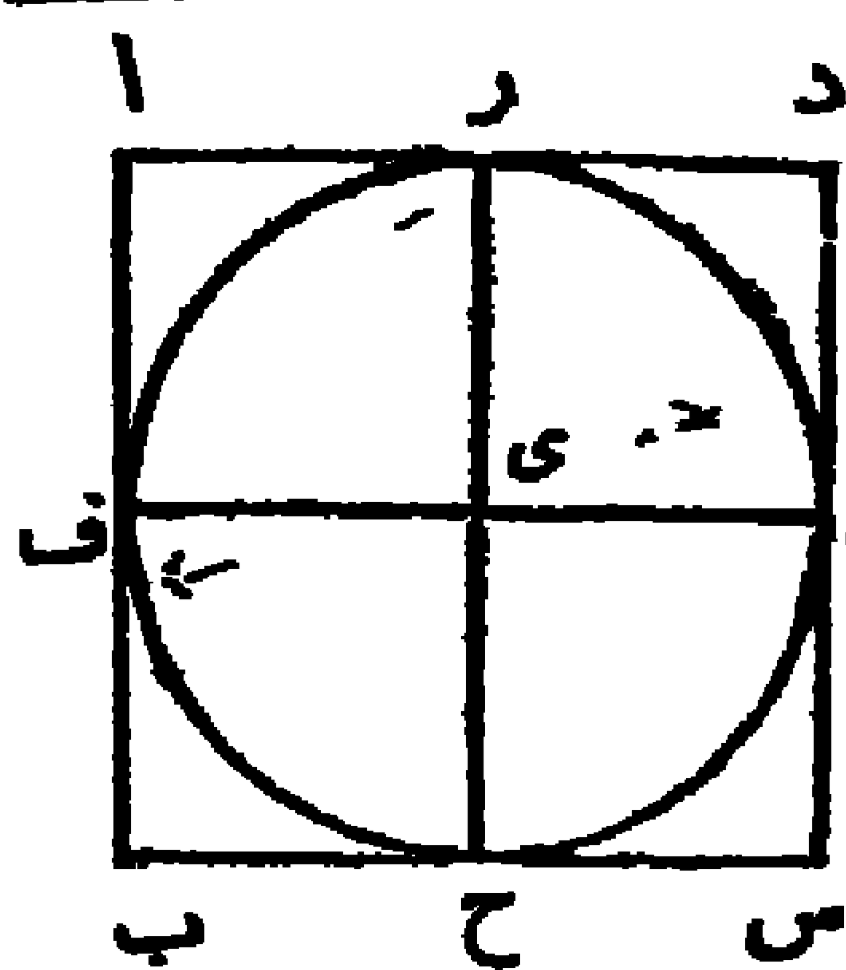


ارسم القطرين ا س ب د واجعل كل واحد منهما عمودًا على الآخر . وفي النقط ا ب س د ارسم المماسات رف رح حك كف (ق١٧ ك٣) لانّ رف يمسّ الدائرة وقد رُسِم غ ا من المركز الى نقطة المماسة فالزاويتان عند ا قائمتان (ق١٨ ك٣) وهكذا يبرهن ان الزوايا عند ب وس ود قائمات . فبما ان ا غ ب قائمة وغ ب ر كذلك فالخط رح يوازي ا س وهكذا يبرهن ان ا س يوازي ف ك ولان ر ف وح ك يوازيان ب د فالاشكال ر ك ر س ا ك ف ب ب ك في متوازية الاضلاع ورف يعدل ح ك (ق٣٤ ك١) ورح يعدل ف ك . ومن حيث ان ا س يعدل ب د ويعدل رح وف ك ايضًا وب د يعدل رف وح ك فالخطان رح ف ك يعدلان رف او ح ك فالشكل ف رح ك متساوي الاضلاع . وهو ايضًا قائم الزوايا . لانّ ر ب غ ا متوازي الاضلاع وا غ ب قائمة تكون ا ر ب ايضًا قائمة (ق٣٤ ك١) وهكذا يبرهن ان كل واحدة من الزوايا عند ح وك وف قائمة فالشكل ف رح ك قائم الزوايا وقد تبرهن انهُ متساوي الاضلاع فهو مربع وقد رُسِم محيطًا بالدائرة ا ب س د

القضية الثامنة . ع

علينا ان نرسم دائرة في مربعٍ مفروض

ليكن ا ب س د المربع المفروض . فعلينا ان نرسم فيهِ دائرة

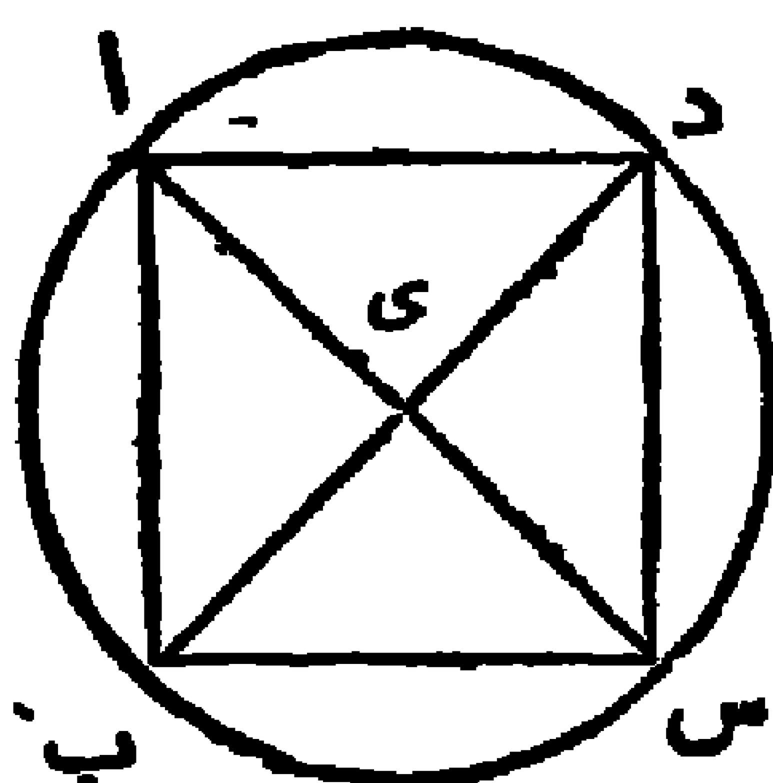


نصّف الضلع ا ب في ف والضلع ا د في ر (ق ١٠ ك ١) ومن ر ارسم ر ح حتى يوازي ا ب او د س ومن ف ارسم ف ك حتى يوازي ا د او ب س. فكل واحد من الاشكال ا ك ك ب ا ح ح د ا ي ي س ب ي ي د متوازي الاضلاع واضلاعها المتقابلة متساوية (ق ٣٤ ك ١) فمن حيث ان ا د يعدل ا ب و ا ر نصف ا د و ا ف نصف ا ب فبالضرورة ا ر يعدل ا ف فالضلعان المقابلان لهذين متساويان ايضًا اي ف ي يعدل ي ر وهكذا يبرهن ان ي ح و ي ك يعدلان ف ي او ي ر فالخطوط الاربعة ي ر ي ف ي ح ي ك متساوية والدائرة المرسومة على المركز ي وعلى بعد احد هذه الخطوط تمرّ باطراف الأُخَر. وهي تمسّ الاضلاع الاربعة ايضًا لانّ الزوايا عند ر ف ح ك قائمات (ق ٢٩ ك ١) والخط العمودي على طرف القطر انما هو مماس (ق ١٦ ك ٣) فكل واحد من الخطوط الاربعة ا ب ب س س د د ا مماس الدائرة فقد رُسِمَت الدائرة في المربع المفروض

القضية التاسعة. ع

علينا ان نرسم دائرة تحيط بمربعٍ مفروض

لكن ا ب س د المربع المفروض فعلينا ان نرسم دائرة تحيط بهِ



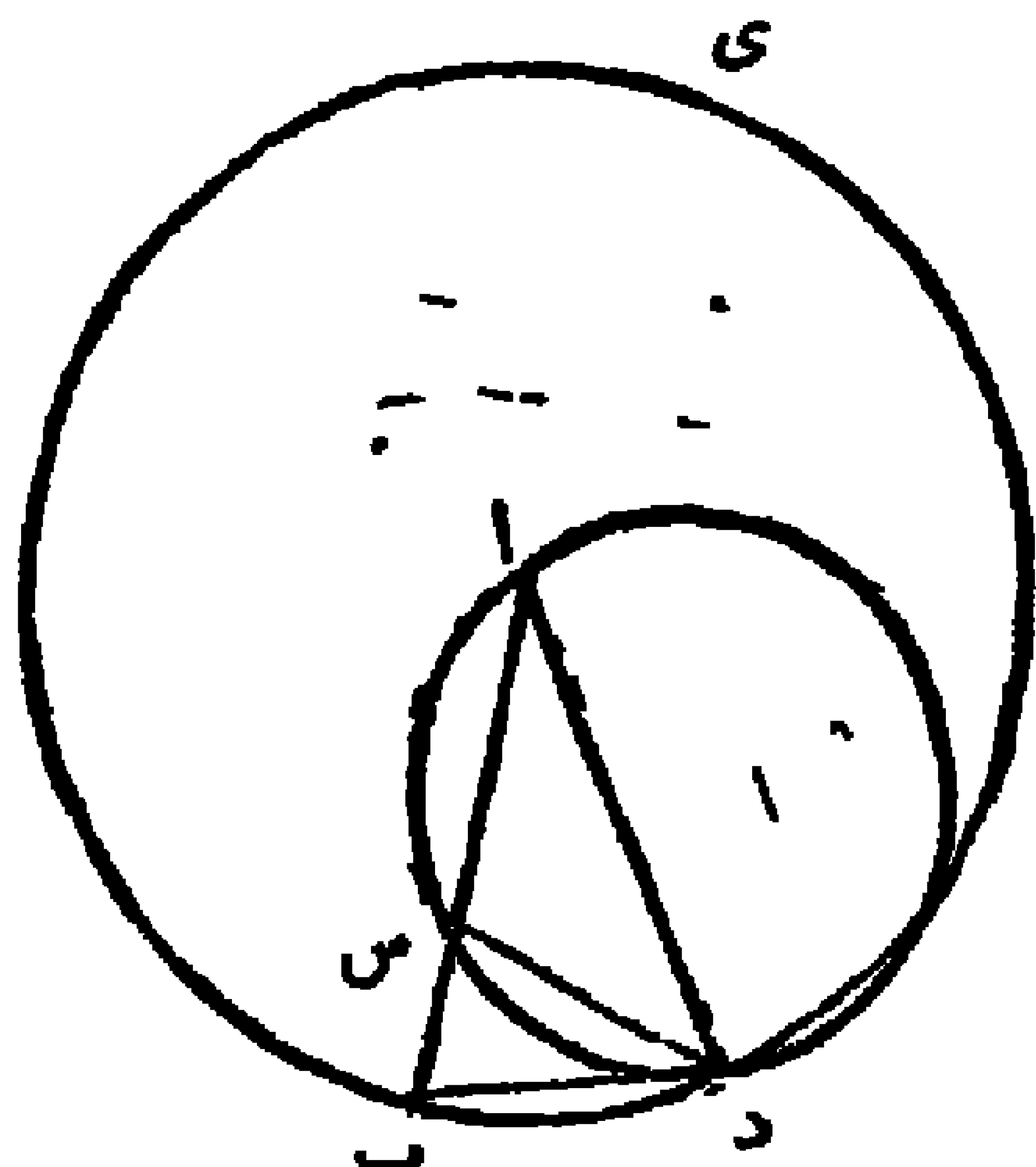
ارسم ا س ب د المتقاطعين في ي. فلانّ د ا يعدل ا ب والخط ا س مشترك بين المثلثين د ا س ب ا س فالضلعان د ا ا س يعدلان ب ا ا س والقاعدة د س تعدل القاعدة ب س فالزاوية د ا س تعدل ب ا س (ق ٨ ك ١) فقد تنصّفت الزاوية د ا ب بالخطّ ا س وهكذا يبرهن ان الزوايا ا ب س ب س د س د ا قد تنصّفت بالخطّين المستقيمين ا س ب د. فلكون الزاوية د ا ب تعدل ا ب س وي ا ب نصف د ا ب وي ب ا نصف ا ب س فالزاوية ي ا ب تعدل ي ب ا والضلع ا ي يعدل الضلع ب ي (ق ٦ ك ١) وهكذا يبرهن ان ي س ي د يعدلان

ا ى او ب ى فالخطوط الاربعة ى ا ى ب ى س ى د متساوية والدائرة المرسومة على المركز ى وعلى بعد احد هذه الخطوط تمرّ باطراف الأُخَر وتحيط بالمربّع ا ب س د

القضية العاشرة . ع

علينا ان نرسم مثلثًا متساوي الساقَين وكل واحدة من الزاويتين عند القاعدة مضاعف الزاوية الثالثة

افرض خطًّا مستقيمًا مثل ا ب واقسمهُ (ق ١١ ك ٢) في س الى قسمين حتى ان القائم الزوايا ا ب × ب س يعدل مربع ا س واجعل ا مركزًا وا ب بعدًا وارسم الدائرة ب د ى. واجعل فيها (ق ١ ك ٤) الخط المستقيم ب د حتى يعدل ا س الذي ليس اطول من قطر الدائرة ب د ى. ارسم د ا د س. وارسم الدائرة ا س د تحيط بالمثلث ا د س (ق ٥ ك ٤) فالمثلث ا ب د هو المطلوب اي كل واحدة من الزاويتين ا ب د ا د ب مضاعف الزاوية ب ا د



لانَّ القائم الزوايا ا ب × ب س يعدل مربّع ا س وا س يعدل ب د فالقائم الزوايا ا ب × ب س يعدل مربّع ب د. ولانهُ قد رُسِم الخطُّ المستقيم ب س ا والخط المستقيم ب د من النقطة ب خارج الدائرة ا س د الواحد قاطع الدائرة والاخر يلاقيها والقائم الزوايا ا ب × ب س مسطَّح كل القاطع في الجزء منهُ الواقع خارج الدائرة يعدل مربع ب د الذي يلاقي الدائرة ا س د فالخط ب د مماسٌّ للدائرة ا س د (ق ٣٧ ك ٣) ولانَّ ب د مماس ود س قاطع من نقطة المماسّة فالزاوية ب د س (ق ٣٢ ك ٣) تعدل الزاوية د ا س في القطعة المتبادلة من الدائرة. اضف الى كل واحدة منهما الزاوية س د ا فكل الزاوية ب د ا تعدل الزاويتين س د ا د ا س. ولكن الزاوية الخارجة ب س د (ق ٣٢ ك ١) تعدل الزاويتين س د ا د ا س فالزاوية ب د ا تعدل ب س د. ولكن ب د ا تعدل س ب د لان الساق ا د يعدل الساق ا ب (ق ٥ ك ١) فالزاوية س ب د او د ب ا تعدل ب س د فالزوايا الثلاث

ب د ا د ب ا ب س د متساوية. ولانّ الزاوية د ب س تعدل ب س د فالضلع ب د يعدل الضلع س د (ق٦ ك١) وب د يعدل ا س ولذلك س د يعدل ا س ايضًا والزاوية س د ا تعدل س ا د (ق٥ ك١) وس د ا س ا د معًا مضاعف س ا د. ولكن ب س د تعدل س د ا س ا د (ق٣٢ ك١) فالزاوية ب س د مضاعف س ا د. وب س د تعدل كل واحدةٍ من الزاويتين ب د ا د ب ا فكل واحدة من هاتين مضاعف الزاوية ب ا د فقد رُسِم مثلثٌ متساوي الساقين وكل واحدة من الزاويتين عند القاعدة مضاعف الزاوية الثالثة

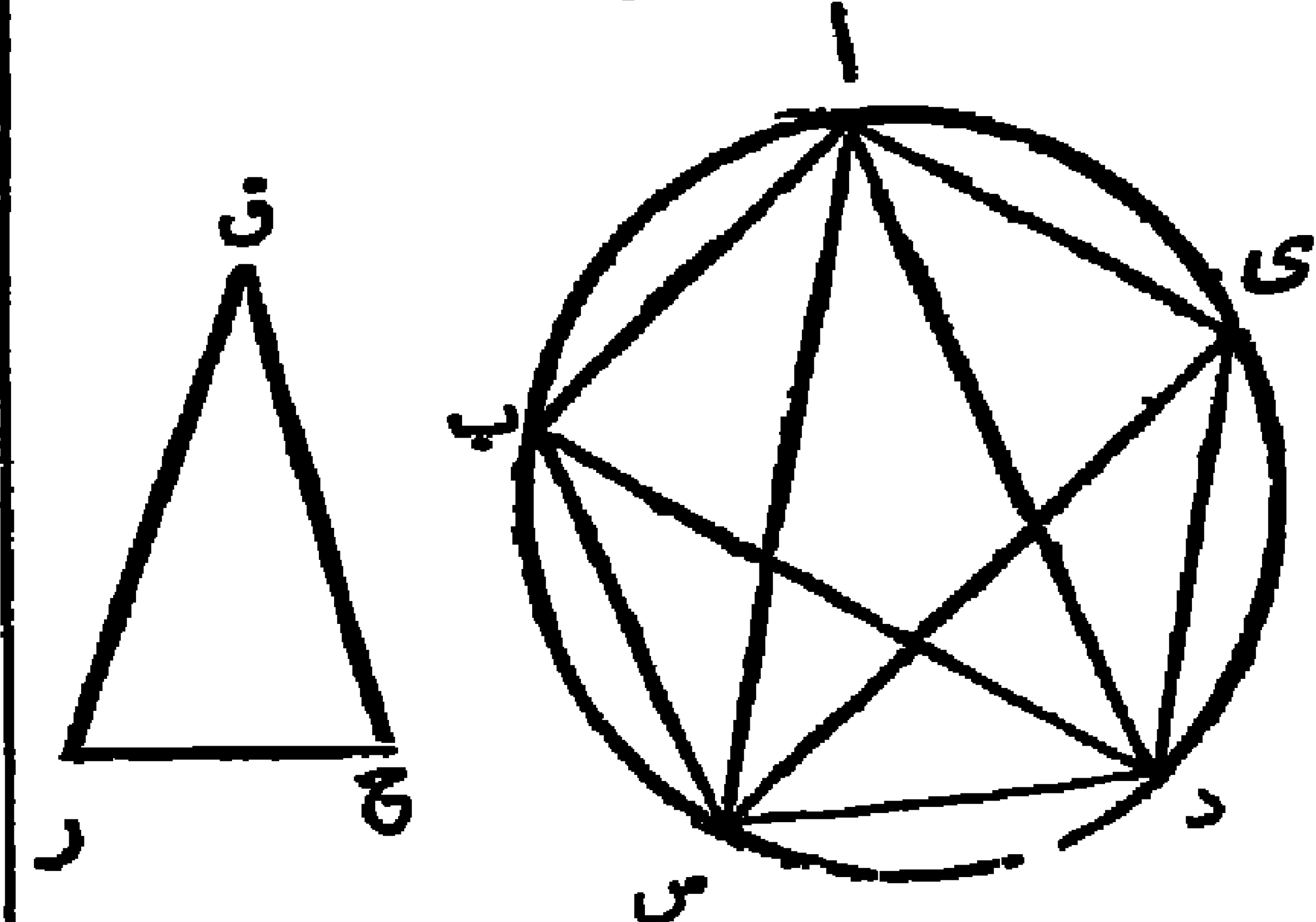
فرعٌ اول. الزاوية ب ا د هي خُمس قائمتين. لانّ كل واحدة من ا ب د ا د ب مضاعف ب ا د فهما معًا تعدلان اربعة امثال ب ا د والثلاث زوايا معًا تعدل خمسة امثال ب ا د والثلاث معًا تعدل قائمتين اي خمسة امثال ب ا د تعدل قائمتين او ب ا د تعدل خُمس قائمتين

فرعٌ ثانٍ. لان ب ا د خُمس قائمتين او عُشر اربع قائمات فكل الزوايا في المركز ا تعدل معًا عشرة امثال ب ا د وتقبل الانقسام الى عشرة اقسام كل واحد يعدل ب ا د وهذه الزوايا العشر في المركز تقابلها عشرة اقواس متساوية فالقوس ب د هي عُشر المحيط والخط المستقيم ب د او ا س يعدل ضلعًا من ذي عشرة اضلاع مرسوم في الدائرة ب د ى

القضية الحادية عشرة. ع

علينا ان نرسم شكلاً قياسيًّا ذا خمسة اضلاع في دائرة مفروضة

لتكن ا ب س د ى الدائرة المفروضة. فعلينا ان نرسم فيها شكلاً قياسيًّا ذا خمسة اضلاع. ارسم مثلثًا متساوي الساقين ق ر ح له كل واحدة من الزاويتين عند القاعدة اي عند ر وح مضاعف الزاوية عند ق (ق١٠ ك٤) وفي الدائرة ا ب س د ى ارسم المثلث المتساوي الساقين ا س د



زواياهُ تماثل زوايا المثلث ق رح (ق ٢ ك٤) اي الزاوية س ا د تماثل الزاوية عند ق والزاوية ا س د تماثل الزاوية عند ر وا د س تماثل الزاوية عند ح. فكل واحدة من الزاويتين ا س د ا د س هي مضاعف س ا د نصّفها بالخطّين المستقيمين س ى د ب (ق ٩ ك ١) وارسم ا ب ب س ا ى ى د فالشكل ا ب س د ى هو الشكل المطلوب ذو خمسة اضلاع قياسيّ

بما ان كل واحدة من الزاويتين ا س د ا د س مضاعف س ا د وقد تنصّفتا بالخطين المستقيمين د ب س ى فالزوايا الخمس د ا س ا س ى ى س د س د ب ب د ا متساوية. والزوايا المتساوية تقابلها اقواسٌ متساوية (ق ٢٦ ك٣) فالاقواس الخمسة ا ب ب س س د د ى ى ا متساوية. والاقواس المتساوية تقابلها خطوط متساوية (ق ٢٩ ك٣) فالخطوط ا ب ب س س د د ى ى ا متساوية والشكل ا ب س د ى ذو خمسة اضلاع متساوية. وهو ايضاً متساوي الزوايا لانّ القوس ا ب يعدل القوس د ى. فاذا أُضيف اليهما ب س د فالكل ا ب س د يعدل الكل ى د س ب. والزاوية ا ى د واقفة على القوس ا ب س د والزاوية ب ا ى على القوس ى د س ب. فالزاوية ب ا ى تعدل الزاوية ا ى د (ق ٢٧ ك٣) وهكذا يبرهن ان الزوايا ا ب س ب س د س د ى تعدل ب ا ى او ا ى د فالشكل ا ب س د ى متساوي الزوايا وقد تبرهن انهُ متساوي الاضلاع فهو ذو خمسة اضلاع قياسي وقد رُسِم في الدائرة المفروضة

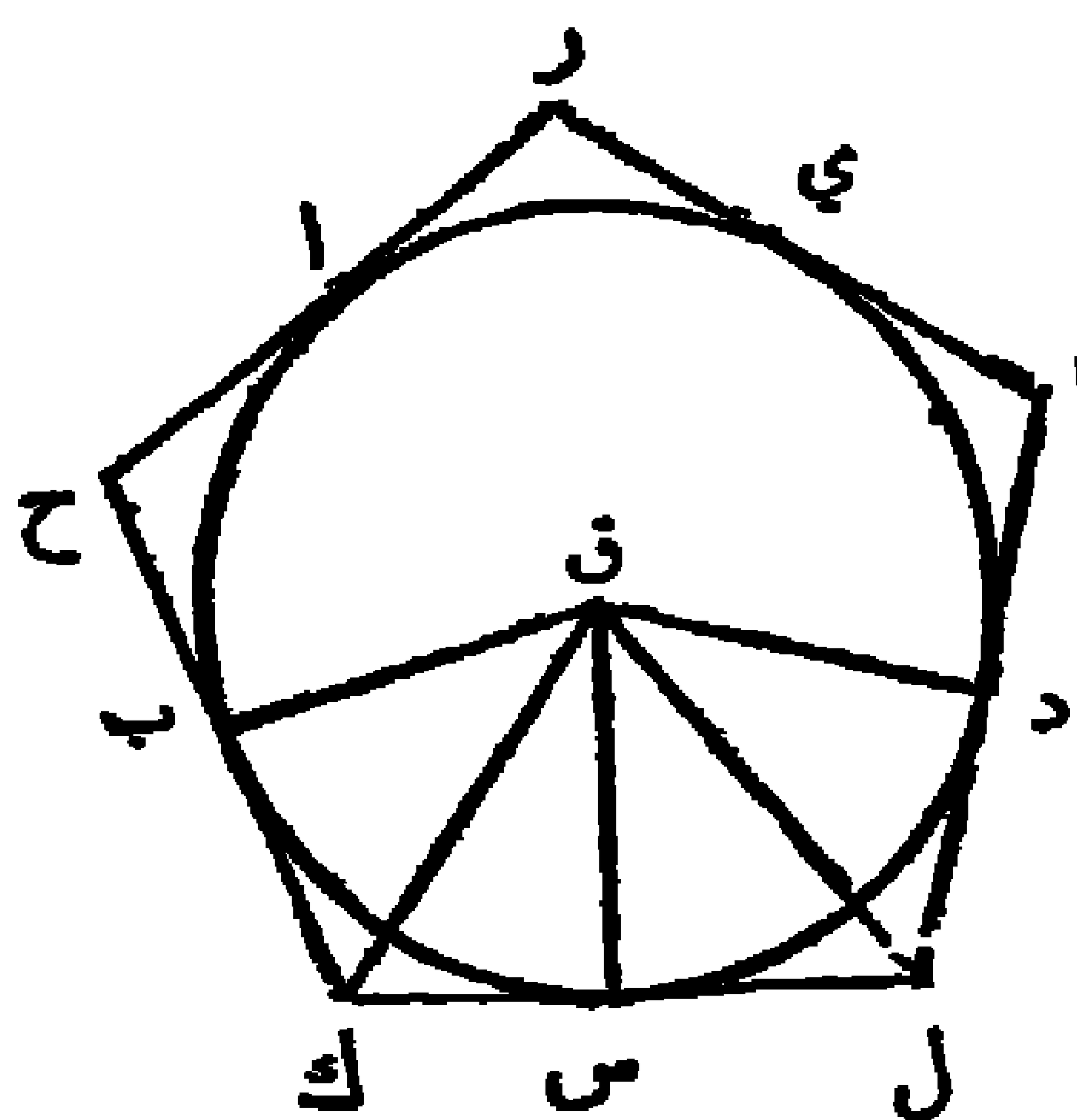
طريقة اخرى. اقسم نصف قطر الدائرة المفروضة حتى ان القائم الزوايا مسطح كل الخطّ في احد القسمين يعدل مربع القسم الاخر (ق ١١ ك ٢) وارسم خطاً يعدل اكبر القسمين على جانبَي نقطة مفروضة في الدائرة المفروضة فكل واحد منهما يقطع قوساً عُشر المحيط (فرع ٢ ق ١٠ ك٤) فالقوسان معاً خمس المحيط ووترهُ ضلع شكل ذي خمسة اضلاع قياسي في الدائرة

القضية الثانية عشرة. ع

علينا ان نرسم شكلاً قياسياً ذا خمسة اضلاع محيطاً بدائرة مفروضة

لتكن ا ب س د الدائرة المفروضة. علينا نرسم شكلاً قياسياً ذا خمسة اضلاع

يحيط بها



لتكن زوايا شكل قياسيّ ذي خمسة اضلاع في الدائرة في النقط ا ب س د ى فالاقواس اب ب س س د دى متساوية (ق١١ ك٤) وفي النقط ا ب س د ى ارسم الخطوط رح ح ك ك ل ل م م ر حتى تمسّ الدائرة (ق١٧ ك٣) استعلم المركز ق وارسم ق ب ق ك ق س ق ل ق د

فبما ان الخط المستقيم ك ل يمسّ الدائرة ا ب س د ى في النقطة س التي رُسِم اليها ق س من المركز فالخط ق س عمود على ك ل (ق١٨ ك٣) والزاويتان عند س قائمتان. وهكذا يبرهن ايضًا ان الزوايا عند ب ود قائمات. ولكون ق س ك قائمة فمربَّع ق ك يعدل مجتمع مربَّعي ق س س ك (ق٤٧ ك ١) ولكون ق ب ك قائمة فمربع ق ك يعدل مربَّعي ق ب ب ك فمربعا ق س س ك يعدلان مربَّعي ق ب ب ك. ومربع ق س يعدل مربع ق ب فالباقي مربع س ك يعدل الباقي مربع ب ك والخط س ك يعدل الخط ب ك. وبما ان ق س يعدل ق ب وق ك مشترك بين المثلثين ق س ك ق ب ك فالضلعان ب ق ق ك يعدلان الضلعين س ق ق ك والقاعدة س ك تعدل القاعدة ب ك. فالزاوية ب ق ك تعدل الزاوية س ق ك (ق٨ ك١) وب ك ق تعدل س ك ق. فكل الزاوية ب ق س هي مضاعف ك ق س وب ك س مضاعف ق ك س. وهكذا يبرهن ان الزاوية س ق د مضاعف س ق ل وس ل د مضاعف س ل ق. ولكون القوس ب س يعدل القوس س د فالزاوية ب ق س تعدل س ق د (ق٢٧ ك٣) وب ق س مضاعف ك ق س وس ق د مضاعف س ق ل فالزاوية ك ق س تعدل س ق ل. والقائمة ق س ك تعدل القائمة ق س ل فالمثلثان ق ك س ق ل س لهما زاويتان من الواحد تعدلان زاويتين من الآخر والضلع ق س مشترك بينهما فالمثلثان متساويان (ق٢٦ ك١) والضلع ك س يعدل الضلع س ل والزاوية ق ك س تعدل ق ل س. ولكون ك س يعدل س ل فالخط ك ل مضاعف ك س. وهكذا يبرهن ان ح ك مضاعف ب ك. ولكن ب ك

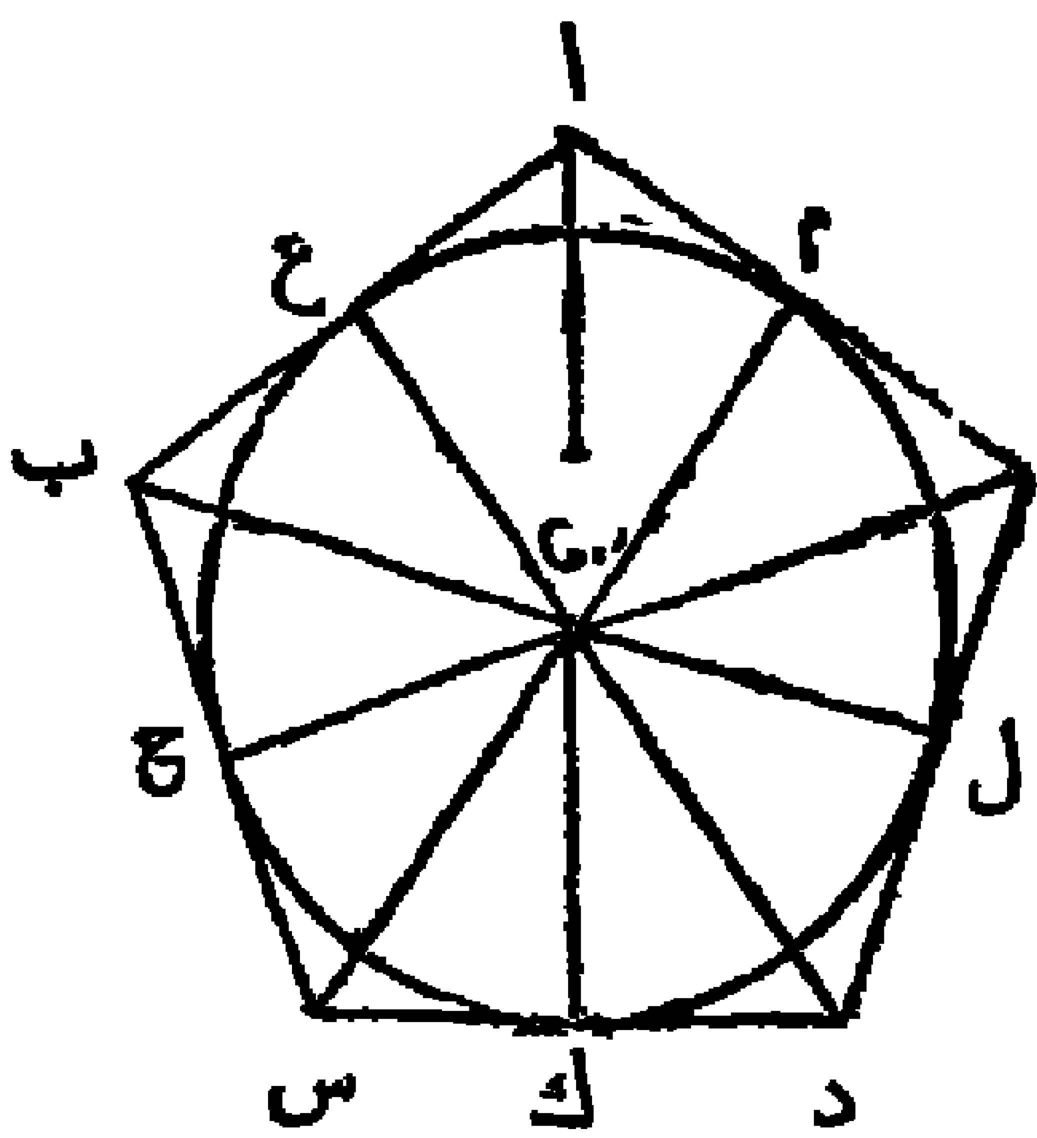
يعدل ك س كما قد تبرهن سابقًا فالخط ك ل يعدل ح ك (اولية ٦) وهكذا يبرهن ان رح رم م ل تعدل ح ك او ك ل. فالشكل رح ك ل م ذو خمسة اضلاع متساوية وزواياهُ متساوية ايضًا لانَّ الزاوية ق ك س تعدل ق ل س وح ك س مضاعف ق ك س وك ل م مضاعف ق ل س كما تقدم برهانهُ فالزاوية ح ك ل تعدل ك ل م. وهكذا يبرهن ان ل م ر م رح رح ك تعدل ح ك ل او ك ل م. فالزوايا الخمس متساوية وقد تبرهن ان الشكل متساوي الاضلاع فهو ذو خمسة اضلاع قياسيّ محيط بالدائرة المفروضة

القضية الثالثة عشرة. ع

علينا ان نرسم دائرة في شكل قياسيّ مفروض ذي خمسة اضلاع

ليكن ا ب س د ى الشكل المفروض. علينا ان نرسم فيه دائرة

نصّف الزاويتين ب س د س د ى بالخطّين المستقيمين س ق د ق. ومن ق نقطة التقائهما ارسم الخطوط المستقيمة ق ب ق ا ق ى. فلكون ب س يعدل س د وق س مشترك بين المثلثين ب س ق د س ق فالضلعان ب س س ق يعدلان الضلعين د س س ق والزاوية ب س ق تعدل الزاوية د س ق. فالقاعدة ب ق تعدل القاعدة ق د (ق ٤ ك ١) وبقية الزوايا من الواحد تعدل بقية الزوايا من الآخر فالزاوية س ب ق تعدل س د ق. ولانَّ س د ى مضاعف س د ق وس د ى تعدل س ب ا وس د ق تعدل س ب ق فالزاوية س ب ا مضاعف س ب ق فالزاوية ا ب ق تعدل س ب ق فالزاوية ا ب س قد تنصَّفت بالخط المستقيم ب ق. وهكذا يبرهن ان ب ا ى ا ى د تنصَّفتا بالخطَّين المستقيمين ا ق ى ق



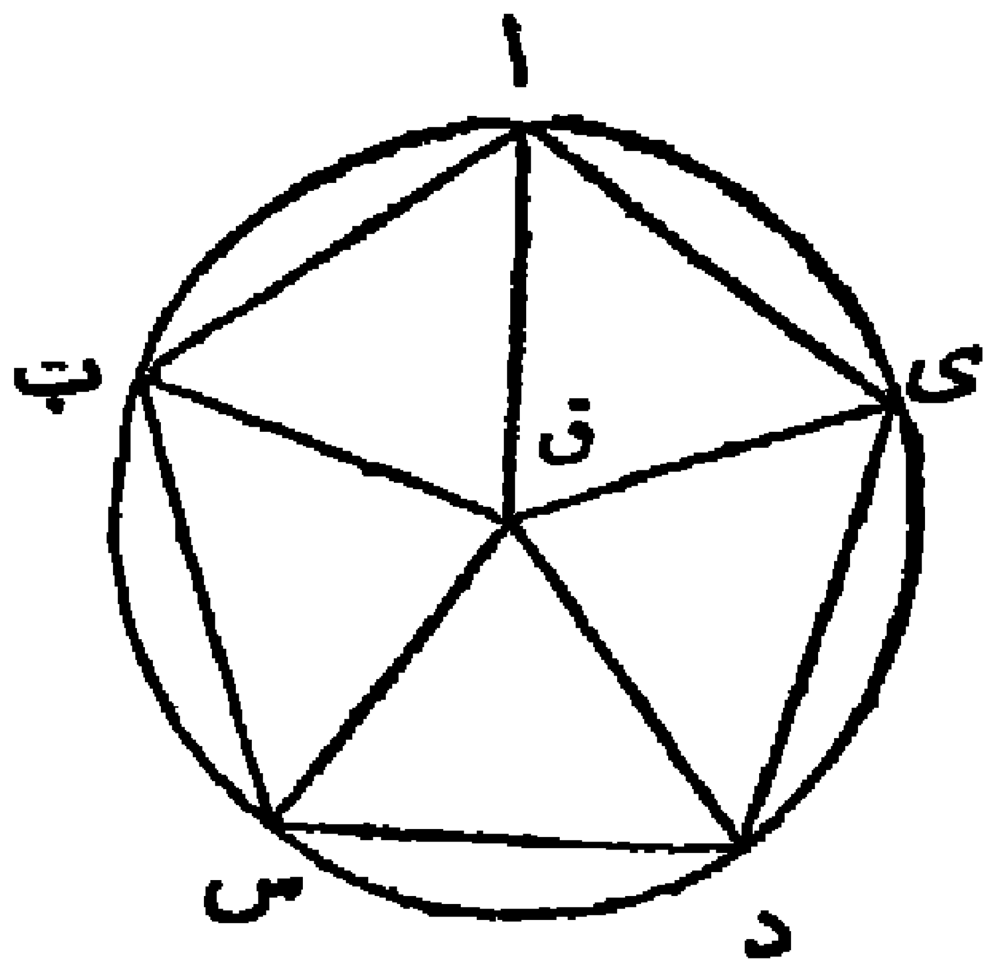
ثم من النقطة ق (ق ١٢ ك ١) ارسم ق غ ق ح ق ك ق ل ق م عمودية على الخطوط المستقيمة ا ب ب س س د د ى ى ا. فمن حيث ان الزاوية ح س ق تعدل ك س ق والقائمة ق ح س تعدل القائمة ق ك س والضلع ق س

مشترك بين المثلثين فالضلع الثالث ق ح يعدل الثالث ق ك (ق ٢٦ ك ١) وهكذا يبرهن ان ق ل ق م ق غ تعدل ق ح او ق ك فالخطوط الخمسة المذكورة متساوية. فالدائرة المرسومة على المركز ق وعلى بعد احد هذه الخطوط تمرّ باطراف الأُخَر وتمسّ الخطوط الخمسة ا ب ب س س د د ى ى ا. ومن حيث ان الزوايا عند النقط غ ح ك ل م قائمات فالخطوط الخمسة ا ب ب س س د د ى ى ا هي عمودية على اطراف انصاف الاقطار فهي مماسات (فرع ١ ق ١٦ ك ٣) فقد رُسِمت الدائرة في الشكل المفروض

القضية الرابعة عشرة. ع

علينا ان نرسم دائرة تحيط بشكل قياسيّ مفروض ذي خمسة اضلاع

ليكن ا ب س د ى شكلاً مفروضًا قياسيًّا ذا خمسة اضلاع. فعلينا ان نرسم دائرة تحيط بهِ



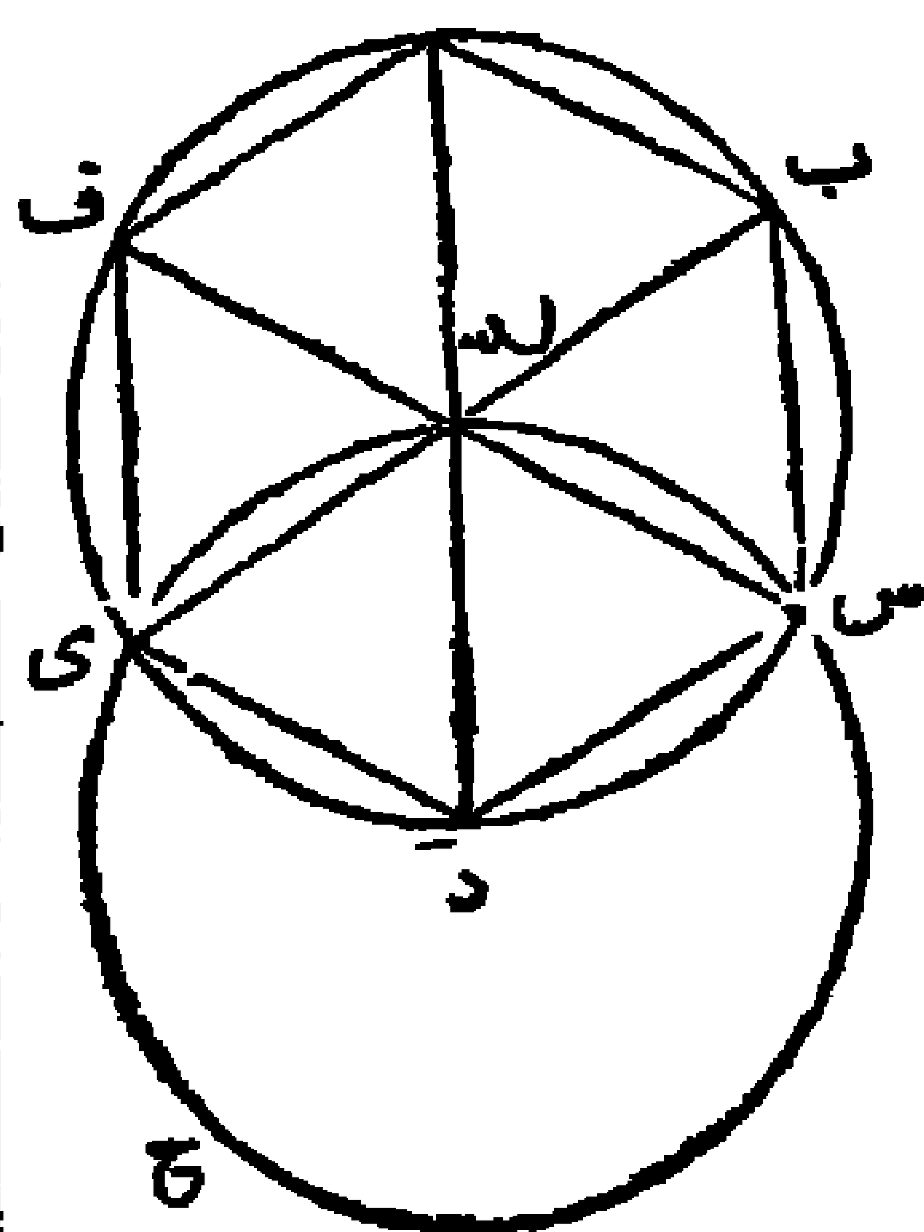
نصّف الزاوية ب س د بالخط المستقيم س ق والزاوية س د ى بالخط المستقيم د ق (ق ٩ ك ١) ومن ق نقطة التقائهما ارسم الخطوط المستقيمة ق ب ق ا ق ى الى النقط ب وا وى. فيبرهن كما في القضية السابقة ان الزوايا س ب ا ب ا ى ا ى د قد تنصّفت بالخطوط المستقيمة ق ب ق ا ق ى. ومن حيث ان الزاوية ب س د تعدل س د ى والزاوية ق س د انما هي نصف ب س د وس د ق نصف س د ى فالزاوية ق س د تعدل س د ق فالضلع ق س يعدل الضلع ق د (ق ٦ ك ١) وهكذا يبرهن ان ق ب ق ا ق ى تعدل ق س او ق د فهذه الخطوط الخمسة المستقيمة متساوية واذا جعلت النقطة ق مركزًا واحد هذه الخطوط بعدًا ورُسِمَتْ دائرة فمحيطها يمرّ باطراف الأُخَر وهي تحيط بالشكل القياسيّ ذي الخمسة الاضلاع ا ب س د ى

القضية الخامسة عشرة . ع

علينا ان نرسم شكلاً قياسيًّا ذا ستَّة اضلاع في دائرة مفروضة

لتكن ا ب س د ى ف الدائرة المفروضة . فعلينا ان نرسم فيها شكلاً قياسيًّا ذا ستّة اضلاع

استعلم المركز غ وارسم القطر ا غ د واجعل د مركزًا ود غ بعدًا وارسم الدائرة ى غ س ح . ارسم الخط ى غ والخط غ س وأَخرجها الى ب وف . ثم ارسم الخطوط المستقيمة ا ب ب س س د د ى ى ف ف ا .



فالشكل ذو الستَّة الاضلاع ا ب س د ى ف هو قياسيٌّ اي اضلاعهُ وزواياهُ متساوية

من حيث ان النقطة غ هي مركز الدائرة ا ب س د ف فالخط غ ى يعدل الخط غ د . ولانَّ د مركز الدائرة غ س ح ى فالخط د ى يعدل د غ . فالخط غ ى يعدل ى د والمثلث ى غ د هو متساوي الاضلاع وزواياهُ الثلاث متساوية (فرع ق٥ ك١) وزوايا كل مثلث تعدل قائمتين (ق٣٢ ك١) فالزاوية ى غ د هي ثُلث قائمتين . وهكذا يبرهن ان الزاوية د غ س ثُلث قائمتين . ومن حيث ان الخطَّ المستقيم غ س احدث مع ى ب الزاويتين المتواليتين ى غ س س غ ب حتى تعدلا قائمتين (ق١٣ ك١) فالزاوية س غ ب تعدل ثُلث قائمتين . فالزوايا الثلاث ى غ د د غ س س غ ب متساوية . والزوايا المتقابلة ب غ ا ا غ ف ف غ ى (ق١٥ ك١) متساوية ايضًا . فالزوايا الستّ ى غ د د غ س س غ ب ب غ ا ا غ ف ف غ ى متساوية . والزوايا المتساوية في المركز تقابلها اقواسٌ متساوية (ق٢٦ ك٣) والاقواس المتساوية تقابلها خطوط مستقيمة متساوية (ق٢٩ ك٢) فالخطوط الستّة ا ب ب س س د د ى ى ف ف ا متساوية . والشكل ذو الاضلاع الستة ا ب س د ى ف متساوي الاضلاع . وهو متساوي الزوايا ايضًا . لانَّ القوس ا ف يعدل القوس ى د فاذا أُضيف الى كل واحد منها القوس ا ب س د فالكل ف ا ب س د يعدل الكل ى د س ب ا . والزاوية ف ى د هي على القوس ف ا ب س د .

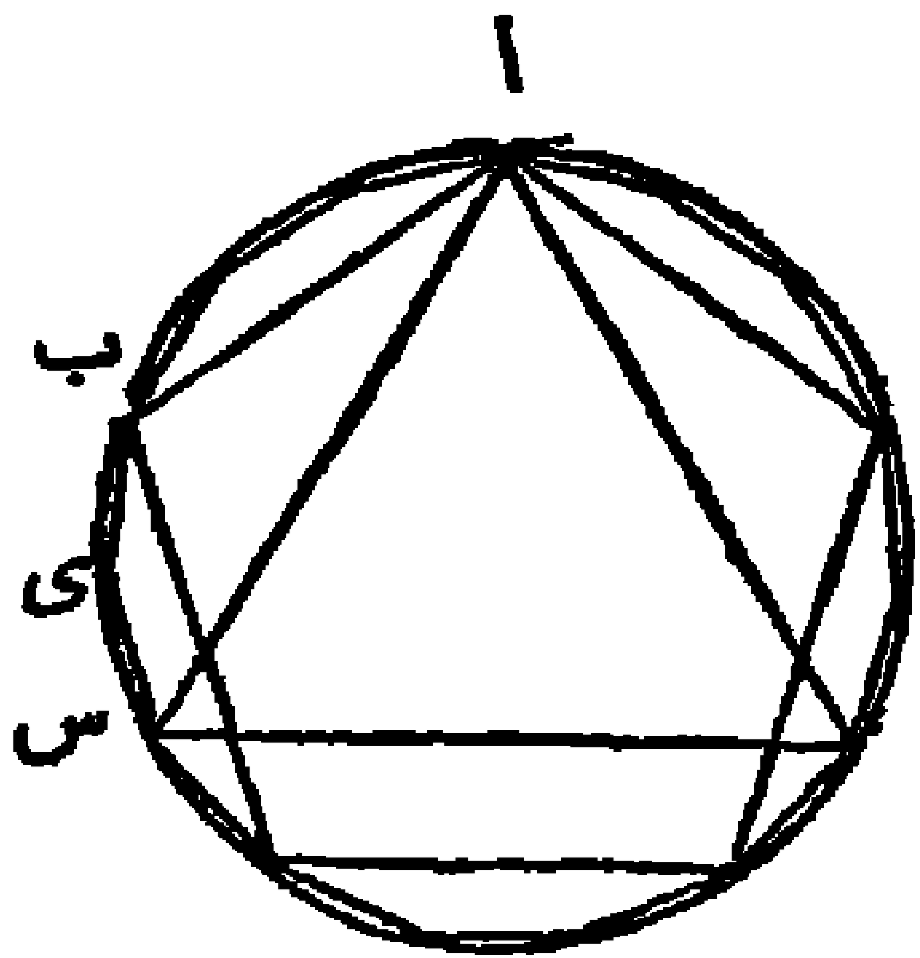
والزاوية ا ف ى هي على القوس ى د س ب ا فالزاوية ا ف ى تعدل الزاوية ف ى د وهكذا يبرهن في بقية زوايا الشكل انها تعدل ا ف ى او ف ى د فالشكل ا ب س د ى ف متساوي الزوايا . وقد تبرهن انهُ متساوي الاضلاع فهو قياسيٌّ وقد رُسِمَ في الدائرة المفروضة ا ب س د ى ف

فرعٌ . ضلع شكل ذي ستة اضلاع قياسيٍّ في دائرة يعدل نصف قطر الدائرة . واذا رُسِمَ خطوطٌ مستقيمة تمسُّ الدائرة في النُقَط ا ب س د ى ف يحدث شكل قياسيٌّ ذو ستة اضلاع محيط بالدائرة وعلى هذا الاسلوب تُرسَم دائرة في شكل قياسيٍّ مفروض ذي ستة اضلاع او محيطة بهِ حسبما تقدم في ذي خمسة اضلاع

القضية السادسة عشرة . ع

علينا ان نرسم شكلاً قياسيًّا ذا خمسة عشر ضلعًا في دائرة مفروضة

لتكن ا ب س د الدائرة المفروضة . فعلينا ان نرسم فيها شكلاً قياسيًّا ذا خمسة عشر ضلعًا



ليكن ا س ضلع مثلثٍ متساوي الاضلاع في الدائرة (ق ٢ ك٤) وا ب ضلع شكلٍ قياسيٍّ ذي خمسة اضلاع في الدائرة (ق ١١ ك٤) . فالقوس ا ب س هو ثُلث المحيط او $\frac{٥}{١٥}$ من المحيط والقوس ا ب هو خمس المحيط اي $\frac{٣}{١٥}$ من المحيط فالقوس ب س فضلتهما وهو $\frac{٢}{١٥}$ من المحيط. نصِّف ب س في ى (ق ٣٠ ك٣) فكل واحدٍ من ب ى ى س هو $\frac{١}{١٥}$ من المحيط فاذا رُسِمَ الخطَّان المستقيمان ب ى ى س ووُضع امثالهما في دائر المحيط (ق ١ ك٤) يحدث شكلٌ قياسيٌّ ذو خمسة عشر ضلعًا في الدائرة

اذا رُسِمَ خطوط مستقيمة تمس الدائرة في زوايا الشكل المذكور يحدث شكل قياسيٌّ ذو خمسة عشر ضلعًا محيط بالدائرة . وعلى هذا الاسلوب ايضًا حسبما تقدم في شكل ذي خمسة اضلاع تُرسَم دائرة في شكل قياسيٍّ مفروض ذي خمسة عشر ضلعًا او محيطة بهِ

تعليقة

اذا رُسِم في دائرة شكلٌ قياسيٌّ ذو اضلاع كثيرة وتنصَّفت الاقواس التي تقابل اضلاعهُ فيحدث شكل قياسيٌّ عدد اضلاعهِ مضاعف عدد اضلاع الاول . وهكذا من المربع في دائرة تحدث اشكال ذات ثمانية اضلاع او ستة عشر ضلعًا او ٣٢ ضلعًا او ٦٤ ضلعًا الى اخرهِ . ومن ذي ستة اضلاع في دائرة يحدث شكل ذو ١٢ او ٢٤ او ٤٨ او ٩٦ ضلعًا الى اخرهِ . ومن ذي عشرة اضلاع يحدث شكل ذو ٢٠ او ٤٠ او ٨٠ ضلعًا الى اخرهِ . ومن ذي خمسة عشر ضلعًا يحدث شكل ذو ٣٠ او ٦٠ ضلعًا الى اخرهِ . ولكن الى الآن لم توجد طريقة لرسم شكل قياسيٍّ ذي سبعة اضلاع في دائرة

م

اصول الهندسة

الكتاب الخامس

حدود

١ المقدار هو ما كان لهُ واحدٌ او اكثر من ثلثة اشيآءَ وهي طول وعرض وعمق فاذا فُرِض مقداران اكبر واصغر وكان الاصغر قياسًا تامًّا للاكبر اي وُجِد فيهِ مرارًا معلومة بدون باقٍ فالاصغر جزء الاكبر

٢ اذا كان اصغر مقدارين قياسًا تامًّا لاكبرها فالاكبر مضروب الاصغر

٣ التناسب هو التفاوت بين مقدارين من جنسٍ واحدٍ باعتبار الكميَّة

٤ المقادير هي من جنس واحد متى امكن زيادة الاصغر حتى يزيد عن الاكبر والتناسب لا يقع الاَّ بين المقادير المتجانسة

٥ اذا فُرِض اربعة مقادير وضُرِب الاول والثالث مرارًا ما وضُرِب الثاني والرابع مرارًا ما فاذا عدل الثالث الرابع عند ما عدل الاولُ الثانيَ او كان اكبر منهُ عند ما كان الاول اكبر من الثاني او اصغر منهُ عند ما كان الاول اصغر من الثاني فيقال ان نسبة الاول الى الثاني كنسبة الثالث الى الرابع

٦ المقادير المتناسبة هي التي كان تناسب الاول الى الثاني مثل تناسب الثالث الى الرابع وتناسب الثالث الى الرابع مثل تناسب الخامس الى السادس وهلمَّ جرًّا مهما تعددت المقادير. فاذا كانت المقادير الاربعة ا ب س د متناسبة يقال ان نسبة الف الى باءٍ كنسبة سين الى دال وتكتب هكذا ا : ب :: س : د او ا : ب = س : د

٧ اذا فُرِض اربعة مقادير كما في الحدّ الخامس وقاسَ الاولُ الثانيَ مرارًا اكثر مما يقيس الثالثُ الرابعَ يقال ان تناسب الاول الى الثاني هو اعظم من تناسب

الثالث الى الرابع وان تناسب الثالث الى الرابع هو اصغر من تناسب الاول الى الثاني

٨ متى تعددت المقادير وكان تناسب الاول الى الثاني يماثل تناسب الثاني الى الثالث وتناسب الثاني الى الثالث يماثل تناسب الثالث الى الرابع وهلمّ جرًّا يقال انها على نسبةٍ متّصلة

٩ متى كان ثلاثة مقادير على نسبة متّصلة يقال ان الثاني متناسب متوسط بين الآخرين

١٠ اذا تعددت المقادير المتجانسة كما في الحدّ الثامن يقال ان تناسب الاول الى الاخير هو مركب من تناسب الاول الى الثاني مع تناسب الثاني الى الثالث مع تناسب الثالث الى الرابع وهلمّ جرًّا الى الاخير

فلو فُرِض اربعة مقادير ا ب س د يقال ان تناسب ا الى د هو مركب من تناسب ا الى ب مع تناسب ب الى س مع تناسب س الى د ولذا فُرِض ا:ب::ى:ف وب:س::غ:ح وس:د::ك:ل فتناسب ا الى د هو مركب من تناسب ا الى ب مع ب الى س مع س الى د او من تناسبات تعدل المذكورة كتناسب ى الى ف وغ الى ح وك الى ل

وهكذا اذا فُرِض بين م ون التناسب الواقع بين ا ود. فلاجل الاختصار يقال ان التناسب بين م ون هو مركّب من التناسبات التي تركب منها التناسب بين ا ود اي من تناسب ى الى ف وغ الى ح وك الى ل

١١ متى كانت ثلاثة مقادير على نسبةٍ متّصلة يقال ان تناسب الاول الى الثالث هو مضاعف تناسب الاول الى الثاني. فاذا فُرِض ا:ب::ب:س فتناسب ا الى س هو مضاعف تناسب ا الى ب. وحسب الحدّ السابق تناسب ا الى س هو مركّبٌ من تناسب ا الى ب وب الى س فالتناسب المركّب من تناسبَين متماثلَين هو مضاعف كلٍّ منهما

١٢ متى كان اربعة مقادير على نسبةٍ متّصلة يقال ان تناسب الاول الى الرابع هو ثلاثة امثال تناسب الاول الى الثاني او الثالث الى الرابع واذا كان خمسة مقادير على نسبةٍ متّصلة يقال ان تناسب الاول الى الخامس هو اربعة امثال تناسب الاول الى الثاني او الثاني الى الثالث وهلمّ جرًّا الى النهاية. فالتناسب المركّب من ثلاث تناسبات متماثلة هو ثلاثة امثال كلٍّ منها والمركب من اربع تناسبات

هو اربعة امثال كلٍّ منها وهلمَّ جرًّا

١٣ في اربع متناسبات تسمى الاولى والثالثة السابقَين والثانية والرابعة التاليين. والسابق مع تاليهِ هما المتناسبان والسابقان معًا او التاليان معًا هما المتشابهان

١٤ التبادل في اربعة مقادير متناسبة هو ان يكون الاول الى الثالث كالثاني الى الرابع (ق١٦ ك٥)

١٥ القلب في اربعة مقادير متناسبة هو ان يكون الثاني الى الاول كالرابع الى الثالث (قضية الف ك ٥)

١٦ التركيب هو متى كان اربعة مقادير متناسبة وكان الاول مع الثاني الى الثاني كالثالث مع الرابع الى الرابع (ق١٨ ك ٥)

١٧ القسمة هي متى كان اربعة مقادير متناسبة وكانت زيادة الاول عن الثاني الى الثاني كزيادة الثالث عن الرابع الى الرابع (ق١٧ ك ٥)

١٨ الطرح هو متى كان اربعة مقادير متناسبة وكان الاول الى زيادتهِ عن الثاني كالثالث الى زيادتهِ عن الرابع (ق د ك٥)

اوليات

١ اذا ضُرِب مقادير متساوية في كميات متساوية تبقى متساوية

٢ المقادير التي تقيس مقادير متساوية مرارًا متساوية هي متساوية

٣ مضروبٌ لمقدارٍ اعظم هو اعظم من ذات هذا المضروب لمقدار اصغر

٤ اذا كان مضروبٌ لمقدارٍ اعظم من ذات هذا المضروب لمقدار آخر فالمقدار الاول اعظم من الثاني

القضية الاولى. ن

اذا فُرِضَت عدة مقادير قابلة الانقسام على عدة اخرى من المقادير مرارًا معلومة كل واحدٍ على نظيرهِ فحسبما يتعدد كلٌّ من المقسومات

عليها في مقسومهِ هكذا يتعدد مجتمع المقسومات عليها في مجتمع المقاسيم

(انظر كتاب علم الجبر عـ ١٦٦ـــ)

لنفرض المقادير ا وب وس قابلة الانقسام مرارًا معلومة على المقادير د وى وف كل واحد على نظيرهِ فالمجتمع د+ى+ف يتعدد في المجتمع ا+ب+س كما يتعدَّد د في ا

لنفرض ان د يتعدَّد في ا ثلاث مرات وهكذا ى في ب وف في س

فلكون ا يعدُّ د ثلاث مرات لنا   ا = د + د + د

وايضًا   ب=ى+ى+ى

وايضًا   س=ف+ف+ف

وباضافة اشياءَ متساوية الى اشياءَ متساوية (اولية ٢ ك١) ا+ب+س يعدل د+ى+ف ثلاث مرات وهكذا لو تعددت د وى وف في ا وب وس اكثر او اقل من ثلاث مرات

فرعٌ. اذا فرضنا م عددًا ما كان م د+م ى+م ف=م(د+ى+ف) لانَّ م د م ى م ف هي تعداد د ى ف مرارًا تماثل م فمجتمعها يتعدد د ايضًا مرارًا تماثل م

القضية الثانية . ن

اذا ضُرِبَ مقدارٌ في عددٍ ما واضيف الى الحاصل المقدار ذاتهُ مضروبًا في عددٍ آخر فالمجتمع يعدُّ ذلك المقدار مرارًا تماثل الاحاد في مجتمع المضروبَين فيهما. (انظر كتاب الجبر عـ ١٨٧ـــ)

لنفرض ا=م س وب=ن س فحينئذٍ ا+ب=(م+ن) س

لانَّ ا=م س لنا ا=س+س+س الخ م مرَّة وايضًا ب=س+س+س الخ ن مرَّة. فباضافة اشياءَ متساوية الى اشياءَ متساوية ا+ب=س متعددة م+ن مرَّة اي ا+ب=(م+ن) س اي ا+ب يعدُّ س مرارًا تماثل الاحاد في م+ن

فرعٌ اوَّل. هكذا مهما تعددت المضاربُ فلو فُرِض ا=م ى وب=ن ى وس=ف ى لنا ا+ب+س (م+ +ف

فرعٌ ثانٍ. وهكذا من حيث ان ا+ب+س=(م+ن+ف) ى وقد فُرِض ا=م ى وب=ن ى وس=ف ى لنا م ى+ن ى+ف ى=(م+ن+ف) ى

القضية الثالثة. ن

اذا فُرِض ثلاثة مقادير وتعدَّد الثاني في الاول مرارًا تماثل الاحاد في عددٍ ما وتعدد الثالث في الثاني مرارًا تماثل الاحاد في عددٍ ما فالثالث يتعدد في الاول مرارًا تماثل الاحاد في حاصل هذَين العددَين. (انظر كتاب الجبر ع ١٨٢)

لنفرض ا=م ب وب=ن س فحينئذٍ ا=م ن س

لانهُ حسب المفروض ب=ن س فلذلك م ب=ن س+ن س+الخ م مرَّة ون س+ن س+الخ م مرَّة يعدل س في ن+ن+الخ م مرَّة (فرع ثان ق ٢ ك٥) ون مضافة الى ذاتها م مرَّة يعدل ن في م اي م ن فاذًا ن س+ن س+الخ م مرَّة يعدل م ن س فاذًا م ب=م ن س وقد فُرِض ا=م ب فاذًا ا=م ن س

القضية الرابعة. ن

اذا فُرِض اربعة مقادير متناسبة اي نسبة الاول الى الثاني كنسبة الثالث الى الرابع وضُرِب الاول والثالث في عدد ما وضُرِب الثاني والرابع في عدد ما فتكون نسبة مضروب الاول الى مضروب الثاني كنسبة مضروب الثالث الى مضروب الرابع (انظر كتاب الجبر ع ١٨٢)

لنفرض ا : ب :: س : د. وليكن م ون عددَين فحينئذٍ م ا : ن ب :: م س : ن د

ليتعدَّد م ا وم س مرارًا تعدل الاحاد في ف ولنتعدَّد ن ب ون د مرارًا تعدل الاحاد في ق فلما (ق٣ ك٥) ف م ا ف م س وايضًا ق ن ب وق ن د. فلكون ا : ب :: س : د حسب المفروض وقد أُخِذ مضروبان متساويان من الاول والثالث

اي ف م ا ف م س ومن الثاني والرابع اي ق ن ب ق ن د. فاذا كان ف م ا اكبر من ق ن ب يكون ف م س اكبر من ق ن د (حد ٥ ك٥) فاذا كان ف م ا ق ن ب متساويين يكون ف م س ق ن د متساويين واذا كان ف م ا اصغر من ق ن ب يكون ف م س اصغر من ق ن د. ولكن ف م ا ف م س تعدّان م ا م س مرارًا متساوية وكذلك ق ن ب ق ن د تعدّانِ ن ب ن د مرارًا متساوية ولذلك (حد ٥ ك ٥) م ا : ن ب :: م س : ن د

فرعٌ. اذا فُرِض ا : ب :: س : د وضُرِب ا وس في عدد ما مثل م تكون نسبة م ا : ب :: م س : د

القضية الخامسة. ن

اذا فُرِض مقداران احدهما يعدُّ الآخر مرارًا ما وأُخِذ من كل واحدٍ منهما مقدارٌ احدهما يعدُّ الآخر كما يعدُّ احدُ الاولَين الآخرَ فالبقية من الواحد تعدُّ البقية من الآخر كما يعدُّ كلُّ الواحد كلَّ الآخر (انظر كتاب الجبر ع ١٦٦)

ليكن م ا م ب مضروبين متساويين من مقدارَين ا وب وليكن ا اكبرهما فالبقية ا−ب يتعدَّد في م ا−م ب مرارًا تماثل تعداد ا في م ا اي م ا−م ب = م (ا−ب)

ليكن د فضلة ا وب اي ا−ب = د. اضف ب الى الجانبين فلنا ا = د+ب. فاذًا (ق ا ك٥) م ا = م د+م ب. اطرح م ب من الجانبين فلنا م ا−م ب = م د وقد فرض د = ا−ب فاذًا م ا−م ب = م (ا−ب)

القضية السادسة. ن

اذا ضُرِب مقدارٌ في عددٍ ما وطُرِح من الحاصل المقدار ذاتهُ مضروبًا في عددٍ اصغر من الاول فالباقي يعدُّ ذلك المقدار مرارًا تعدل الاحاد في فضلة العددَين (انظر كتاب الجبر ع ١٦٦)

لنفرض ا مقدارًا وليتعدَّد م مرَّة ون مرَّة اي م ا ن ا وليكن م اكبر من ن فحينئذٍ ا يتعدد في م ا — ن ا امرارًا تعدل الاحاد في م — ن اي م ا — ن ا = (م — ن) ا

لنفرض ان م — ن = ق فحينئذٍ م = ن + ق . ثم م ا = ن ا + ق ا (ق ٢ ك ٥) . اطرح ن ا من الجانبين . م ا — ن ا = ق ا اي م ا — ن ا يعدُّ ا امرارًا تعدل الاحاد في ق اي م — ن مرَّة اي م ا — ن ا = (م — ن) ا

فرعٌ . اذا كانت فضلة العددَين واحدًا اي م — ن = ١ فحينئذٍ م ا — ن ا = ا

قضية ا . ن

اذا كان اربعة مقاديرَ متناسبة . فهي متناسبة ايضًا بالقلب

مفروض ا : ب :: س : د فحينئذٍ ب : ا :: د : س

ليتعدَّد ا وس م مرَّة اي م ا م س . وليتعدَّد ب ود ن مرَّة اي ن ب ن د . فاذا كان م ا اصغر من ن ب يكون م س اصغر من ن د (حد ٥ ك ٥) واذا كان ن ب اكبر من م ا يكون ن د اكبر من م س واذا كان ن ب = م ا ن د = م س واذا كان ن ب < م ا ن د < م س ولكن ن ب ن د يعدّان ب ود مرارًا متساوية وم ا م س يعدّان ا وس مرارًا متساوية فاذًا (حد ٥ ك ٥) ب : ا :: د : س

قضية ب . ن

في اربعة مقادير اذا تعدَّد الثاني في الاول او الاول في الثاني كما يتعدد الرابع في الثالث او الثالث في الرابع تكون نسبة الاول الى الثاني كنسبة الثالث الى الرابع

اولًا ليتعدد ا وب م مرَّة ثم م ا : ا :: م ب : ب

ليتعدَّد م ا م ب مرارًا تعدل الاحاد في ن اي ن مرَّة . وليتعدَّد ا وب مرارًا تعدل الاحاد في ف اي ف مرَّة فلنا (ق ٣ ك ٥) ن م ا ف ا ن م ب ف ب . فاذا كان ن م ا اكبر من ف ا يكون ن م اكبر من ف . واذا كان ن م اكبر من ف يكون ن م ب اكبر من ف ب فاذا كان ن م ا اكبر من ف ا يكون ن م ب اكبر من ف ب واذا كان ن م ا = ف ا ن م ب = ف ب . واذا كان ن م ا < ف ا

ن م ب ـ ف ب وقد تعدد م ا م ب في ن م ا ن م ب مرارًا متساوية . وقد تعدّد ا وب في ف ا ف ب مرارًا متساوية فاذًا م ا : ا :: م ب : ب (حدّ ٥ ك ٥)

ثانيًا ليكن س جزءًا من ا (حدّ ا ك ٥) وليكن د ذات ذلك الجزء من ب فيتعدّد س في ا كما يتعدّد د في ب وحسبما قد تبرهن ا : س :: ب : د وبالقلب (ق ا ك ٥) س : ا :: د : ب

قضية ج . ن

اذا فُرِض اربعة مقادير متناسبة اي نسبة الاول الى الثاني كنسبة الثالث الى الرابع وكان الاول مضروب الثاني او جزءًا منهُ فالثالث ذات هذا المضروب او الجزء من الرابع

مفروض ا : ب :: س : د . واولاً ليكن ا مضروب ب اي ليتعدّد ب في ا مرارًا معلومة فيكون س ذات هذا المضروب من د اي د يتعدد في س كما يتعدد ب في ا اي اذا كان ا = م ب فحينئذٍ س = م د

ليتعدد ا وس مرتين مثلاً اي ٢ ا ٢ س وليتعدّد ب ود ٢ م مرّة اي ٢ م ب ٢ م د (ق ٣ ك ٥) . فمن حيث ان ا = م ب ٢ ا = ٢ م ب . ومن حيث ان ا : ب :: س : د و ٢ ا = ٢ م ب فاذًا ٢ س = ٢ م د (حدّ ٥ ك ٥) وس = م د اي د يتعدد في س مرارًا تعدل الاحاد في م اي م مرّة اي كما يتعدد ب في ا

ثانيًا ليكن ا جزءًا من ب فيكون س ذات هذا الجزء من د . لانّ ا : ب :: س : د وبالقلب (ق ا ك ٥) ب : ا :: د : س . ولكن ا هو جزءٌ من ب اي ب هو مضروب ا وكما تقدم د هو ذات هذا المضروب من س اي س ذات الجزء من د الذي كان ا من ب

القضية السابعة . ن

مقادير متساوية بينها وبين مقدارٍ مفروضٍ تناسبٌ واحدٌ . والمقدار الواحد بينهُ وبين مقادير متساوية تناسب واحد . (جبرعـ ١٥٩)

ليكن ا وب مقدارين متساويين وس مقدارًا اخر فنسبة ا : س :: ب : س

ليكن م ا م ب مضروبين متساويين من ا وب ون س مضروبًا من س .

فلكون ا = ب م ا = م ب (اوليَّة ا كـ٥) فاذا كان م ا اكبر من ن س يكون م ب اكبر من ن س واذا كان م ا = ن س م ب = ن س واذا كان م ا < ن س م ب < ن س . ولكن م ا م ب مضروبان متساويان من ا وب ون س هو مضروب من س فاذًا (حد ٥ كـ٥) ا : س :: ب : س

ثانيًا اذا كان ا = ب فنسبة س : ا :: س : ب لانهُ قد تبرهن ان ا : س :: ب : س وبالقلب (ق ا كـ٥) س : ا :: س : ب

القضية الثامنة . ن

اذا فرض مقادير غير متساوية فتناسب الاكبر الى مقدارٍ مفروض هو اعظم من تناسب الاصغر الى ذلك المقدار . وتناسب ذلك المقدار الى الاصغر هو اعظم من تناسبهِ الى الاكبر (جبر ع ١٦٣ وع ١٦٤)

ليكن ا + ب مقدارًا اكبر من مقدارٍ اخر هو ا وليكن س مقدارًا ثالثًا فتناسب ا + ب الى س هو اعظم من تناسب ا الى س وتناسب س الى ا هو اعظم من تناسبهِ الى ا + ب

ليكن م عددًا وليكن كلٌّ من م ا م ب اكبر من س . وليكن ن س المضروب الاصغر من س الذي يزيد على م ا + م ب ثم ن س — س اي (ن — ا) س (ق ا كـ٥) يكون اصغر من م ا + م ب اي م ا + م ب او م (ا + ب) هو اكبر من (ن — ا) س . لانَّ ن س هو اكبر من م ا + م ب وس اصغر من م ب يكون ن س — س اكبر من م ا اي م ا هو اصغر من ن س — س اي من (ن — ا) س . فاذًا المضروب ا + ب في م هو اكبر من المضروب س في ن — ا ولكن المضروب ا في م ليس باكبر من المضروب س في ن — ا فاذًا تناسب ا + ب الى س هو اعظم من تناسب ا الى س (حد ٧ كـ٥)

ثم من حيث ان المضروب س في ن — ا هو اكبر من المضروب ا في م وليس

اكبر من المضروب ا + ب في م فتناسب س الى ا هو اعظم من تناسبهِ الى ا + ب (حد ٧ ك ٥)

القضية التاسعة . ن

المقادير التي لها تناسب واحد الى مقدارٍ مفروض هي متساوية واذا كان لمقدارٍ واحد تناسب واحد الى مقادير فهي متساوية (جبر ع ١٥٨)

مفروض ا : س :: ب : س فحينئذٍ ا = ب

والّا فليكن ا اكبر من ب . فيمكن وجود عددَين م ون كما في القضية السابقة حتى يكون م ا اكبر من ن س ولا يكون م ب اكبر من ن س . ومن حيث ان ا : س :: ب : س فاذا كان م ا اكبر من ن س يكون م ب ايضاً اكبر من ن س (حد ٥ ك ٥) وقد تبرهن ان م ب ليس اكبر من ن س وذاك محال فلا يكون ا اكبر من ب اي ا = ب

ثم لنفرض س : ا :: س : ب فحينئذٍ ا = ب لانهُ بالقلب (ق ا ك ٥) ا : س :: ب : س ولذلك حسبما تقدم ا = ب

القضية العاشرة . ن

اذا فُرِض مقداران وكان بين احدهما ومقدارٍ ثالث تناسبٌ اعظم من تناسب ثانيهما الى ذلك المقدار فالاول اكبرهما . واذا كان تناسب الثالث الى احدهما اعظم من تناسبهِ الى الآخر فهو اصغرهما (جبر ع ١٦٣ وع ١٦٤)

اذا كان تناسب ا الى س اعظم من تناسب ب الى س يكون ا اكبر من ب لانهُ حسب المفروض ا : س > ب : س فيمكن وجود عددين م ون حتى يكون م ا > ن س وم ب ≯ ن س (حد ٧ ك ٥) فيكون م ا > م ب وا > ب (اولية ٤ ك ٥)

ثم ليكن س : ب > س : ا فيكون ب < ا . لانهُ قد يمكن ان يوجد عددان

م ون حتى يكون م س > ن ب وم س < ن ا (حد ٧ ك ٥) فمن حيث ان ن ب اصغر من م س ون ا اكبر من م س يكون ن ب < ن ا فيكون ب < ا

القضية الحادية عشرة . ن

التناسبات التي تعدل تناسبًا واحدًا هي متساوية (جبر ع ١٨٣)

مفروض ا : ب :: س : د وس : د :: ى : ف فحينئذٍ ا : ب :: ى : ف

لنفرض م ا م س م ى مضاريب متساوية من ا وس وى وايضًا ن ب ن د ن ف مضاريب متساوية من ب ود وف . فلكون ا : ب :: س : د فاذا كان م ا > ن ب يكون م س > ن د (حد ٥ ك ٥) . ولكن اذا كان م س > ن د يكون م ى > ن ف (حد ٥ ك ٥) لانّ س : د :: ى : ف فاذا كان م ا > ن ب يكون م ى > ن ف . وهكذا اذا كان م ا = ن ب فيكون م ى = ن ف واذا كان م ا < ن ب يكون م ى < ن ف ولكن م ا م ى هما مضروبان متساويان من ا وى . ون ب ن ف هما مضروبان متساويان من ب وف فاذًا ا : ب :: ى : ف (حد ٥ ك ٥)

القضية الثانية عشرة . ن

اذا كانت عدّة مقادير متناسبةً فنسبة مجتمع السوابق الى مجتمع التوالي كنسبة احد السوابق الى تاليهِ (جبر ع ١٦٦)

مفروض ا : ب :: س : د وس : د :: ى : ف فنسبة ا : ب :: ا + س + ى : ب + د + ف

افرض م ا م س م ى مضاريب متساوية من ا وس وى . وايضًا ن ب ن د ن ف مضاريب متساوية من ب ود وف . فمن حيث ان ا : ب :: س : د فاذا كان م ا > ن ب يكون م س > ن د (حد ٥ ك ٥) واذا كان م س > ن د يكون م ى > ن ف لانّ س : د :: ى : ف . فاذا كان م ا > ن ب يكون م ا + م س + م ى > ن ب + ن د + ن ف وكذلك اذا كان م ا = ن ب يكون م ا + م س + م ى = ن ب + ن د + ن ف واذا كان م ا < ن ب يكون م ا + م س +

م ى < ن ب + ن د + ن ف . ولكن م ا + م س + م ى = م (ا + س + ى) (فرع ق ا ك ٥) وم ا وم ا + م س + م ى هما مضروبان متساويان من ا ومن ا + س + ى . ولهذا السبب ايضاً يكون ن ب ون ب + ن د + ن ف مضروبين متساويَين من ب ومن ب + د + ف فيكون (حد ٥ ك ٥) ا : ب :: ا + س + ى : ب + د + ف

القضية الثالثة عشرة . ن

اذا كان تناسب الاول الى الثاني مثل تناسب الثالث الى الرابع ولكن تناسب الثالث الى الرابع اعظم من تناسب الخامس الى السادس فيكون تناسب الاول الى الثاني اعظم من تناسب الخامس الى السادس (جبر ع ١٨٣)

مفروض ا : ب :: س : د ولكن س : د > ى : ف فحينئذٍ ا : ب > ى : ف . لانّ س : د > ى : ف فيمكن وجود عددين م ون حتى يكون م س > ن د ويكون م ى < ن ف (حد ٧ ك ٥) . فاذاً كان م س > ن د يكون م ا > ن ب لان ا : ب :: س : د فيكون م ا > ن ب وم ى < ن ف فاذاً ا : ب > ى : ف (حد ٧ ك ٥)

القضية الرابعة عشرة . ن

اذا كان تناسب الاول الى الثاني مثل تناسب الثالث الى الرابع فاذا كان الاول اكبر من الثالث يكون الثاني اكبر من الرابع واذا عدل الاول الثالث يعدل الثاني الرابع واذا كان الاول اصغر من الثالث يكون الثاني اصغر من الرابع (جبر ع ١٩٢)

مفروض ا : ب :: س : د فاذا كان ا > س يكون ب > د واذا كان ا = س يكون ب = د واذا كان ا < س يكون ب < د

اولاً ليكن ا ≻ س ثم ا : ب ≻ س : ب (ق٨ ك٥) ولكن ا : ب :: س : د فاذاً س : د ≻ س : ب (ق١٣ ك٥) ولذلك ب ≻ د (ق١٠ ك٥)

وهكذا يبرهن انهُ اذا كان ا = س فحينئذٍ ب = د واذا كان ا ≺ س يكون ب ≺ د

القضية الخامسة عشرة . ن

المقادير بينها ذات التناسب الواقع بين مضاريبها المتساوية (جبر ع١٦٤)

ليكن ا وب مقدارين وم عدداً ما فتناسب ا : ب :: م ا : م ب

لانَّ ا : ب :: ا : ب (ق٧ ك٥) فيكون ا : ب :: ا + ا : ب + ب (ق١٢ ك٥) اي ا : ب :: ٢ا : ٢ب وهكذا ايضاً من حيث ان ا : ب :: ٢ا : ٢ب يكون ا : ب :: ا + ٢ا : ب + ٢ب (ق١٢ ك٥) اي ا : ب :: ٣ا : ٣ب وهلمَّ جرّاً في كل المضاريب المتساوية من ا وب

القضية السادسة عشرة . ن

اذا كان اربعة مقادير من جنسٍ واحدٍ متناسبة تكون متناسبة ايضاً بالمبادلة (جبر ع١٨١)

اذا كان ا : ب :: س : د فبالمبادلة ا : س :: ب : د

خذ م ا م ب مضروبين متساويين من ا وب . ون س ن د مضروبين متساويين من س ود . ثم (ق١٥ ك٥) ا : ب :: م ا : م ب وقد فُرِض ا : ب :: س : د فاذاً (ق١١ ك٥) س : د :: م ا : م ب . ولكن س : د :: ن س : ن د (ق١٥ ك٥) فاذاً م ا : م ب :: ن س : ن د (ق١١ ك٥) فاذا كان م ا ≻ ن س يكون م ب ≻ ن د (ق١٤ ك٥) واذا كان م ا = ن س يكون م ب = ن د واذا كان م ا ≺ ن س يكون م ب ≺ ن د فاذاً (حد٥ ك٥) ا : س :: ب : د

القضية السابعة عشرة · ن

المقادير المتناسبة بالاجمال هي متناسبة ايضًا بالافراد . اي اذا كان تناسب الاول مع الثاني الى الثاني مثل تناسب الثالث مع الرابع الى الرابع يكون تناسب الاول الى الثاني كتناسب الثالث الى الرابع

(جبر ع ١٨)

مفروض ا+ب : ب :: س+د : د فحينئذٍ ا : ب :: س : د

خذ م ا ن ب مضروبين من ا وب في العددين م ون . واولاً ليكن م ا > ن ب .
اضف الى كل واحدٍ منهما م ب فلنا م ا+م ب > م ب+ن ب ولكن م ا+م ب = م(ا+ب) (فرع ق ١ ك ٥) وم ب+ن ب = (م+ن)ب (فرع ٢ ق ٢ ك ٥)
فاذًا م(ا+ب) > (م+ن)ب

ومن حيث ان ا+ب : ب :: س+د : د فاذا كان م(ا+ب) > (م+ن)ب يكون م(س+د) > (م+ن)د اي م س+م د > م د+ن د وبطرح م د من الجانبين م س > ن د . فاذا كان م ا > ن ب يكون م س > ن د . وهكذا يبرهن انهُ اذا كان م ا = ن ب يكون م س = ن د واذا كان م ا < ن ب يكون م د < ن د
فاذًا ا : ب :: س : د (حد ٥ ك ٥)

القضية الثامنة عشرة · ن

المقادير المتناسبة بالافراد هي متناسبة ايضًا بالاجمال . اي اذا كان الاول الى الثاني كالثالث الى الرابع يكون الاول مع الثاني الى الثاني كالثالث مع الرابع الى الرابع (جبر ع ١٨٨)

ليكن ا : ب :: س : د فحينئذٍ ا+ب : ب :: س+د : د

لنفرض م(ا+ب) ون ب مضروبين من ا+ب وب . واولاً ليكن م اعظم من ن . فلكون ا+ب اعظم من ب يكون م(ا+ب) > ن ب وايضًا م(س+د) > ن د فاذا كان م > ن يكون م(ا+ب) > ن ب وم(س+د) > ن د .

وهكذا يبرهن انهُ اذا كان م = ن فيكون م(ا + ب) اعظم من ن ب وم(س + د) اعظم من ن د

ثم ليكن م > ن او ن > م فقد يمكن ان يكون م(ا+ب) اعظم من ن ب او مساوياً لهُ او اصغر منهُ. اولاً ليكن م(ا+ب) اعظم من ن ب فيكون م ا + م ب > ن ب اطرح من الجانبين م ب الذي هو اصغر من ن ب فلنا م ا > ن ب − م ب اي م ا > (ن − م) ب (ق٦ ك٥). ولكن اذا كان م ا > (ن − م) ب يكون م س > (ن − م) د لانَّ ا : ب :: س : د. و(ن − م) د = ن د − م د (ق٦ ك٥) فاذاً م س > ن د − م د. اضف اليهما م د فلنا م س + م د > ن د اي (ق١ ك٥) م(س + د) > ن د. فاذا كان م(ا + ب) > ن ب يكون م(س + د) > ن د

وهكذا يبرهن انهُ اذا كان م(ا + ب) = ن ب يكون م(س + د) = ن د واذا كان م(ا + ب) < ن ب يكون م(س + د) < ن د فاذاً (حد٥ ك٥) ا + ب : ب :: س + د : د

القضية التاسعة عشرة. ن

اذا كانت نسبة مقدارٍ كلهِ الى مقدارٍ اخر كلهِ كمقدار ماخوذ من الاول الى مقدار ماخوذ من الثاني تكون نسبة البقية الى البقية كالكل الى الكل

(جبر ع١٨٨)

اذا كان ا : ب :: س : د وكان س اصغر من ا يكون ا − س : ب − د :: ا : ب بما ان ا : ب :: س : د فبالتلب (ق١٦ ك٥) ا : س :: ب : د. وبالقسمة (ق١٧ ك٥) ا − س : س :: ب − د : د وبالقلب ايضاً ا − س : ب − د :: س : د ولكن ا : ب :: س : د فاذاً (ق١١ ك٥) ا − س : ب − د :: ا : ب

فرع. ا − س : ب − د :: س : د

قضية د. ن

اذا كان اربعة مقادير متناسبة فهي متناسبة ايضاً بالطرح اي الاول

الى زيادتهِ عن الثاني كالثالث الى زيادتهِ عن الرابع (حد١٨ ك٥)

مفروض ا : ب :: س : د فبالطرح ا : ا—ب :: س : س—د

لان ا : ب :: س : د فبالقسمة (ق١٧ ك٥) ا—ب : ب :: س—د : د وبالقلب (ق ا ك٥) ب : ا—ب :: د : س—د ثم بالتركيب (ق١٨ ك٥) ا : ا—ب :: س : س—د

فرع . وهكذا يبرهن ان ا : ا+ب :: س : س+د

القضية العشرون . ن

اذا فُرِض ثلاثة مقادير مناسبة لثلاثة مقادير أُخَر اي كل اثنين من الأُوَل مناسبان لكل اثنين من الأُخَر فاذا كان الأَوَّل اعظم من الثالث يكون الرابع اعظم من السادس واذا كان مساويًا لهُ يكون الرابع مساويًا للسادس واذا كان اصغر منهُ يكون الرابع اصغر من السادس (جبر ع١٩٢)

اذا فرض ثلاثة مقادير ا ب س وثلاثة أُخَر د ى ف وكانت نسبة ا : ب :: د : ى وايضًا ب : س :: ى : ف فاذا كان ا > س يكون د > ف واذا كان ا = س يكون د = ف واذا كان ا < س يكون د < ف

ا	ب	س
د	ى	ف

اولًا ليكن ا > س ثم ا : ب > س : ب (ق٨ ك٥) ولكن ا : ب :: د : ى فاذًا د : ى > س : ى (ق١٣ ك٥) وقد فُرِض ب : س :: ى : ف وبالقلب (ق ا ك٥) س : ب :: ف : ى . وقد تبرهن ان د : ى > س : ب فاذًا د : ى > ف : ى (ق١٣ ك٥) وبالضرورة د > ف (ق١٠ ك٥)

ثم لنفرض ا = س ثم ا : ب :: س : ب (ق٧ ك٥) ولكن ا : ب :: د : ى فاذًا س : ب :: د : ى ولكن س : ب :: ف : ى فاذًا د : ى :: ف : ى (ق١١ ك٥) ود = ف (ق٩ ك٥) . اخيرًا ليكن ا < س اي س > ا وقد تبرهن ان

س : ب :: ف : ى وب : ا :: ى : د فاذاً كان س > ا يكون ف > د اي اذا كان ا < س يكون د < ف

القضية الحادية والعشرون . ن

اذا فُرِض ثلاثة مقادير مناسبة لثلاثة أُخر بحيث يكون الاول الى الثاني كالخامس الى السادس والثاني الى الثالث كالرابع الى الخامس فان كان الاول اعظم من الثالث فيكون الرابع اعظم من السادس وان كان مساويًا لهُ فيكون الرابع مساويًا للسادس وان كان اصغر منهُ فيكون الرابع اصغر من السادس (جبر ع ١٩٢)

مفروض ثلاثة مقادير ا ب س وثلاثة أُخر د ى ف وتناسب ا : ب :: ى : ف وب : س :: د : ى فاذا كان ا > س يكون د > ف واذا كان ا = س يكون د = ف واذا كان ا < س يكون د < ف

ا	ب	س
د	ى	ف

اولاً ليكن ا > س ثم ا : ب > س : ب (ق ٨ ك ٥) وقد فُرِض ا : ب :: ى : ف فاذاً ى : ف > س : ب (ق ١٣ ك ٥) وب : س :: د : ى بالمفروض وبالقلب س : ب :: ى : د فاذاً ى : ف > ى : د (ق ١٣ ك ٥) ود > ف (ق ١٠ ك ٥)

ثم ليكن ا = س فلنا (ق ٧ ك ٥) ا : ب :: س : ب وبالمفروض ا : ب :: ى : ف فاذاً س : ب :: ى : ف (ق ١١ ك ٥) وبالمفروض ب : س :: د : ى وبالقلب س : ب :: ى : د فاذاً (ق ١١ ك ٥) ى : ف :: ى : د ود = ف (ق ٩ ك ٥)

اخيرًا ليكن ا < س اي س > ا فقد تبرهن ان س : ب :: ى : د وب : ا :: ف : ى فحسبما تقدم اذا كان س > ا فيكون ف > د اي د < ف

القضية الثانية والعشرون . ن

اذا فُرِضت عدَّة مقادير مناسبة لعدةٍ اخرى من المقادير على ترتيبها فيكون تناسب الاول الى الاخير من الأُوَل كتناسب الاوَّل من الأُخَر الى الاخير (جبر ع ١٨٤)

مفروض ثلاثة مقادير ا ب س مناسبة لثلاثة اخرى د ى ف على ترتيبها

ا	ب	س
د	ى	ف
م ا	ن ب	ق س
م د	ن ى	ق ف

اي ا : ب :: د : ى وب : س :: ى : ف

فيكون ا : س :: د : ف

خذ مضروبين متساويين من ا ود اي م ا م د وكذلك ن ب ن ى من ب وى وق س ق ف من س وف. فلكون ا : ب :: د : ى فيكون م ا : ن ب :: م د : ن ى (ق ٤ ك ٥) وايضًا ن ب : ق س :: ن ى : ق ف فاذًا (ق ٢٠ ك ٥) حسبما كان م ا اعظم من ق س او مساويًا لهُ او اصغر منهُ يكون م د اعظم من ق ف او مساويًا لهُ او اصغر منهُ. ولكن م ا م د هما مضروبان متساويان من ا ود وق س ق ف مضروبان متساويان من س وف فاذًا (حد ٥ ك ٥) ا : س :: د : ف

ثم لنفرض اربعة مقادير ا ب س د واربعة أُخرى ى ف غ ح متناسبة على

ا	ب	س	د
ى	ف	غ	ح

ترتيبها اي ا : ب :: ى : ف وب : س :: ف : غ وس : د :: غ : ح فيكون ا : د :: ى : ح

لانهُ حسبما تقدم في المقادير الثلاثة المتقدم ذكرها مع الثلاثة الاخر المتقدم ذكرها ا : س :: ى : غ وبالمفروض س : د :: غ : ح فيكون ا : د :: ى : ح وهكذا مهما تعددت المقادير

القضية الثالثة والعشرون . ن

اذا كانت عدَّة مقادير مناسبة لعدَّة اخرى على ترتيبٍ كالمذكور في القضية الحادية والعشرين يكون تناسب الاول الى الاخير من الاولى كتناسب الاول من الاخرى الى اخيرها (جبر ع ١٨٦)

اولًا ليُفرَض ثلاثة مقادير ا ب س متناسبة لثلاثة اخرى د ى ف بان

يكون ا : ب :: ى : ف وب : س :: د : ى فيكون ا : س :: د :ف. خذ مضاريب متساوية من ا ب د اي م ا م ب م د وكذلك من س ى ف اي ن س ن ى ن ف

ا	ب	س
د	ى	ف
م ا	م ب	ن س
م د	ن ى	ن ف

فلكون ا · ب :: ى : ف وا : ب :: م ا : م ب (ق ١٥ ك ٥) وى : ف :: ن ى : ن ف فيكون م ا : م ب :: ن ى · ن ف (ق ١١ ك ٥) ولكون ب : س :: د · ى يكون م ب · ن س · م د · ن ى (ق ٤ ك ٥) وقد تبرهن أن م ا · م ب ·· ن ى : ن ف فاذا كان م ا > ن س يكون م د > ن ف (ق ٢١ ك ٥) واذا كان م ا = ن س يكون م د = ن ف واذا كان م ا < ن س يكون م د < ن ف. ا ولكن م ا م د هما مضروبان متساويان من ا ود ون س ن ف مضروبان متساويان من س وف فاذًا (حد ٥ ك ٥) ا · س · د · ف

ثم ليُفرَض اربعة مقادير مناسبة لاربعة اخرى على الترتيب السابق اي ا · ب ·· غ : ح وب : س :: ف : ع وس : د :: ى : ف فيكون ا · د :: ى · ح. لانهُ حسبما

ا	ب	س	د
ى	ف	غ	ح

تقدم ا : س ·· ف : ح وبالمفروض س : د :: ى : ف فحسبما تقدم ايضًا ا : د ·· ى : ح وهكذا مهما تعددت المقادير

القضية الرابعة والعشرون · ن

اذا كان تناسب الاول الى الثاني كتناسب الثالث الى الرابع وتناسب الخامس الى الثاني كتناسب السادس الى الرابع يكون تناسب الاوّل مع الخامس الى الثاني كتناسب الثالث مع السادس الى الرابع

(جبر ع ١١١)

مفروض ا : ب ·· س : د وى : ب :: ف : د فيكون ا + ى : ب ·· س + ف : د

لانّ ى : ب :: ف : د فبالقلب ب : ى :: د : ف وبالمفروض ا : ب :: س : د فبالمساواة (ق٢٢ ك٥) ا : ى :: س : ف وبالتركيب (ق١٨ ك٥) ا+ى : ى :: س+ف : ف وبالمفروض ايضاً ى : ب :: ف : د فبالمساواة (ق٢٢ ك٥) ا+ى : ب :: س+ف : د

قضية ه٠ن

اذا كان اربعة مقادير متناسبة فمجتمع الاولَين الى فضلتهما كمجتمع الاخرَين الى فضلتهما

مفروض ا : ب :: س : د واذا كان ا > ب فيكون ا+ب : ا−ب :: س+د : س−د واذا كان ا < ب ا+ب : ب−ا :: س+د : د−س

لانهُ اذا كان ا > ب فمن حيث ان ا : ب :: س : د فبالقسمة (ق١٧ ك٥)

ا−ب : ب :: س−د : د وبالقلب (ق١ ك٥)

ب : ا−ب :: د : س−د وبالتركيب (ق١٨ ك٥)

ا+ب : ب :: س+د : د فبالمساواة (ق٢٢ ك٥)

ا+ب : ا−ب :: س+د : س−د

وهكذا اذا كان ا < ب او ب > ا يبرهن ان

ا+ب : ب−ا :: س+د : د−س

قضية و٠ن

التناسبات المركبة من تناسبات متساوية هي متساوية بعضها لبعض

لنفرض ان تناسب ا الى س قد تركب من تناسبين اي تناسب ا : ب وتناسب ب : س وان تناسب د الى ف قد تركب من تناسب د٠ى وتناسب ى : ف المساويين للاولين اي ا : ب وب : س فيكون ا : س : د : ف

ا	ب	س
د	ى	ف

اولاً اذا كان تناسب ا : ب=د : ى وتناسب ب : س=ى : ف فبالمساواة (ق٢٢ ك٥) ا : س :: د : ف

ثانيًا اذا كان ١ : ب = ى : ف وب : س = د : ى فبالمساواة بالقلب (ق ٢٣ ك ٥) ١ : س :: د : ف وهكذا مهما تعددت التناسبات

قضية ز٠ ن

اذا قاس مقدارٌ كلاًّ من مقدارين آخرَين يقيس ايضًا مجتمعهما وفضلتهما

لنفرض ان س يقيس ١ اي يتعدد فيهِ تسع مرات مثلاً وايضا ليقس ب خمس مرات مثلاً فلنا ١ = ٩س وب = ٥س فيكون ١ وب معًا ١٤ مرة س اي س يقيس مجتمع ١ وب. وفضلتها هي اربعة امثال س فاذًا س يقيس هذه الفضلة ايضًا. وهكذا مهما كانت الاعداد المفروضة. فلنفرض ١ = م س وب = ن س ثم ١ + ب = (م + ن) س و١ — ب = (م — ن) س

فرعٌ. اذا كان س قياسًا للمقدار ب وايضًا للمقدار ١ — ب او ١ + ب فانهُ يقيس المقدار ١ ايضًا لانَّ مجتمع ب و١ — ب هو ١. وفضلة ب و١ + ب هي ١ ايضًا

اصول الهندسة

الكتاب السادس

حدود

١ اشكالٌ ذات اضلاع مستقيمة متشابهةٌ هي ما كانت زواياها متساوية كل واحدة تعدل نظيرها . والاضلاعُ المحيطة بالزوايا المتساوية متناسبة في شكلين متناسبَين الاضلاعُ التي

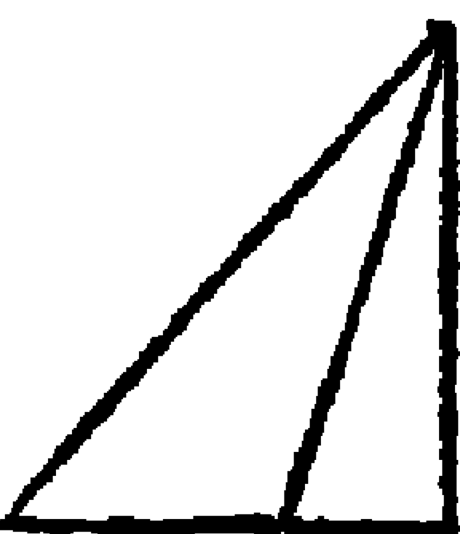


تلي الزوايا المتساوية تسمى متشابهة . والزوايا تسمى الزوايا المتشابهة . وفي الدوائر الاقواس المتشابهة والقِطَع المتشابهة والقطعات المتشابهة هي التي تقابل زوايا متساوية عند المركز

٢ اذا كانت نسبة ضلع شكلٍ الى ضلع شكلٍ آخر كنسبة ضلع اخر من الثاني الى اخر من الاول يقال انها متناسبة بالتكافوء

٣ اذا انقسم خطٌّ مستقيم بحيث تكون نسبة الكل الى القسم الاطول كالقسم الاطول الى الاقصر يقال انهُ قد انقسم على نسبة متوسطة

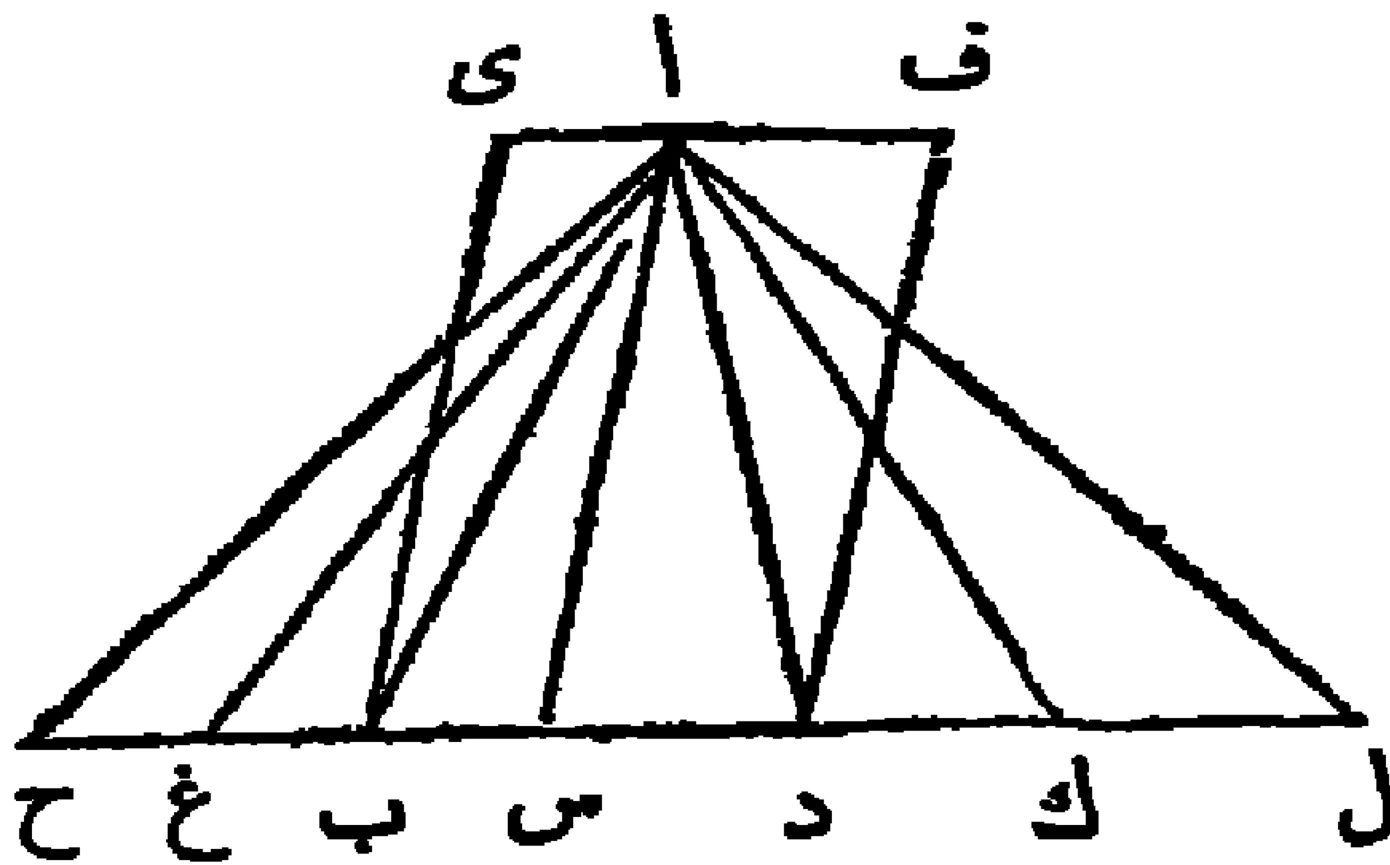
٤ علو مثلث هو البعد العموديّ من راسهِ الى قاعدتهِ علو شكل متوازي الاضلاع هو البعد العمودي بين ضلعيهِ المتقابلين محسوبَين قاعدتَين وعلو شبيه المعين هو البعد العمودي بين ضلعيهِ المتوازيَين



القضية الاولى . ن

نسبة مثلثات واشكال متوازية الاضلاع على علو واحد بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض

ليكن المثلثان ا ب س ا س د والشكلان المتوازيا الاضلاع ى س س ف على علوٍ واحدٍ اي عمود من ا الى ب د فنسبة المثلث اب س الى المثلث اس د ونسبة الشكل ى س الى شكل س ف كنسبة القاعدة ب س الى القاعدة س د



اخرج ب د الى الجهتين الى ح ول حتى ينقسم ح ب الى اقسامٍ تعدل ب س مثل ح غ غ ب واقسم د ل الى اقسام تعدل س د مثل ل ك ك د وارسم ا غ ا ح اك ا ل

فلكون س ب ب غ غ ح متساوية تكون المثلثات ا ح غ ا غ ب ا ب س متساوية (ق٣٨ ك١) وكما تعدَّدت القاعدة ب س في القاعدة ح س هكذا يتعدَّد المثلث ا ب س في المثلث ا ح س وكذلك كما تتعدَّد القاعدة د س في القاعدة س ل هكذا يتعدَّد المثلث ا س د في المثلث ا س ل . واذا كانت القاعدة ح س تعدل القاعدة س ل يكون المثلثان ا ح س ا ل س متساويَين (ق٣٨ ك١) واذا كانت القاعدة ح س اكبر من س ل يكون المثلث ا ح س اكبر من المثلث ا ل س وان كانت اصغر فاصغر. فلنا اربعة مقادير وهي القاعدتان ب س س د والمثلثان ا ب س ا س د وقد أُخِذ مضروبان متساويان من الاول والثالث اي القاعدة ب س والمثلث ا ب س وهما القاعدة ح س والمثلث ا ح س وهكذا من القاعدة س د والمثلث ا س د وهما القاعدة س ل والمثلث ا ل س وقد تبرهن انهُ اذا كانت القاعدة ح س اكبر من س ل يكون المثلث ا ح س اكبر من ا ل س وان كانت متساوية لها فالمثلث ا ح س يعدل المثلث ا ل س وان كانت اصغر فاصغر منهُ فنسبة القاعدة ب س الى القاعدة س د كنسبة المثلث ا ب س الى المثلث ا س د (حد ٥ ك ٥)

ثم لكون الشكل المتوازي الاضلاع س ى هو مضاعف المثلث ا ب س (ق ٤١ ك ١) والشكل س ف مضاعف المثلث ا س د وبين المقادير ذات النسبة الكائنة بين مضاريبها المتساوية (ق ١٥ ك ٥) يكون الشكل ى س الى الشكل س ف كالمثلث ا ب س الى المثلث ا س د. وقد تبرهن ان ب س : س د :: ا ب س : ا س د فبالمساواة الشكل س ى الى الشكل س ف كالقاعدة ب س الى القاعدة س د (ق ١١ ك ٥)

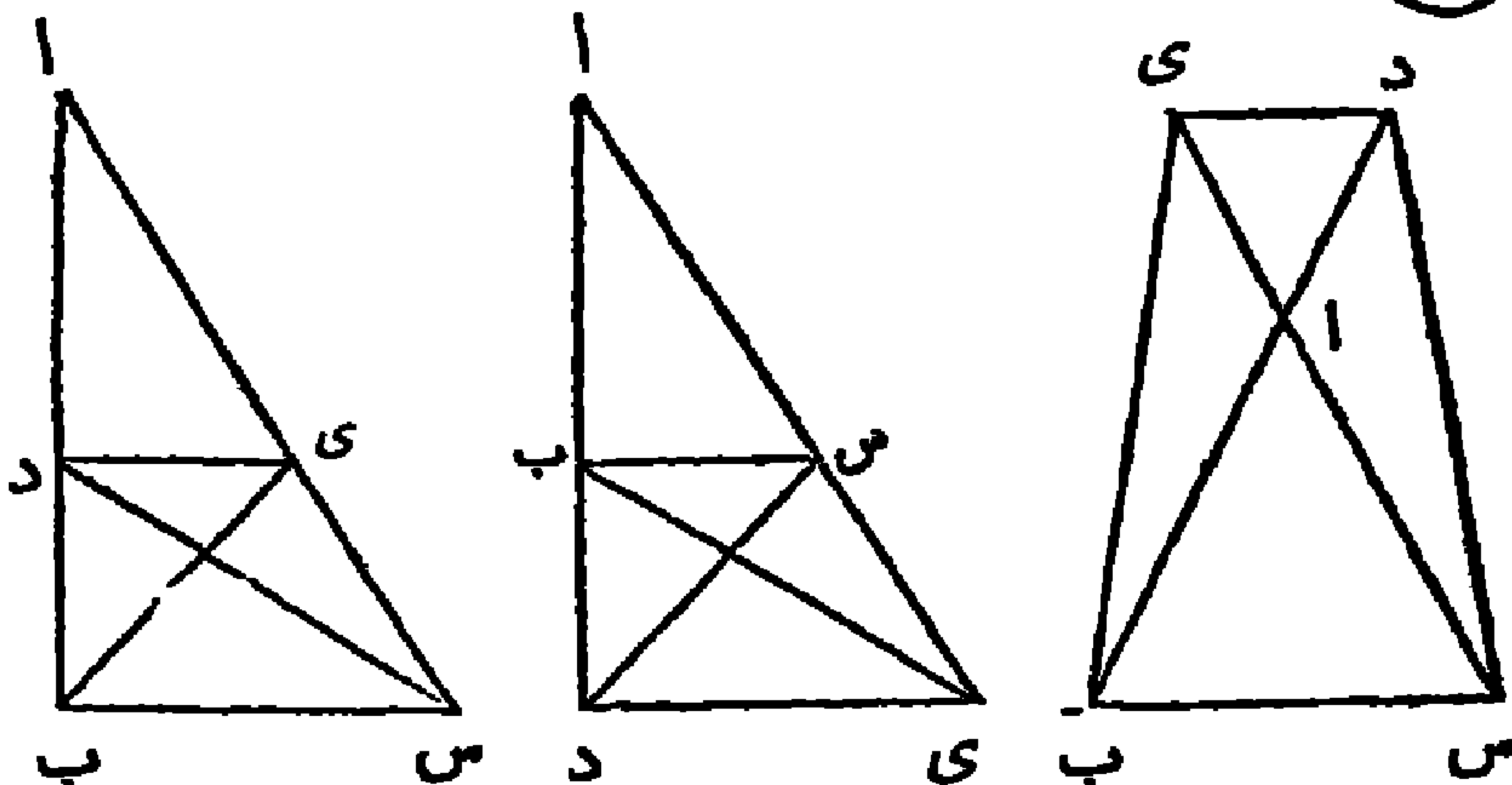
فرع. نسبة المثلثات الى الاشكال المتوازية الاضلاع هي كنسبة قواعدها بعضها الى بعض اذا كانت المثلثات والاشكال على علوٍّ واحدٍ

القضية الثانية. ن

اذا رُسم خطٌّ مستقيم حتى يوازي ضلع مثلثٍ فانهُ يقطع الضلعين الاخرَين او الخطين الحاصلين من اخراجهما حتى تكون اقسامها متناسبة. واذا قُطِع الضلعان او الخطَّان الحاصلان من اخراجها حتى تكون اقسامها متناسبة فالخطُّ المستقيم الذي يقطعها يوازي الضلع الاخر من المثلث

ليكن ا ب س مثلثًا وليرسم د ى حتى يوازي ب س فتكون نسبة ب د : د ا :: س ى : ى ا

ارسم ب ى س د. فالمثلث ب د ى يعدل المثلث س د ى (ق ٣٧ ك ١) لانهما على قاعدة واحدة د ى وبين خطين متوازيين ب س د ى. وا د ى مثلث

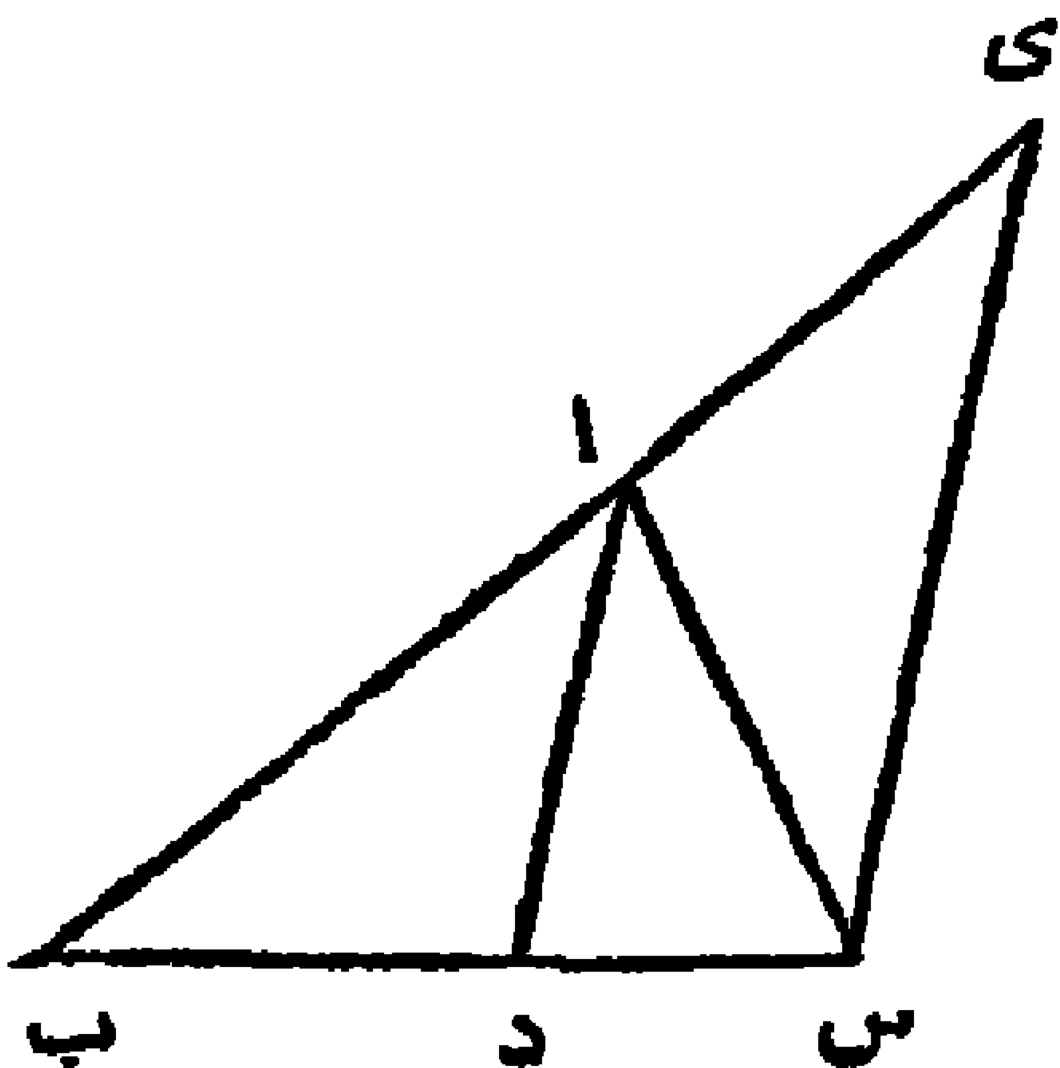


آخر والمقادير المتساوية لها نسبة واحدة الى مقدارٍ اخر (ق٧ ك٥) اي المثلث ب د ى الى المثلث ا د ى كالمثلث س د ى الى المثلث ا د ى ولكن ب د ى : ا د ى :: ب د : د ا (ق١ ك٦) لانَّ لهما علوًّا واحدًا اي عمودًا من ى الى ب ا ولهذا السبب ايضًا س د ى : ا د ى :: س ى : ى ا فاذًا ب د : د ا :: س ى : ى ا . ثم لنفرض ان الضلعين ا ب ا س او الخطين الحاصلين من اخراجها قد قُطِعا في د وى حتى تكون نسبة ب د : د ا :: س ى : ى ا فالخطُّ المستقيم د ى الموصل بين نقطتي القطع يوازي ب س . تمّم الشكل كما تقدم . فلكون ب د : د ا :: س ى : ى ا ولكون ب د : د ا :: ب د ى : ا د ى (ق١ ك٦) وس ى : ى ا :: س د ى : ا د ى يكون المثلث ب د ى : ا د ى :: س د ى : ا د ى اي المثلثان ب د ى وس د ى لهما نسبة واحدة الى مثلث آخر ا د ى فالمثلث ب د ى = س د ى (ق٩ ك٥) وهما على قاعدة واحدة د ى والمثلثات المتساوية اذا كانت على قاعدة واحدة هي بين خطين متوازيين (ق٣٩ ك١) فالخطُّ د ى يوازي الخط ب س

القضية الثالثة . ن

اذا تنصَّفت زاوية مثلثٍ بخطٍّ مستقيم يقطع القاعدة ايضًا فقسما القاعدة بينهما النسبة الكائنة بين الضلعين الآخرين من المثلث . واذا كانت نسبة قسمَي القاعدة بعضهما الى بعض كنسبة الضلعين الاخرين من المثلث بعضهما الى بعض فالخطُّ المستقيم المرسوم من نقطة القطع الى الزاوية المقابلة ينصِّف تلك الزاوية

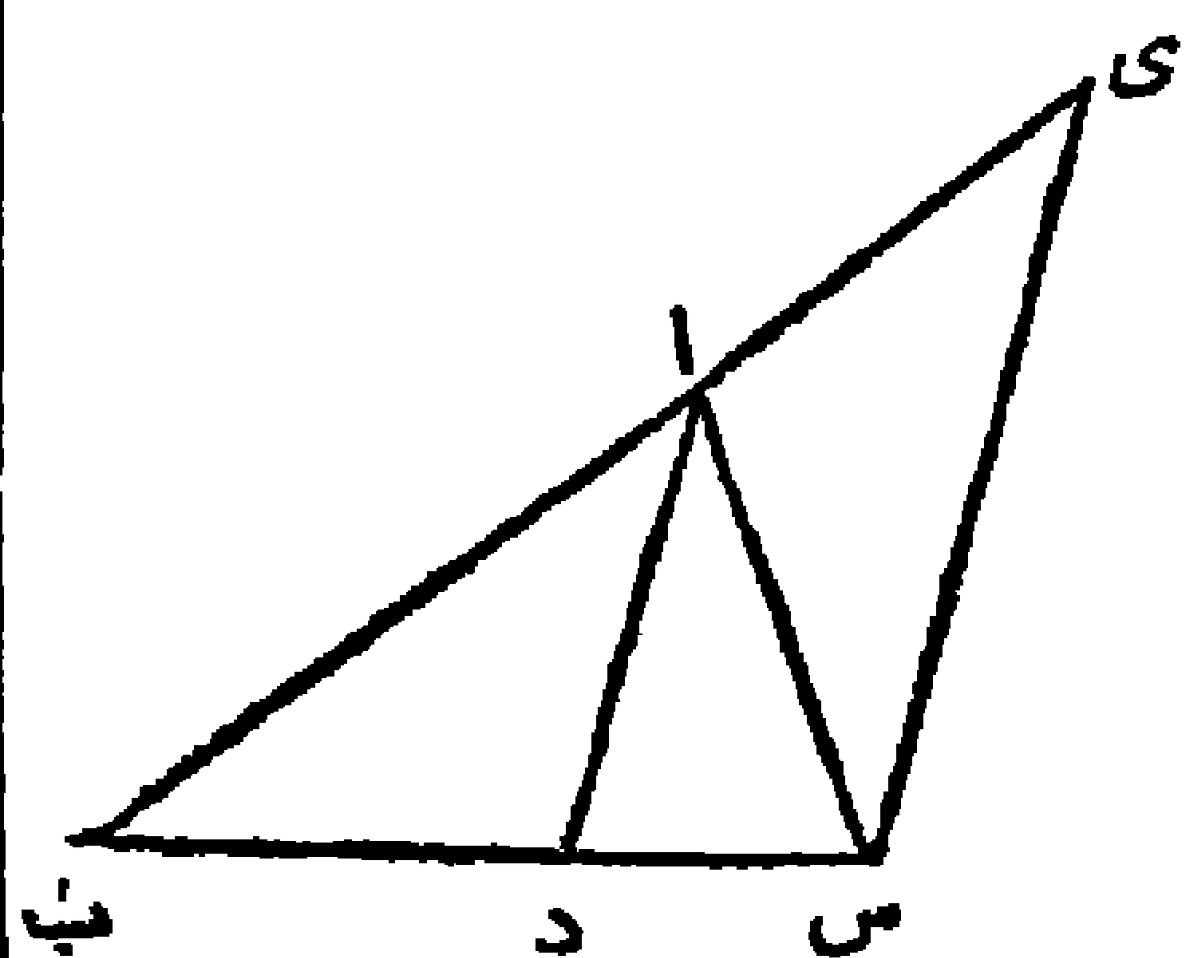
ليكن ا ب س مثلثًا ولتنصَّف الزاوية ب ا س منهُ بالخط المستقيم ا د الذي يقطع القاعدة في د فنسبة ب د : د س :: ب ا : ا س



من النقطة س ارسم س ى حتى يوازي د ا وليلاقِ ب ا بعد اخراجهِ في ى . فلأنَّ الخطَّ المستقيم ا س يلاقي الخطين المتوازيين ا د ى س فالزاوية ا س ى تعدل المتبادلة

س ا د (ق٢٩ ك١) وس ا د حسب المفروض تعدل ب ا د فالزاوية ب ا د تعدل ا س ى. ولأنّ الخط المستقيم ب ا ى يلاقي المتوازيين ا د ى س فالزاوية الخارجة ب ا د تعدل الداخلة المقابلة ا ى س. ولكن ب ا د تعدل ا س ى فالزاوية ا س ى تعدل ا ى س فالضلع ا ى يعدل الضلع س ا (ق٦ ك١) ولكون ا د قد رُسِم حتى يوازي ى س احد اضلاع المثلث ب ى س فنسبة ب د : د س :: ب ا : ا ى (ق٢ ك٦) وا ى = ا س فاذاً ب د : د س :: ب ا : ا س (ق٧ ك٥)

ثم لنفرض ب د : د س :: ب ا : ا س. ارسم ا د فالزاوية ب ا س قد تنصّفت بالخط المستقيم ا د



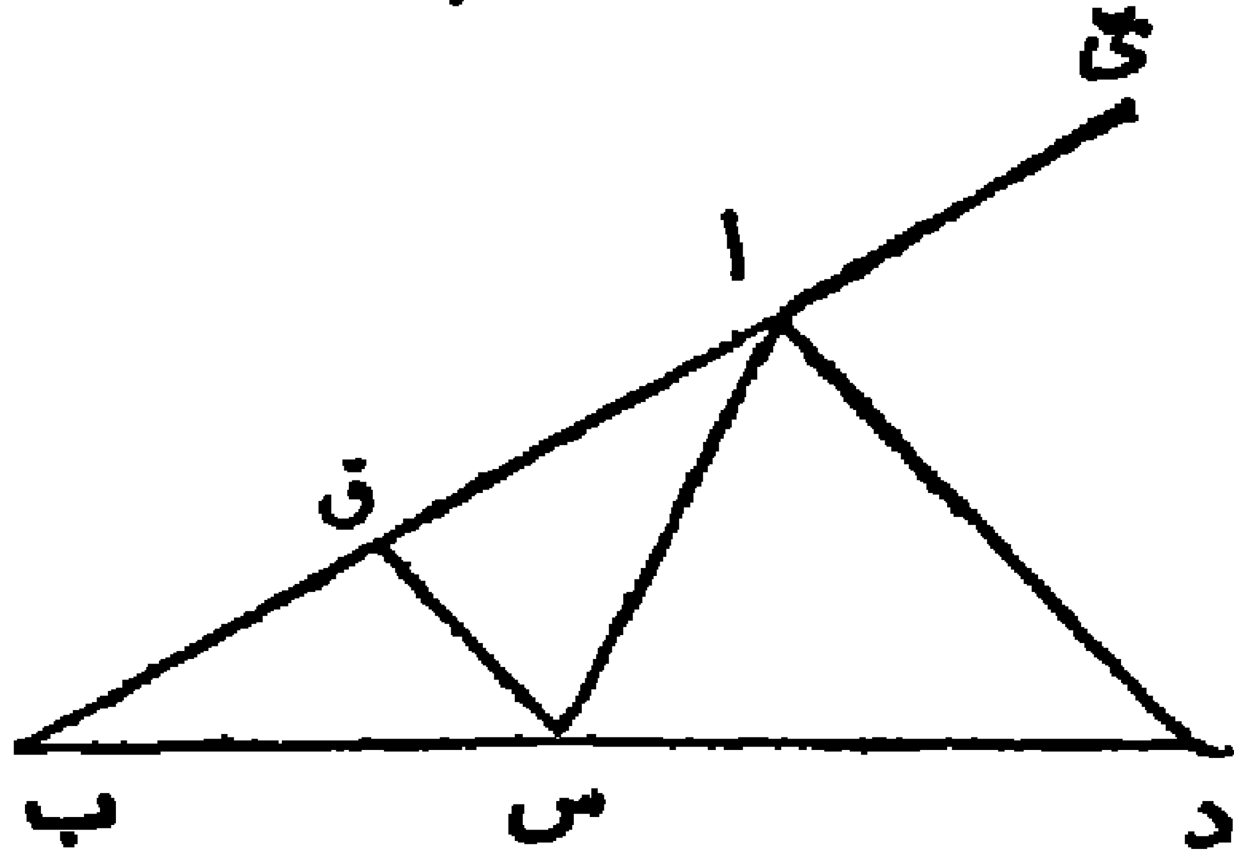
تم الشكل كما تقدم. فلكون ب د : د س :: ب ا : ا س وب د : د س :: ب ا : ا ى (ق٢ ك٦) لانّ ا د يوازي ى س فنسبة ا ب : ا س :: ا ب : ا ى (ق١١ ك٥) فاذاً ا س = ا ى (ق٩ ك٥) والزاوية ا ى س = ا س ى (ق٥ ك١) وا ى س تعدل الخارجة المقابلة ب ا د وا س ى تعدل المتبادلة س ا د (ق٢٩ ك١) فالزاوية ب ا د = س ا د فقد تنصّفت الزاوية ب ا س بالخط المستقيم ا د

قضية أَلِف. ن

اذا تنصّفت الزاوية الخارجة من مثلث بخطٍ مستقيم يقطع القاعدة بعد اخراجها فنسبة القسمين بين الخط القاطع وطرفي القاعدة بعضهما الى بعضٍ كنسبة الضلعَين الاخرَين من المثلث بعضهما الى بعض. واذا كانت نسبة قسمَي القاعدة بعد اخراجها بعضهما الى بعض كنسبة الضلعَين الاخرين من المثلث بعضهما الى بعض فالخط

المُوصل بين نقطة القطع والزاوية المقابلة ينصّف الزاوية الخارجة من المثلث

ليكن ا ب س مثلثاً ولتنصَّف زاويتهُ الخارجة بالخطّ المستقيم ا د الذي يلاقي القاعدة بعد اخراجها في د فنسبة ب د :



د س :: ب ا : ا س

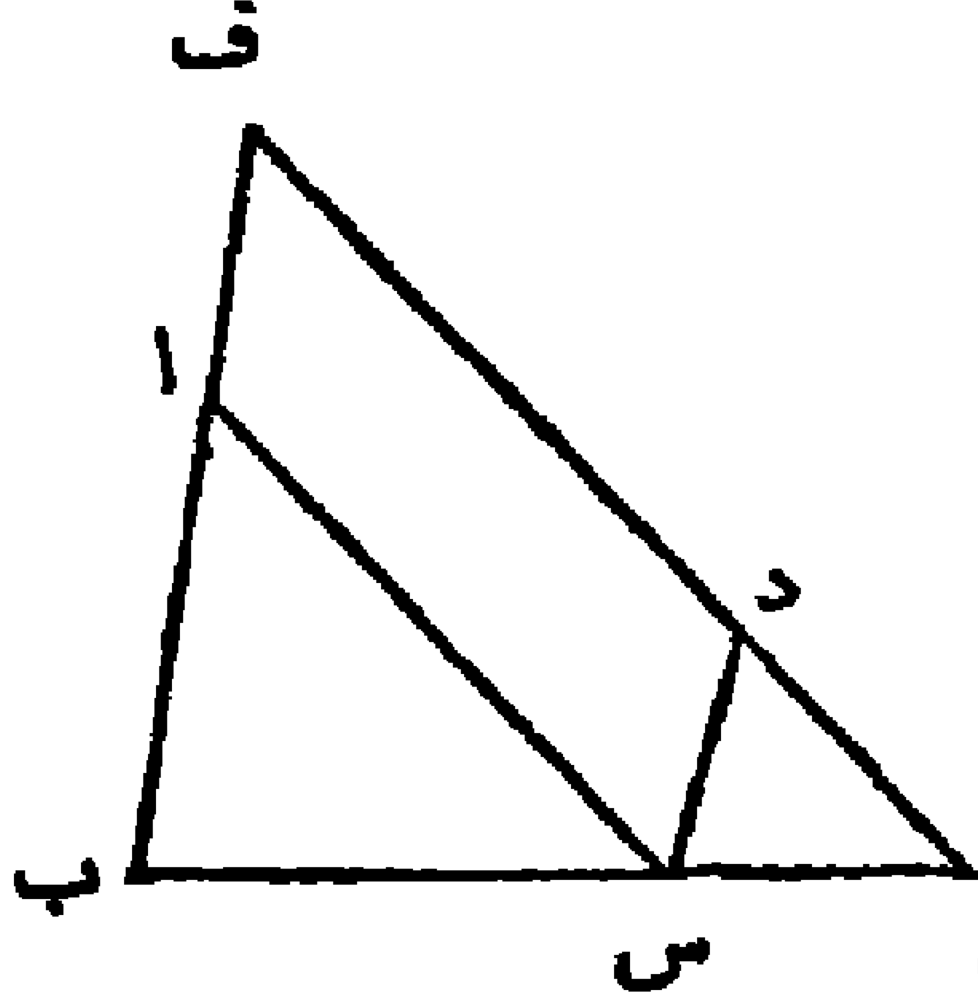
من النقطة س ارسم س ق حتى يوازي د ا (ق ٣١ ك ١) فلكون الخط المستقيم ا س يلاقي المتوازيين ا د ق س فالزاوية ا س ق تعدل المتبادلة س ا د (ق ٢٩ ك ١) وس ا د تعدل د ا ى حسب المفروض فالزاوية د ا ى تعدل ا س ق. ولكون الخط المستقيم ق ا ى يلاقي المتوازيين س ق د ا فالزاوية الخارجة د ا ى تعدل الداخلة المتقابلة س ق ا وقد تبرهن ان ا س ق تعدل د ا ى فالزاوية ا س ق تعدل الزاوية س ق ا والضلع س ا يعدل الضلع ا ق (ق ٦ ك ١) ولكون ا د يوازي س ق ضلعاً من المثلث ب س ق فنسبة ب د الى د س كنسبة ب ا الى ا ق (ق ٢ ك ٦) وا ق يعدل ا س فنسبة ب د : د س :: ب ا : ا س

ثم لنفرض ب د : د س :: ب ا : ا س. ارسم ا د. فالزاوية س ا د تعدل الزاوية د ا ى. تمّ الشكل كما تقدم. فلكون ب د : د س :: ب ا : ا س وب د : د س :: ب ا : ا ق (ق ٢ ك ٦) فنسبة ب ا : ا س :: ب ا : ا ق (ق ١١ ك ٥) وا س يعدل ا ق (ق ٩ ك ٥) والزاوية ا ق س تعدل الزاوية ا س ق (ق ٥ ك ١) والزاوية ا ق س تعدل الخارجة ى ا د وا س ق تعدل المتبادلة س ا د فالزاوية ى ا د = س ا د

القضية الرابعة. ن

في مثلثاتٍ متساوية الزوايا الاضلاعُ التي تلي الزوايا المتساوية هي متناسبة والاضلاع المقابلة الزوايا المتساوية هي متشابهة اي هي سوابق نسبٍ وتواليها

ليكن ا ب س د س ى مثلثين متشابهين اي متساويي الزوايا ا ب الزاوية ا ب س تعدل د س ى والزاوية ا س ب تعدل د ى س وبالنتيجة (فرع ق ٣٢ ك ١) الزاوية ب ا س تعدل س د ى فالاضلاع التي تلي هذه الزوايا المتساوية هي متناسبة والاضلاع التي تقابلها هي متشابهة



ليوضع المثلثان حتى يمسّ احدهما الآخر ويكون الضلع ب س من الواحد وى س من الاخر على استقامة واحدة فالزاويتان ا ب س اس ب معًا اقل من قائمتين (ق١٧ ك ١) ود ى س = ا س ب فالزاويتان ا ب س د ى س معًا اقل من قائمتين فاذا أُخرِج ب ا وى د يلتقيان (فرع اول ق ٢٩ ك ١) فليُخرَجا حتى يلتقيا في ف. فلكون الزاوية ا ب س تعدل د س ى فالخط ب ف يوازي س د (ق ٢٨ ك ١) ولكون ا س ب تعدل د ى س فالخط ا س يوازي ف ى (ق ٢٨ ك ١) فالشكل ف ا س د متوازي الاضلاع وا ف يعدل س د وا س يعدل ف د (ق ٣٤ ك ١) ولكون ا س يوازي ف ى احد اضلاع المثلث ف ب ى فنسبة ب ا : ا ف :: ب س : س ى (ق ٢ ك ٦) وا ف = س د فاذًا ب ا : س د :: ب س : س ى (ق٧ ك ٥) وبالمبادلة ب ا : ب س :: س د : س ى (ق ١٦ ك ٥)

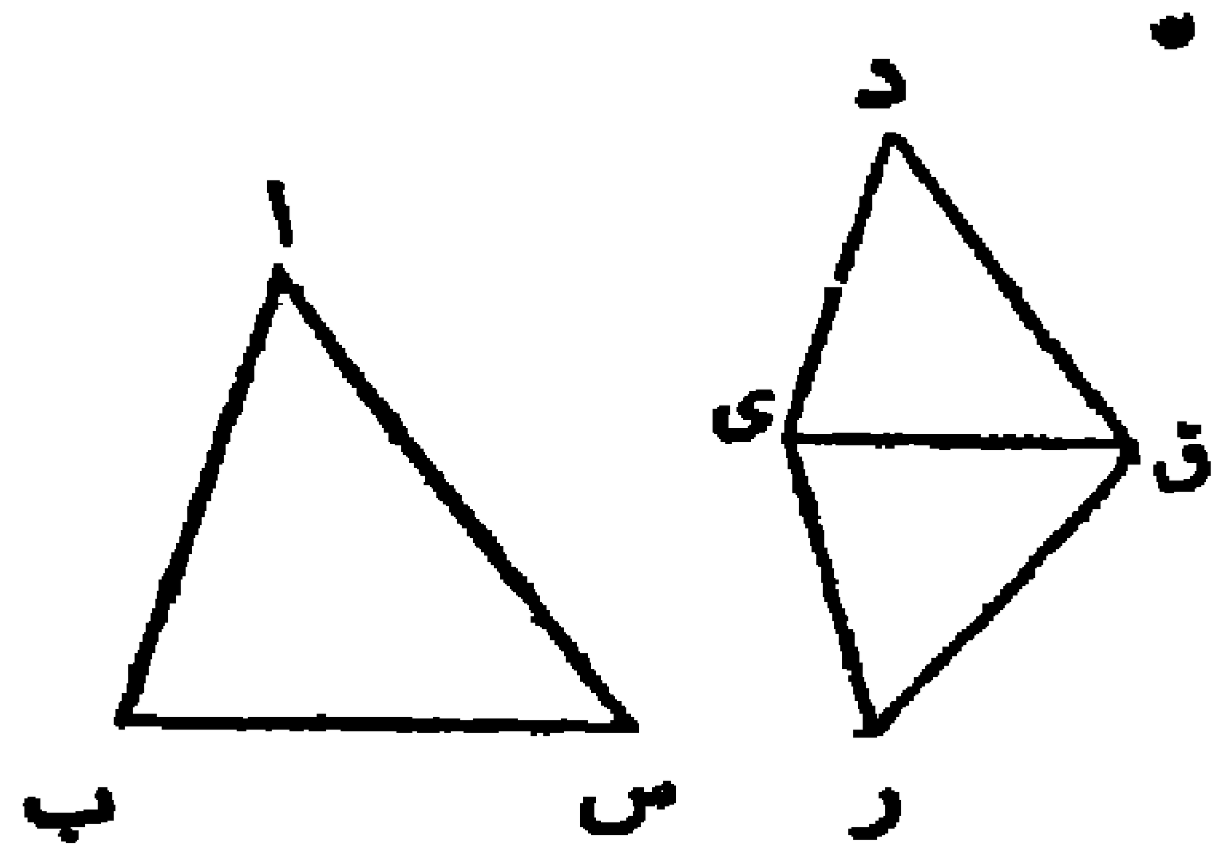
ولانّ س د يوازي ب ف فنسبة ب س : س ى :: ف د : د ى (ق ٢ ك ٦) ولكن ف د = ا س فنسبة ب س : س ى :: ا س : د ى وبالمبادلة ب س : ا س :: س ى : د ى. وقد تبرهن ان ا ب : ب س :: د س : س ى وب س : س ا :: س ى : ى د فبالمساواة ب ا : ا س :: س د : د ى

القضية الخامسة. ن

اذا كانت الاضلاع المحيطة بزوايا مثلثين متناسبةً فالمثلثان متشابهان وزواياهما المتساوية تقابل اضلاعهما المتناسبة

ليكن ا ب س د ى ق مثلثين اضلاعهما متناسبة اي ا ب : ب س :: د ى :

ى ق وب س : س ا :: ى ق : ق د وبالمساواة ب ا : اس :: ى د : د ق فالمثلث ا ب س يشبه المثلث د ى ق اي زواياها متساوية والزوايا المتساوية تقابل الاضلاع المتناسبة اي الزاوية ا ب س تعدل د ى ق وب س ا تعدل ى ق د وب ا س تعدل ى د ق



في النقطتين ى وق من الخطّ المستقيم ى ق اجعل الزاوية ق ى ر تعدل ا ب س (ق ٢٣ ك ا) والزاوية ى ق ر تعدل ا س ب فالباقية ب ا س تعدل الباقية ي ر ق (فرع ٤ ق ٣٢ ك ا) وزوايا المثلث ا ب س تعدل زوايا المثلث ى ر ق والاضلاع التي تقابل الزوايا المتساوية هي متناسبة (ق ٤ ك ٦) اى

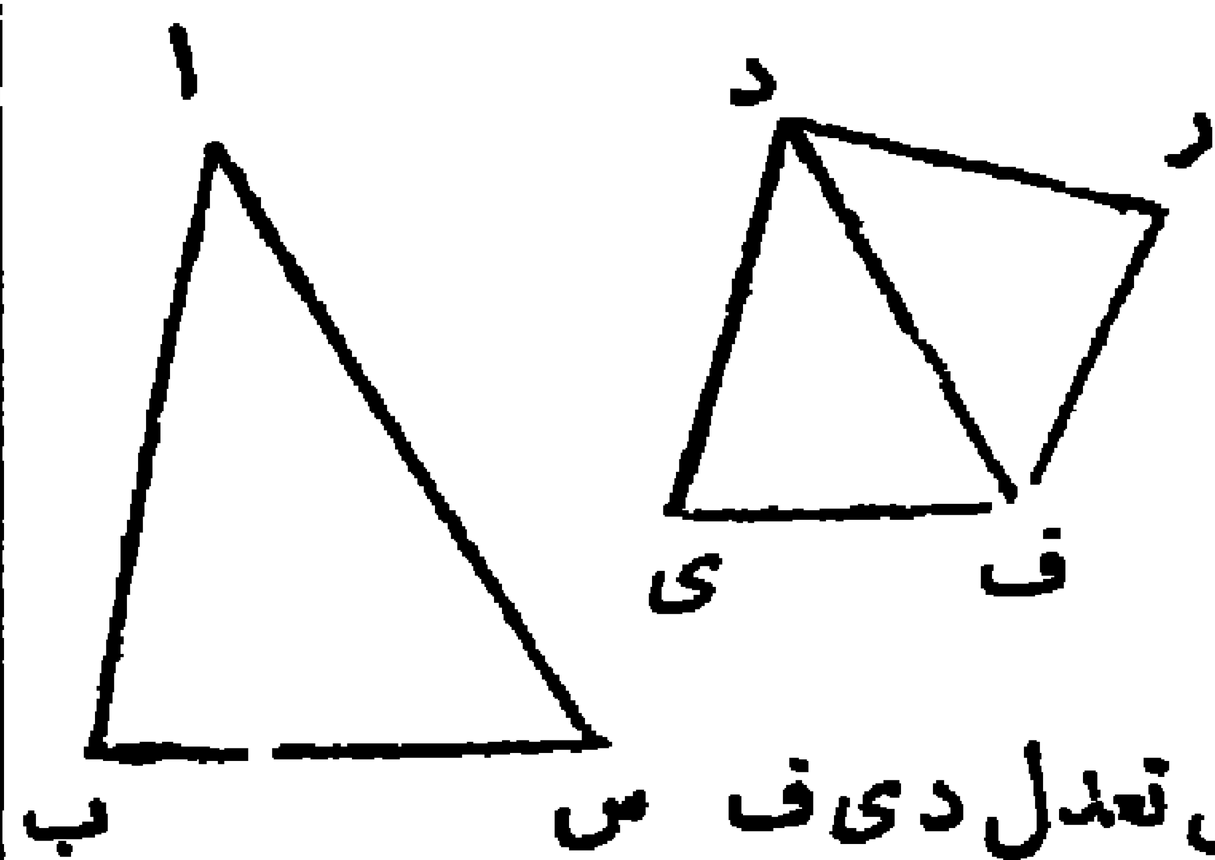
ا ب : ب س :: ر ى : ى ق ولكن بالمفروض

ا ب : ب س :: د ى : ى ق فاذًا

د ى : ى ق :: ر ى : ى ق اي (ق ١١ ك ٥) د ى ور ى بينها وبين ى ق تناسب واحد فهما متساويان (ق ٩ ك ٥) ولهذا السبب ايضاً د ق يعدل ق ر. ثم في المثلثين د ى ق ر ى ق الضلع د ى = ى ر وى ق مشترك بينهما والقاعدة د ق تعدل القاعدة ق ر فالزاوية د ى ق تعدل ر ى ق (ق ٨ ك ا) وبقية زوايا الواحد تعدل بقية زوايا الآخر اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية (ق ٤ ك ا) فالزاوية د ق ي = ر ق ى وى د ق = ى ر ق ولكن ر ى ق = ا ب س فاذًا ا ب س = د ى ق ولهذا السبب ايضاً ا س ب = د ق ى والزاوية عند ا تعدل الزاوية عند د فزوايا المثلث ا ب س تعدل زوايا المثلث د ى ق

القضية السادسة. ن

في مثلثين اذا عدلت زاويةٌ من الواحد زاويةً من الآخر وكانت الاضلاع المحيطة بهما متناسبة فالمثلثان متشابهان والزوايا التي تقابل الاضلاع المتناسبة متساوية



ليكن ا ب س د ی ف مثلثين ولتكن الزاويتان ب ا س ی د ف متساويتين والاضلاع المحيطة بهما متناسبة اي ب ا : ا س :: ی د : د ف فالمثلثان متشابهان والزاوية ا ب س تعدل د ی ف وا س ب تعدل د ف ی

في النقطتين د وف من الخط المستقيم د ف اجعل الزاوية ف د ر تعدل احدى الزاويتين ب ا س او ی د ف (ق ٢٣ ك ١) واجعل الزاوية د ف ر تعدل ا س ب فالباقية ا ب س تعدل الباقية د ر ف (فرع ٤ ق ٣٢ ك ١) والمثلث ا ب س يشبه المثلث د ر ف فلنا (ق ٤ ك ٦)

ب ا : ا س :: ر د : د ف وبالمفروض

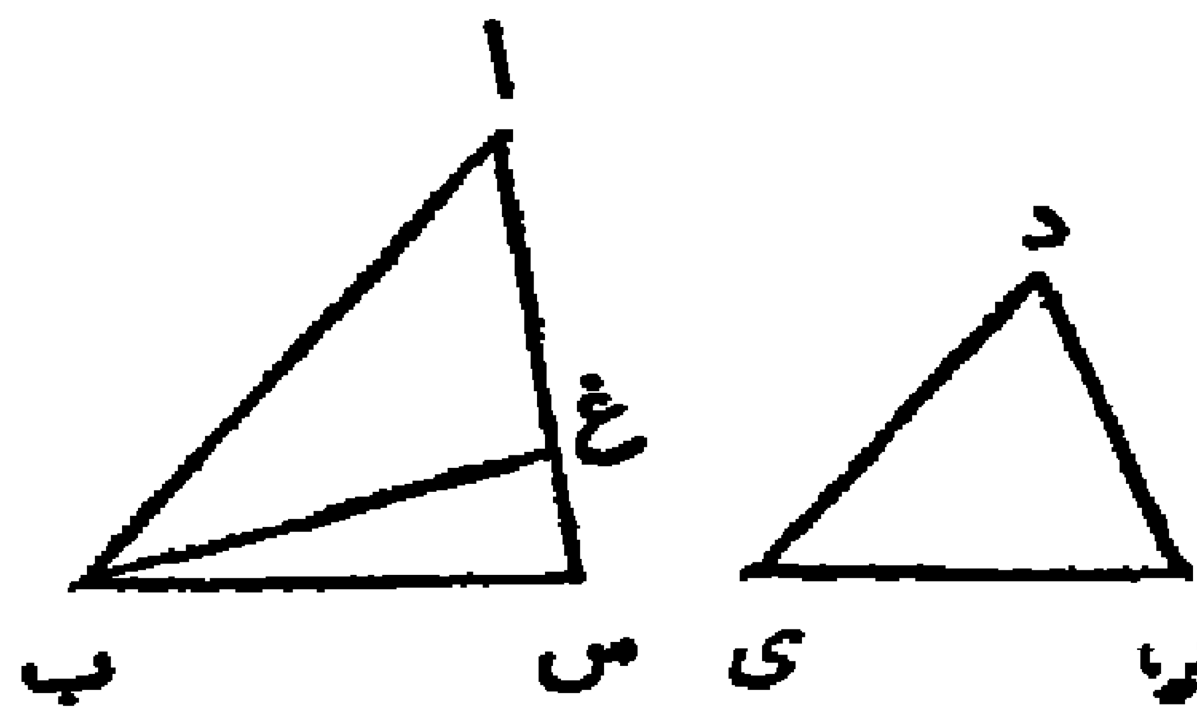
ب ا : ا س :: ی د : د ف فاذًا (ق ١١ ك ٥)

ی د : د ف :: ر د : د ف اي ی د = د ر (ق ٩ ك ٥)

ود ف مشترك بين المثلثين ی د ف ر د ف فالضلعان ی د د ف يعدلان الضلعين ر د د ف. ولكن الزاوية ی د ف = ر د ف فالقاعدة ی ف تعدل القاعدة ر ف (ق ٤ ك ١) والمثلث ی د ف يعدل المثلث ر د ف وبقية الزوايا من الواحد تعدل بقية الزوايا من الاخر اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية. فالزاوية د ف ر تعدل د ف ی ود ر ف تعدل د ی ف. ولكن الزاوية د ف ر تعدل ا س ب فالزاوية ا س ب تعدل د ف ی وبالمفروض ب ا س = ی د ف فالاخرى ا ب س تعدل الاخرى د ی ف فالمثلث ا ب س يشبه المثلث د ی ف

القضية السابعة. ن

في مثلثين اذا عدلت زاويةٌ من الواحد زاويةً من الآخر والاضلاع المحيطة بزاويتين اخريَين متناسبة فاذا كانت كل واحدة من بقية الزوايا اصغر من قائمة او لم تكن اصغر من قائمة فالمثلثان متشابهان والزوايا التي تليها الاضلاع المتناسبة متساوية



ليكن ا ب س د ى ف مثلثين والزاوية ب ا س فلتعدل ى د ف وليكن الاضلاع المحيطة بزاويتين اخريين ا ب س د ى ف متناسبة اى ا ب : ب س :: د ى : ى ف واولاً لتكن كل واحدة من الزاويتين الباقيتين عند س وف اصغر من قائمة فالمثلث ا ب س يشبه المثلث د ى ف اي الزاوية ا ب س = د ى ف والزاوية الباقية عند س تعدل الباقية عند ف

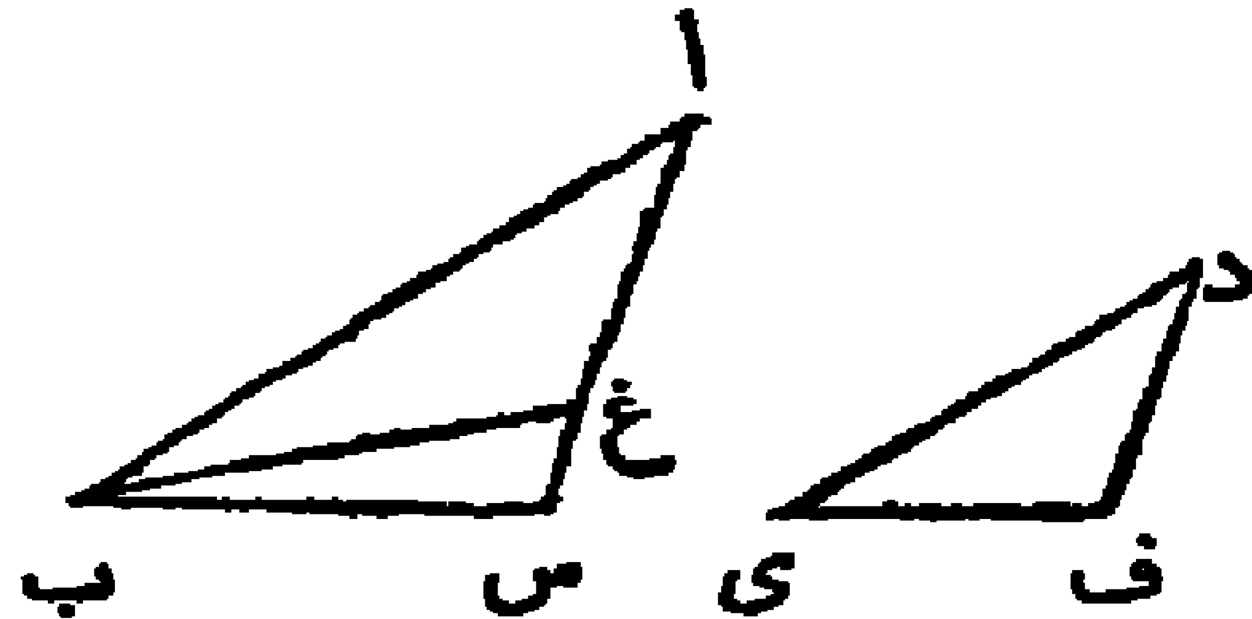
لانهُ ان لم تكن الزاويتان ا ب س د ى ف متساويتين فاحداهما اكبر من الاخرى لتكن ا ب س اكبرها وعند النقطة ب في الخط المستقيم ا ب اجعل الزاوية ا ب غ تعدل د ى ف (ق ٢٣ ك ١) فحسب المفروض الزاوية ب ا غ تعدل ى د ف وقد جعلت ا ب غ = د ى ف فالباقية ا غ ب تعدل الباقية د ف ى (فرع ٤ ق ٣٢ ك ١) وزوايا المثلث ا ب غ تعدل زوايا المثلث د ى ف فلنا (ق ٤ ك ٦)

ا ب : ب غ :: د ى : ى ف وبالمفروض

د ى : ى ف :: ا ب : ب س فاذاً (ق ١١ ك ٥)

ا ب : ب س :: ا ب : ب غ اى بين ا ب والخطّين ب س ب غ تناسب واحد فاذاً ب س = ب غ (ق ٩ ك ٥) فالزاوية ب غ س = ب س غ (ق ٥ ك ١) ولكن بالمفروض ب س غ اصغر من قائمة فتكون ب غ س اصغر من قائمة فتكون الزاوية المتوالية ا غ ب اعظم من قائمة (ق ١٣ ك ١) وقد تبرهن ان ا غ ب = د ف ى فتكون د ف ى اعظم من قائمة وقد فُرِض انها اصغر من قائمة وذاك محال. فلا تكون الزاويتان ا ب س د ى ف غير متساويتين اي هما متساويتان. والزاوية عند ا تعدل الزاوية عند د فالباقية عند س تعدل الباقية عند ف فالمثلث ا ب س يشبه المثلث د ى ف

ثم ان لم تكن كل واحدة من الزاويتين عند س وف اصغر من قائمة فالمثلث ا ب س يشبه المثلث د ى ف. لانهُ اذا رُسم الشكل كما تقدم يُبرهَن ان ب س = ب غ وب س غ = ب غ س. وب س غ ليست اصغر من قائمة فلا



تكون ب غ س اصغر من قائمة وزاويتان من المثلث ب غ س معًا لا تكونان اصغر من قائمتين وذاك غير ممكن (ق ١٧ ك ١) فيُبرهَن ان المثلث ا ب س يشبه المثلث د ى ف حسبما تقدم



القضية الثامنة .ن

في مثلثٍ ذي قائمةٍ اذا رُسِم خطٌّ عموديٌّ من القائمة الى القاعدة فالمثلثان الحادثان على جانبَي العمود متشابهان ويشبهان ايضًا المثلث الاول

ليكن ا ب س مثلثًا ذا قائمة ب ا س ومن النقطة ا ليُرسَم ا د عمودًا على القاعدة ب س فالمثلثان ا ب د ا س د متشابهان ويشبهان ايضًا المثلث ا ب س . لأنَّ الزاوية ب ا س تعدل الزاوية ا د ب لكون كل واحدة منها قائمة والزاوية عند ب مشتركة بين المثلثين ا ب س ا ب د فالزاوية الاخرى ا س ب تعدل الاخرى ب ا د (فرع ٤ ق ٣٢ ك ١) فالمثلثان ا ب س ا ب د متساويا الزوايا والاضلاع التي تلي الزوايا المتساوية متناسبة (ق ٤ ك ٦) فالمثلثان متشابهان (حد ١ ك ٦) وهكذا يبرهن ان المثلث ا د س يشبه المثلث ا ب س فالمثلثان ا د س ا ب د يشبهان المثلث ا ب س فهما متشابهان

فرع . يتضح من هذه القضية ان العمود على القاعدة من قائمة مثلث ذي قائمة هو متناسب متوسط بين قسمَي القاعدة وان كل ضلع هو متناسب متوسط بين القاعدة والقطعة من القاعدة التي تلي ذلك الضلع . لان في المثلثين ب د ا ا د س لنا (ق ٤ ك ٦)

ب د : د ا :: د ا : د س وفي المثلثين ا ب س ب د ا لنا (ق ٤ ك ٦)

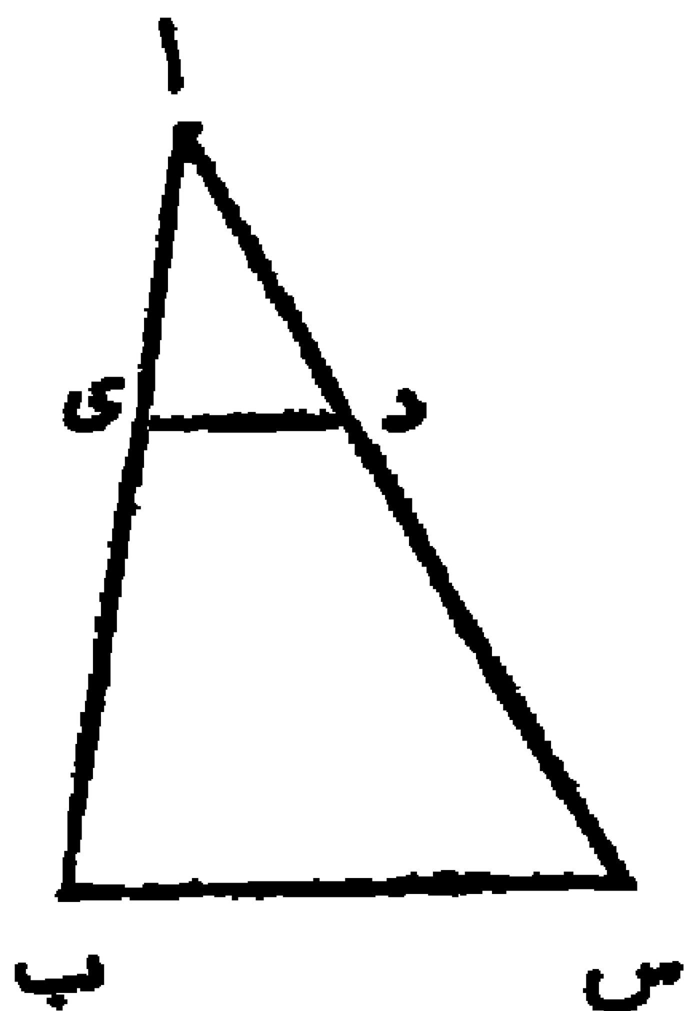
ب س : ب ا :: ب ا : ب د وفي المثلثين ا ب س ا س د (ق ٤ ك ٦)

ب س : س ا :: س ا : س د

القضية التاسعة. ع

علينا ان نقطع من خطٍ مستقيم جزًا معينًا اي جزًا يعدهُ الخط مرارًا مفروضة

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض. فعلينا ان نقطع منهُ جزاً يعدهُ ا ب مرارًا مفروضة



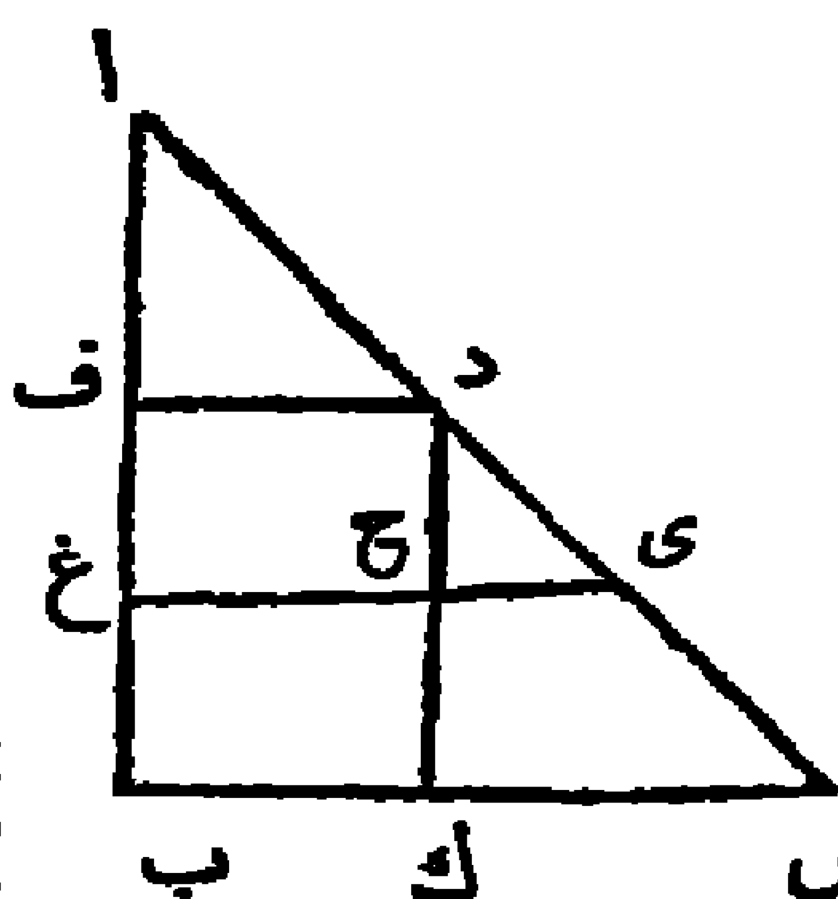
من النقطة ا ارسم الخط المستقيم ا س حتى يجعل مع ا ب زاوية وفي ا س افرض نقطة مثل د حتى ان ا س يعدهُ ا د مرارًا تعدل المرار المفروضة للخط ا ب ان يعدّ الجزء المطلوب قطعهُ. ارسم ب س ثم ارسم د ى حتى يوازي ب س

فلأنَّ ى د يوازي ب س احد اضلاع المثلث فنسبة س د : د ا :: ب ى : ى ا (ق ٢ ك ٦) وبالتركيب (ق ١٨ ك ٥) س ا : ا د :: ب ا : ا ى. ولكن س ا هو مضروب من ا د فيكون ب ا ذات هذا المضروب من ا ى (ق ج ك ٥) اي يعدّ ا ى كما ان ا س يعدّ ا د فاي جزء كان ا د من ا س يكون ا ى ذات ذلك الجزء من ا ب فقد قُطع من ا ب الجزء المفروض

القضية العاشرة. ع

علينا ان نقسم خطًّا مستقيمًا مفروضًا الى اقسام بينها النسبة الكائنة بين اقسام خط مستقيم مفروض

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض وا س الخط المقسوم. علينا ان نقسم ا ب الى اقسام بينها النسبة الكائنة بين اقسام الخط ا س



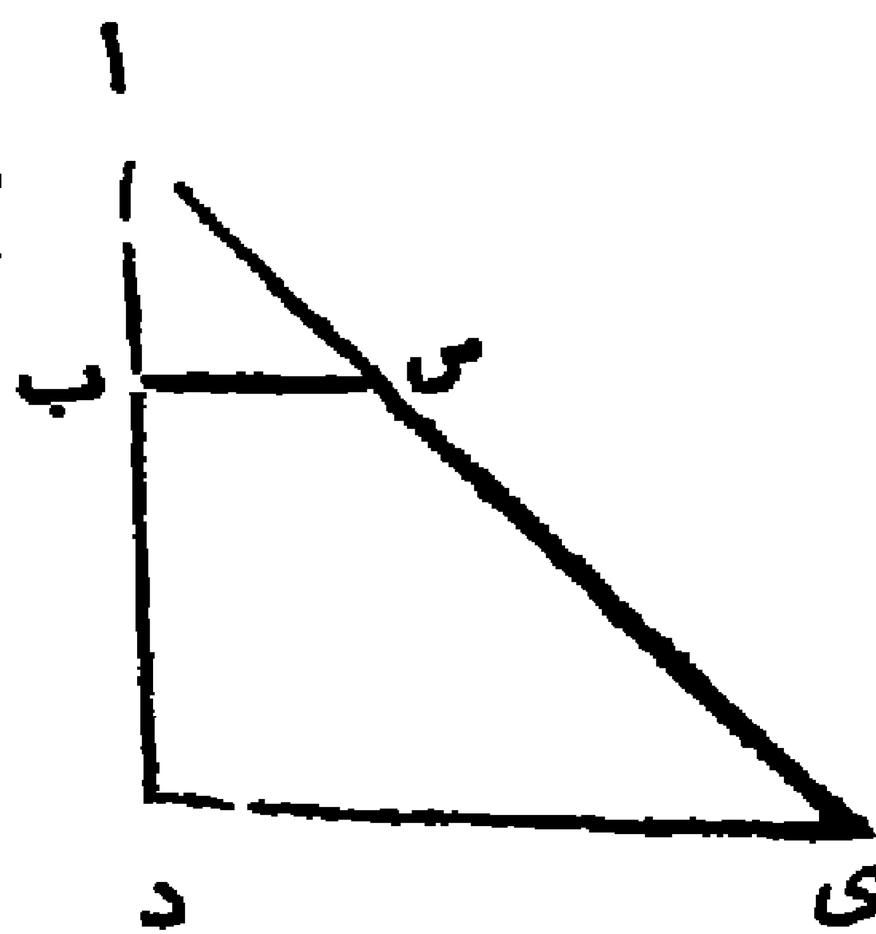
ليقسم ا س في د وى وليوضع ا ب ا س حتى تحدث بينهما زاوية وارسم ب س. ثم من النقطتين د وى ارسم د ف ى غ حتى يوازيا ب س (ق ٣١ ك ١) ومن د ارسم د ح ك حتى يوازي ا ب. فكل واحد من الشكلين د غ ح ب متوازي الاضلاع ود ح = ف غ

(ق٤ ٢ك١) وح ك=غ ب. ولكون ح ى يوازي ك س احد اضلاع المثلث دك س فنسبة س ى : ى د :: ك ح : ح د (ق٢ ك٦) ولكن ك ح=ب غ وح د=غ ف فتكون س ى : ى د :: ب غ : غ ف. ولكون ف د يوازي غ ى احد اضلاع المثلث اغ ى فنسبة ى د : د ا :: غ ف : ف ا وقد تبرهن ان س ى : ى د :: ب غ : غ ف فقد انقسم الخط المستقيم ا ب مثل انقسام الخط ا س

القضية الحادية عشرة. ع

علينا ان نجد خطًّا ثالثًا مناسبًا لخطَّين مستقيمين مفروضَين

ليكن ا ب ا س الخطَّين المستقيمين المفروضين فليوضعا حتى تحدث بينهما زاوية. علينا ان نجد خطًّا ثالثًا يناسبهما

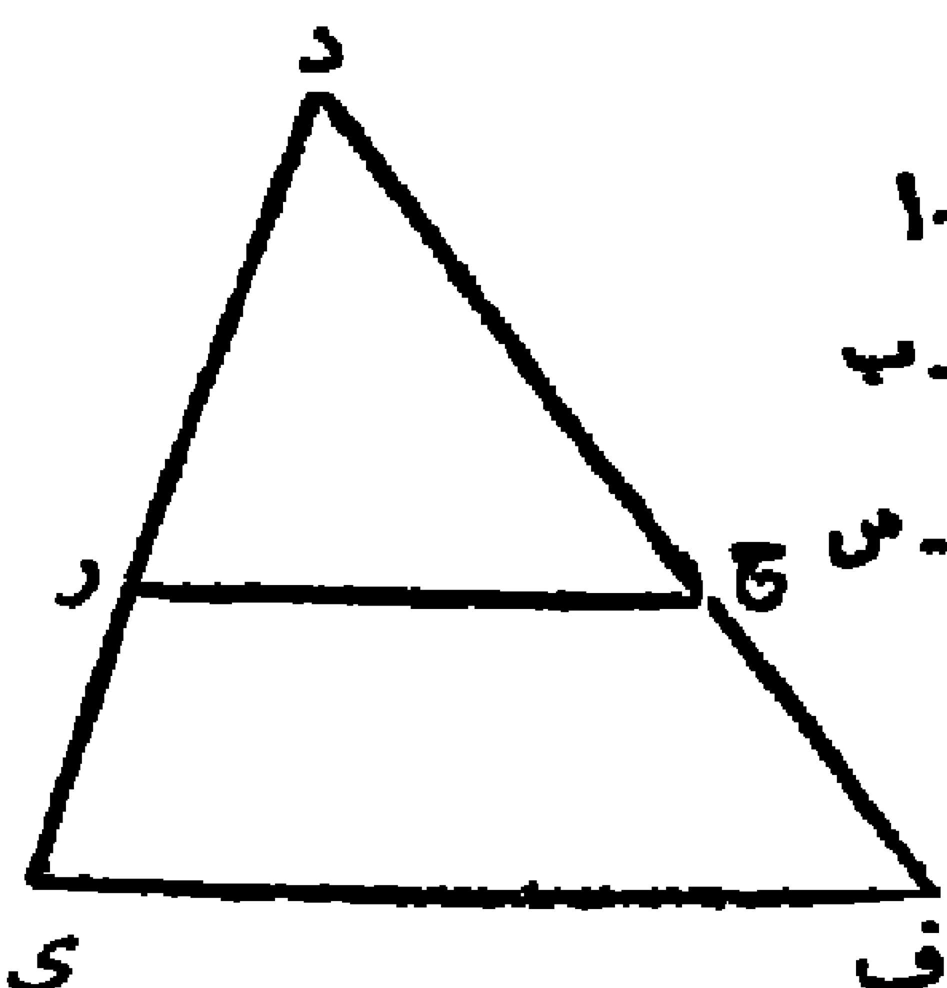


اخرج ا ب ا س الى د و ى واجعل ب د يعدل ا س. ارسم ب س ثم من النقطة د ارسم د ى حتى يوازي ب س. فلأنّ ب س يوازي د ى ضلعًا من المثلث ا د ى فنسبة ا ب : ب د :: ا س : س ى (ق٢ ك٦) ولكن ب د = ا س فنسبة ا ب : ا س :: ا س : س ى فالخط س ى انما هو مناسبٌ ثالثٌ للخطَّين المفروضين

القضية الثانية عشرة. ع

علينا ان نجد مناسبًا رابعًا لثلاثة خطوط مستقيمة مفروضة

ليكن ا وب وس الخطوط الثلاثة المستقيمة المفروضة. علينا ان نجد خطًّا رابعًا يناسبها



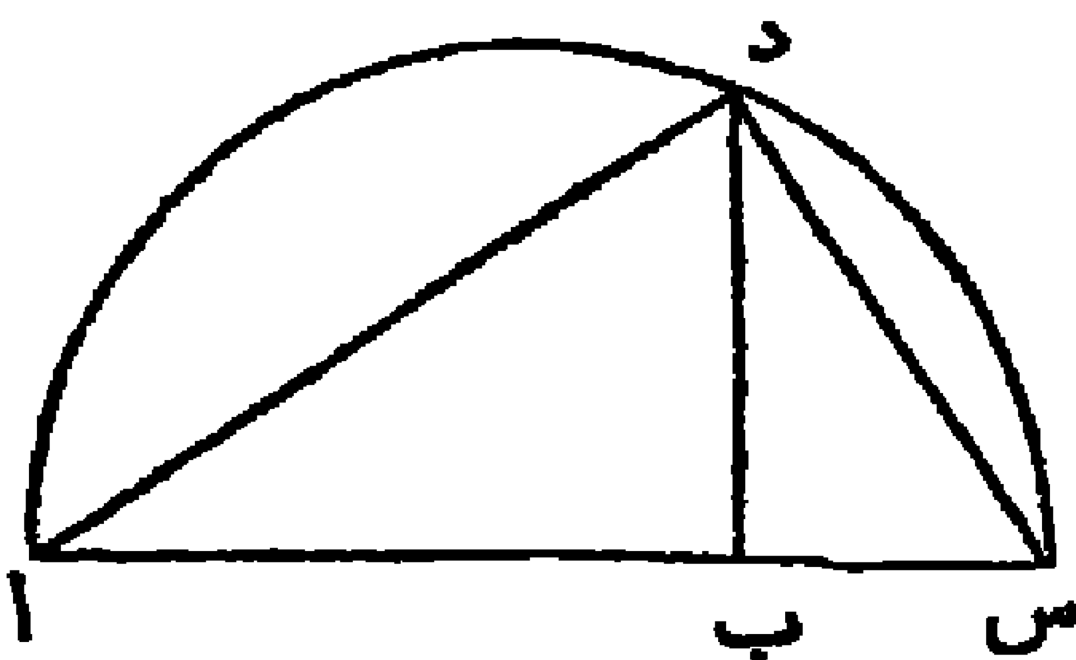
لنفرض خطَّين مستقيمين د ى د ف بينهما زاوية ى د ف. ومنهما افصل د ر حتى يعدل ا ور ى حتى

يعدل ب ود ح حتى يعدل س. ارسم ر ح ثم ارسم ى ف حتى يوازي ر ح (ق ٣١ ك ١). فلأنّ ر ح يوازي ى ف احد اضلاع المثلث د ى ف فنسبة د ر : ر ى :: د ح : ح ف (ق ٢ ك ٦) ولكن د ر=ا و ر ى=ب و د ح=س فنسبة ا : ب :: س : ح ف. فالخط ح ف انما هو مناسب رابع للخطوط الثلاثة المفروضة

القضية الثالثة عشرة.ع

علينا ان نجد متناسبًا متوسطاً بين خطين مستقيمين مفروضين

ليكن ا ب ب س الخطّين المستقيمين المفروضين. علينا ان نجد متناسبًا متوسطًا بينهما. اجعل ا ب ب س على استقامة واحدة وعلى ا س ارسم نصف دائرة ا د س. ومن النقطة ب ارسم ب د عمودًا على ا س (ق ١١ ك ١) ثم ارسم ا د ود س

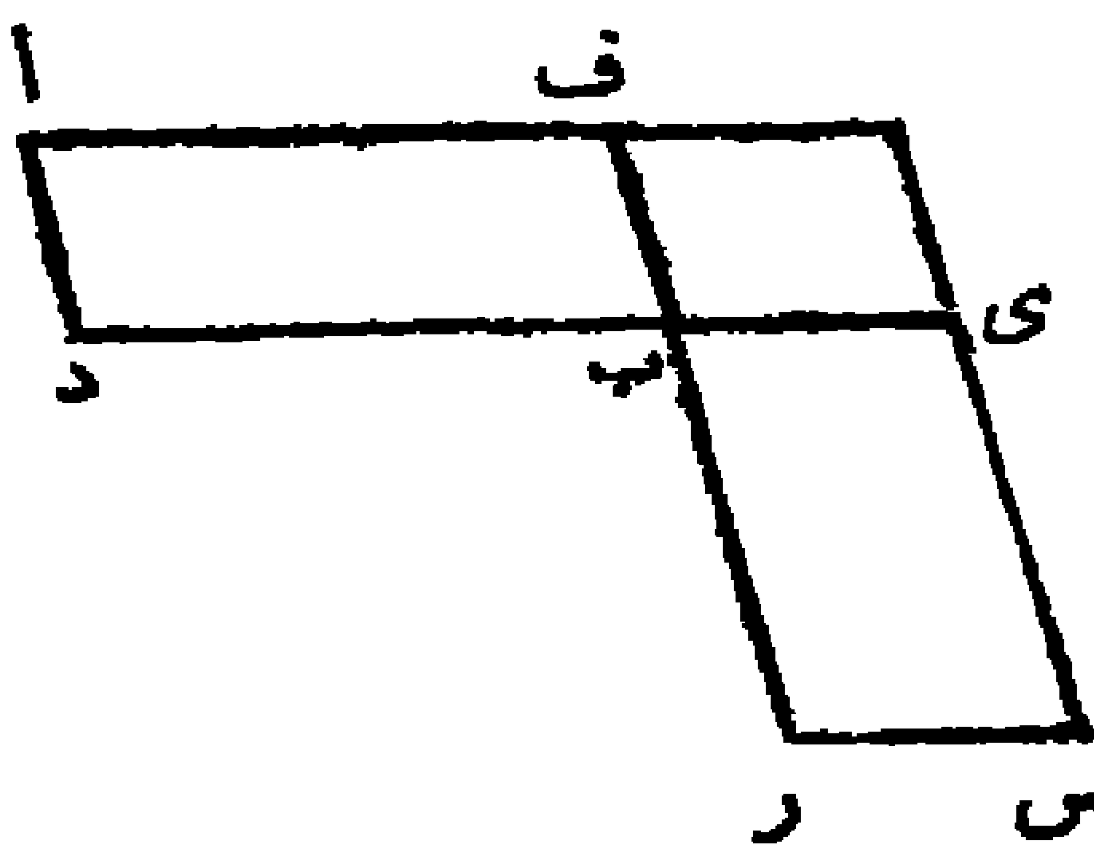


لأنَّ ا د س قائمة لكونها في نصف دائرة (ق ٣١ ك ٣) وقد رُسِم د ب عمودًا من القائمة على القاعدة فالخط د ب انما هو متناسب متوسط بين قسمَي القاعدة (فرع ق ٨ ك ٦) فقد وجدنا د ب متناسبًا متوسّطًا بين الخطين المفروضين ا ب ب س

القضية الرابعة عشرة.ن

في شكلين متوازيَي الاضلاع متساويَين اذا عدلت زاويةٌ من الواحد زاويةً من الآخر تكون الاضلاع المحيطة بالزاويتَين المتساويتَين متناسبة بالتكافؤ. واذا عدلت زاويةٌ من شكل متوازي الاضلاع زاويةً من اخر متوازي الاضلاع وكانت الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ فالشكلان متساويان

ليكن ا ب ب س شكلين متوازيَي الاضلاع متساويَين لهما الزاويتان عند ب



متساويتان وليكن الضلعان د ب ب ى على استقامة واحدة فيكون الضلعان ر ب ب ف ايضاً على استقامة واحدة (ق١٤ ك١) فاضلاع الشكلين ا ب ب س المحيطة بالزاويتين المتساويتين هي متناسبة بالتكافؤ اي نسبة د ب : ب ى :: ر ب : ب ف

تمّ الشكل ف ى. فلانّ الشكلين ا ب ب س متساويان وف ى شكل اخر متوازي الاضلاع نلنا ا ب : ف ى :: ب س : ف ى (ق٧ ك٥)

والشكلان ا ب ف ى لها علوٌّ واحدٌ فلنا

ا ب : ف ى :: د ب : ب ى (ق١ ك٦) وايضاً

ب س : ف ى :: ر ب : ب ف (ق١ ك٦) فاذاً

د ب : ب ى :: ر ب : ب ف (ق١١ ك٥) فاضلاع الشكلين ا ب ب س المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافوء

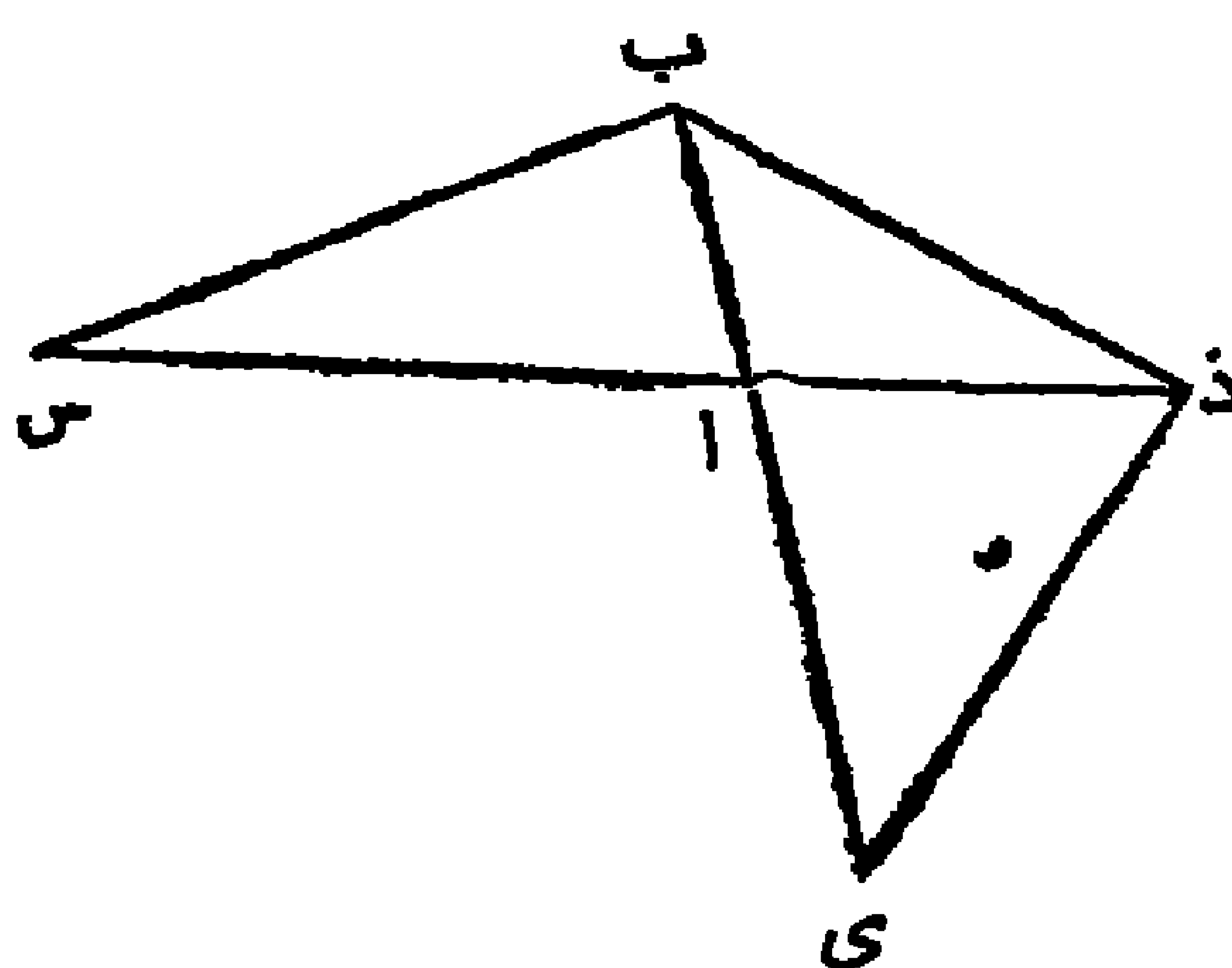
ثم لنفرض ان هذه الاضلاع متناسبة بالتكافوء اي د ب : ب ى :: ر ب : ب ف فالشكل ا ب يعدل السكل ب س. لانّ د ب . ب ى :: ر ب : ب ف وايضاً د ب : ب ى :: ا ب : ف ى وايضاً ر ب : ب ف :: ب س : ف ى فاذاً ا ب : ف ى :: ب س : ف ى (ق١١ ك٥)

فالشكل ا ب يعدل الشكل ب س (ق٩ ك ٥)

القضية الخامسة عشرة . ن

في مثلثين متساويين لهما زاوية من الواحد تعدل زاوية من الآخر تكون الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافوء. واذا عدلت زاويةٌ من الواحد زاويةً من الاخر وكانت الاضلاع المحيطة بهاتين الزاويتين متناسبة بالتكافوء فالمثلثان متساويان

ليكن ا ب س ا د ى مثلثين متساويين والزاوية ب ا س فلتعدل الزاوية



د ا ى فالاضلاع المحيطة بهاتين الزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافوء اي س ا : ا د :: ى ا : ا ب

ليوضع المثلثان حتى يكون الضلعان س ا ا د على استقامة واحدة فيكون ى ا ا ب ايضًا على استقامة واحدة (ق١٤ ك١) ارسم ب د. فلكون المثلث ا ب س يعدل المثلث ا د ى فنسبة المثلث س ا ب الى المثلث ب ا د كالمثلث ى ا د الى ب ا د ولكن س ا ب : ب ا ذ :: س ا : ا د ونسبة ى ا د : ب ا د :: ى ا : ا ب فاذًا س ا : ا د :: ى ا : ا ب (ق١ ك٥) فالاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافوء

ثم لنفرض ان هذه الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافوء فالمثلث ا ب س يعدل المثلث ا د ى. ارسم ب د كما تقدم. فلأنّ س ا : ا د :: ى ا : ا ب وايضًا لأنّ س ا : ا د :: المثلث ا ب س : المثلث ب ا د (ق١ ك٦) وايضًا ى ا : ا ب :: المثلث ى ا د : المثلث ب ا د. فالمثلث ا ب س : المثلث ب ا د :: المثلث ى ا د : الملث ب ا د (ق١١ ك٥) فالمثلث ا ب س يعدل المثلث ى ا د (ق٩ ك٥)

القضية السادسة عشرة. ن

اذا كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبةً فالقائم الزوايا الذي هو مسطَّح الطرفين يعدل القائم الزوايا الذي هو مسطح الوسطين. والقائم الزوايا الذي هو مسطح الطرفين اذا عدل القائم الزوايا الذي هو مسطح الوسطين فالخطوط الاربعة متناسبة

ليكن ا ب س د ى ف خطوطًا مستقيمة متناسبة اى ا ب : س د :: ى : ف فالقائم الزوايا ا ب في ف يعدل القائم الزوايا س د في ى

من النقطة ا ارسم ا غ عمودًا على ا ب
ومن س ارسم س ح عمودًا على س د واجعل
ا غ يعدل ف وس ح يعدل ى وتمم
الشكلين المتوازيي الاضلاع غ ب ح د.
فلكون ا ب : س د :: ى : ف وى = س ح

ى
ف
غ
ح
ا ب س د

وف = ا غ فنسبة ا ب : س د :: س ح : ا غ (ق ٧ ك ٥) فاضلاع الشكلين المحيطة بالزوايا المتساوية هي متناسبة بالتكافوء فالشكل ح د يعدل الشكل غ ب (ق ١٤ ك ٦) وب غ هو مسطح ا ب في ف لأنّ ا غ = ف وح د مسطح س د في ى لانّ س ح = ى فالقائم الزوايا ا ب في ف يعدل القائم الزوايا س د في ى. ثم اذا فُرِض ان القائم الزوايا ا ب في ف يعدل القائم الزوايا س د في ى فالخطوط الاربعة متناسبة اى ا ب : س د :: ى : ف. تمّم الشكلين كما تقدم. فلان القائم الزوايا ا ب × ف = القائم الزوايا س د × ى والقائم الزوايا ب غ هو مسطح ا ب × ف لان ا غ = ف والقائم الزوايا ح د هو مسطح س د × ى لان س ح = ى فالقائم الزوايا ب غ يعدل القائم الزوايا د ح وزواياهما متساوية ايضًا فالاضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية هي متناسبة بالتكافوء (ق ١٤ ك ٦) فنسبه ا ب : س د :: س ح : ا غ وس ح = ى وا غ = ف فنسبة ا ب : س د :: ى : ف

القضية السابعة عشرة. ن

اذا كانت ثلاثة خطوط مستقيمة متناسبةً فالقائم الزوايا الذي هو مسطح الطرفين يعدل مربع الوسط. والقائم الزوايا الذي هو مسطح الطرفين اذا عدل مربع الوسط فالخطوط الثلاثة متناسبة

ليكن ا وب وس ثلاثة خطوط متناسبة اي ا : ب :: ب : س فالقائم الزوايا ا × س يعدل مربع ب. افرض خطًّا اخر يعدل ب مثل د فلكون ا : ب :: ب : س وقد فُرِض ان ب يعدل د فنسبة ا : ب :: د : س (ق ٧ ك ٥) واذا كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبة فالقائم الزوايا مسطح الطرفين يعدل القائم

ا
ب
د
س

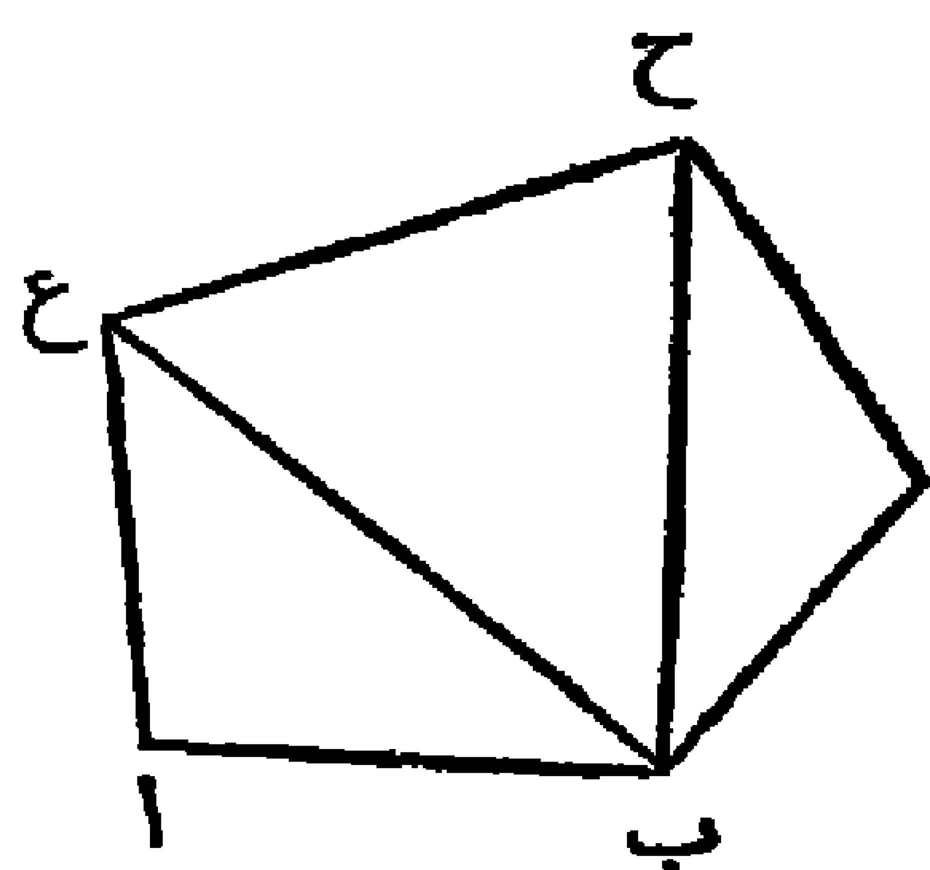
الزوايا مسطح الوسطين (ق١٦ ك٦) فالقائم الزوايا ا × س يعدل القائم الزوايا ب×د والقائم الزوايا ب × د يعدل مربع ب لأنّ د يعدل ب فالقائم الزوايا ا×س=ب٢. ثم اذا فُرِض ان ا×س=ب٢ تكون نسبة ا : ب :: ب : س

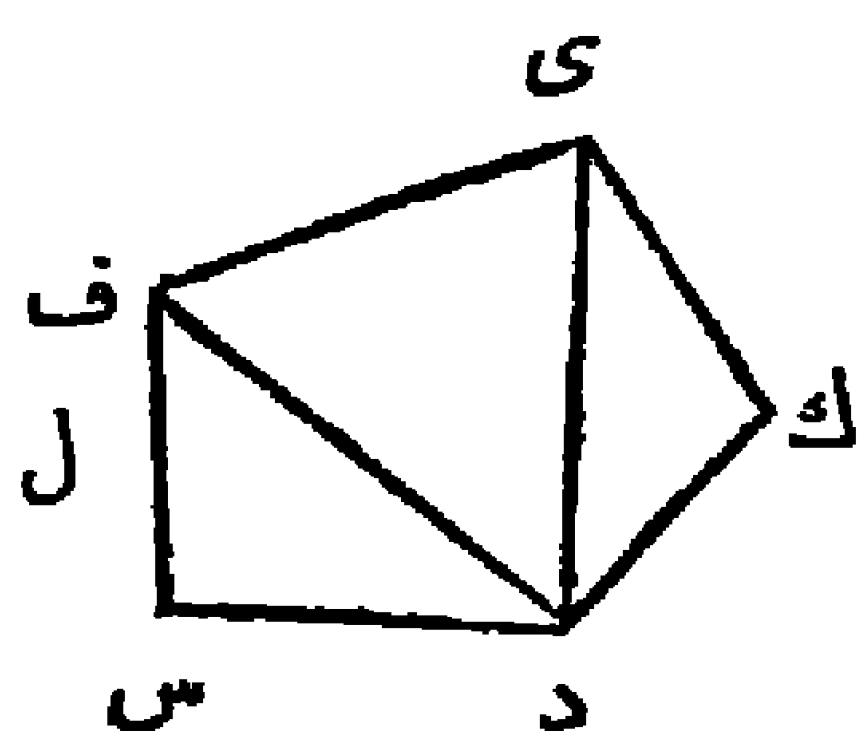
ليفرض كما تقدّم ان د يعدل ب فلانّ القائم الزوايا ا×س=ب٢ ود=ب فالقائم الزوايا ا×س=ب×د واذا كان القائم الزوايا مسطح الطرفين يعدل القائم الزوايا مسطح الوسطين فالخطوط الاربعة متناسبة (ق١٦ ك٦) اي ا : ب :: د : س ولكن ب=د فتكون ا : ب :: ب : س

القضيه الثامنة عشرة.ع

علينا ان نرسم على خطٍّ مستقيم مفروض شكلاً ذا اضلاع مستقيمة شبيهًا بشكل مفروض ذي اضلاع مستقيمة ومثله في الوضع

ليكن ا ب الخطّ المستقيم المفروض وس د ى ف الشكل المفروض ذا اضلاع مستقيمة. علينا ان نرسم على ا ب مثل س د ى ف شكلاً ووضعًا





ارسم د ف وعلى النقطتين ا وب من الخط المستقيم ا ب اجعل الزاوية ب ا غ تعدل د س ف (ق٢٣ ك١) والزاوية ا ب غ تعدل س د ف فالزاوية الاخرى س ف د تعدل ا غ ب (فرع ٤ ق٣٢ ك١) فالمثلث ف س د يشبه المثلث غ ا ب. ثم عند النقطتين ب وغ من الخط المستقيم ب غ اجعل الزاوية ب غ ح تعدل د ف ى (ق٢٣ ك١) والزاوية غ ب ح تعدل ف د ى فالزاوية الاخرى ف ى د تعدل الاخرى غ ح ب والمثلث ف د ى يشبه المثلث غ ب ح. فلأنّ الزاوية ا غ ب تعدل س ف د والزاوية ب غ ح تعدل د ف ى فكل الزاوية ا غ ح يعدل الكل س ف ى. وهكذا يبرهن ايضًا ان ا ب ح تعدل س د ى. ولكن الزاوية عند ا تعدل الزاوية عند س والزاوية غ ح ب تعدل ف ى د فالشكل ا ب ح غ يشبه الشكل س د ى ف. واضلاع الشكلين المحيطة بالزوايا

المتساوية متناسبة. لانّ المثلثين غ ا ب ف س د متساويي الزوايا فنسبة ب ا : ا غ :: د س : س ف (ق ٤ ك ٦) وهكذا ايضًا

ا غ : غ ب :: س ف : ف د وفي المثلثين المتشابهين ب غ ح د ف ى
غ ب : غ ح :: ف د : ف ى فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥)
ا غ : غ ح :: س ف : ف ى وهكذا يبرهن ان
ا ب . ب ح :: س د : د ى وايضًا (ق ٤ ك ٦)
غ ح : ح ب :: ف ى : ى د فالشكلان متساويا الزوايا والاضلاع

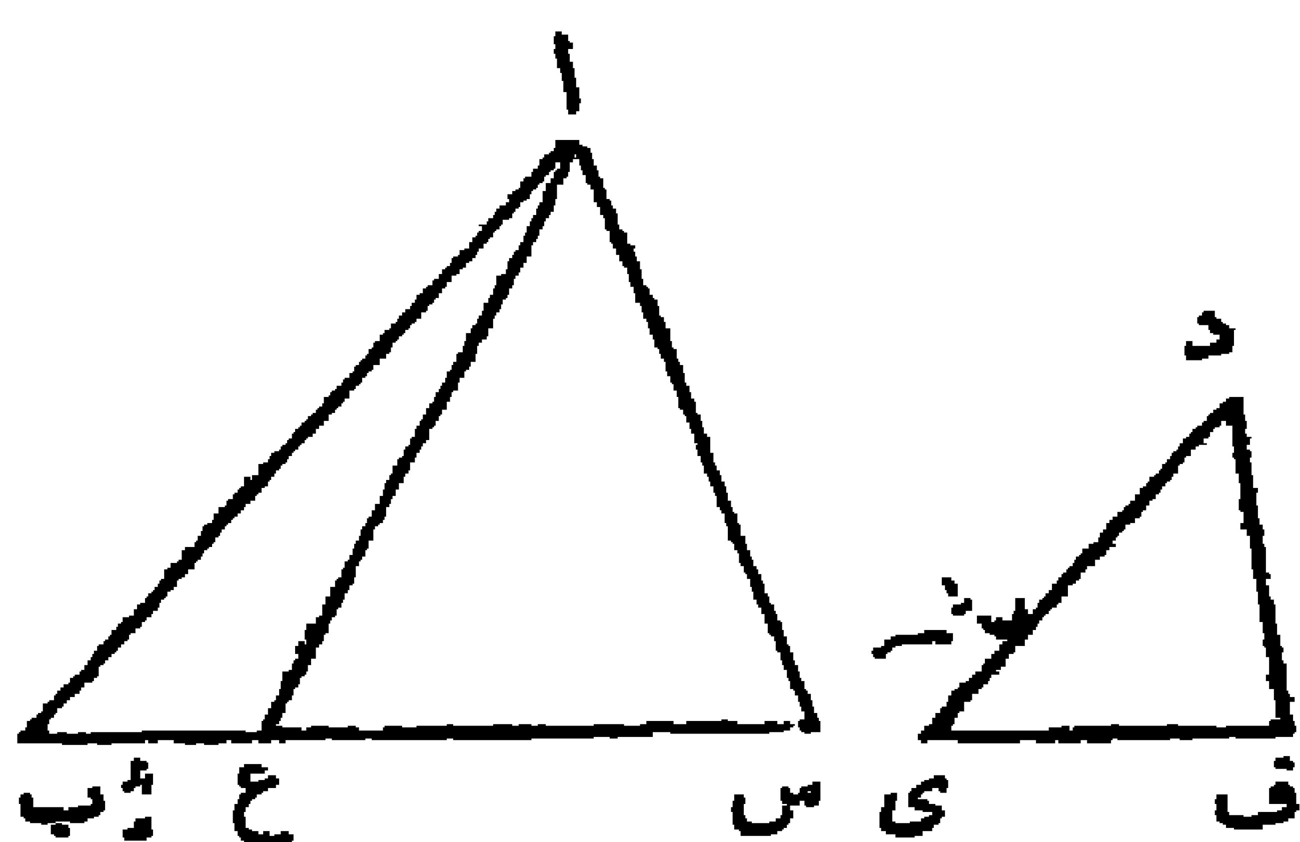
المحيطة بالزوايا المتساوية منهما متناسبة فالشكلان متشابهان (حد ١ ك ٦)

ثم اذا فُرِض ان يُرسَم على ا ب شكلاً يشبه س د ك ى ف. ارسم د ى وعلى الخط المفروض ا ب ارسم الشكل ا ب ح غ حسبما تقدم حتى يشبه س د ى ف وعند المقطتين ب وح من الخط المستقيم ب ح اجعل الزاوية ح ب ل تعدل ى د ك والزاوية ب ح ل تعدل د ى ك فالزاوية الاخرى عند ل تعدل الاخرى عند ك. ولان الشكلين ا ب ح غ س د ي ف متشابهان فالزاوية غ ح ب تعدل ف ى د وب ح ل تعدل د ى ك فالكل غ ح ل يعدل الكل ف ى ك. وهكذا يبرهن ان ا ب ل تعدل س د ك والشكل ذو الخمسة الاضلاع ا غ ح ل ب يعدل الشكل ذا الخمسة الاضلاع س ف ى ك د. ولأنّ الشكلين ا غ ح ب س ف ى د متساويا الزوايا فنسبة غ ح : ح ب :: ف ى : ى د وايضًا ح ب : ح ل :: ى د : ى ك (ق ٤ ك ٦) فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥) غ ح : ح ل :: ف ى : ى ك. ولهذا السبب ايضًا ا ب : ب ل :: س د : د ك وب ل : ل ح :: د ك : ك ى (ق ٤ ك ٦) لانّ المثلثين ب ل ح د ك ى متساويا الزوايا. فالشكلان ا ب ل ح غ س د ك ى ف متساويا الزوايا والاضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية متناسبة فهما متشابهان. وعلى هذه الكيفية يُرسَم على خط مستقيم مفروض شكلٌ ذو ستة اضلاع فاكثر شبيه بشكل مفروض

القضية التاسعة عشرة. ن

نسبة المثلثات المتشابهة بعضها الى بعض كمربعات اضلاعها المتشابهة

ليكن ا ب س د ى ف مثلثين متشابهين ولتكن الزاويتان عند ب وى متساويتين ولتكن نسبة ا ب : ب س :: د ى : ى ف حتى يكون ب س ى ف ضلعين متشابهين (حد ١٢ ك ٥) فنسبة المثلث ا ب س الى المثلث د ى ف كنسبة مربع ب س الى مربع ى ف . استعلم متناسباً ثالثاً بين ب س وى ف اي ب غ (ق ١١ ك ٦) حتى يكون ب س : ى ف :: ى ف : ب غ . ارسم ا غ فلأنّ



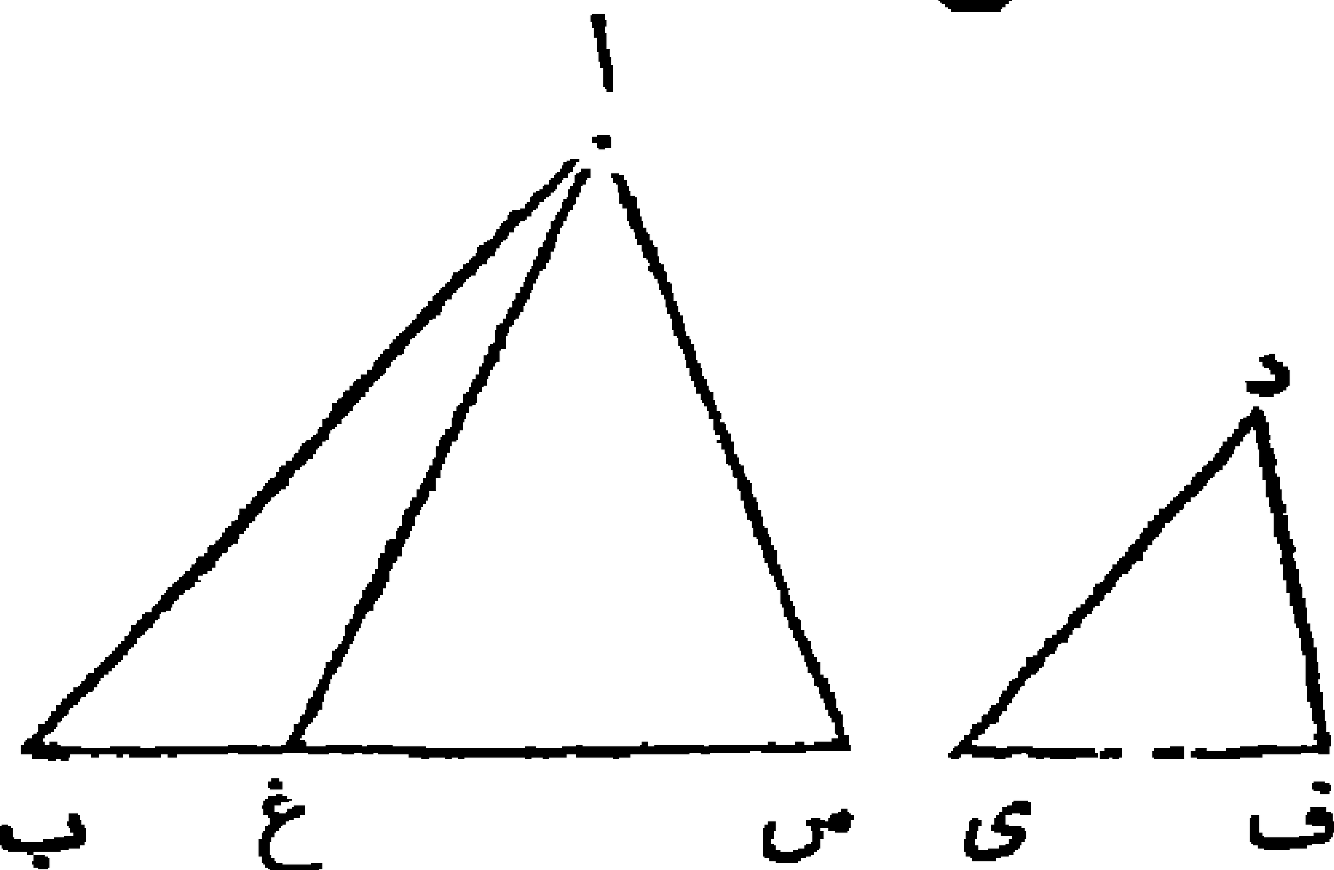
ا ب : ب س :: د ى : ى ف فبالمبادلة (ق ١٦ ك ٥)

ا ب : د ى :: ب س : ى ف ولكن

ب س : ى ف :: ى ف : ب غ فاذاً (ق ١١ ك ٥)

ا ب : د ى :: ى ف : ب غ

فاضلاع المثلثين ا ب غ د ى ف المحيطة بالزوايا المتساوية منهما هي متناسبة بالتكافوء فالمثلثان متساويان (ق ١٥ ك ٦) فالمثلث ا ب غ



يعدل المثلث د ى ف . ولأنّ ب س : ى ف :: ى ف : ب غ فتناسب ب س الى ب غ هو مربع تناسبها الى ى ف . وب س : ب غ :: المثلث ا ب س : المثلث ا ب غ (ق ١ ك ٦) فالمثلث ا ب س : المثلث ا ب غ :: مربع ب س : مربع ى ف . والمثلث ا ب غ يعدل المثلث د ى ف فنسبة ا ب س الى د ى ف كمربع ب س الى مربع ى ف

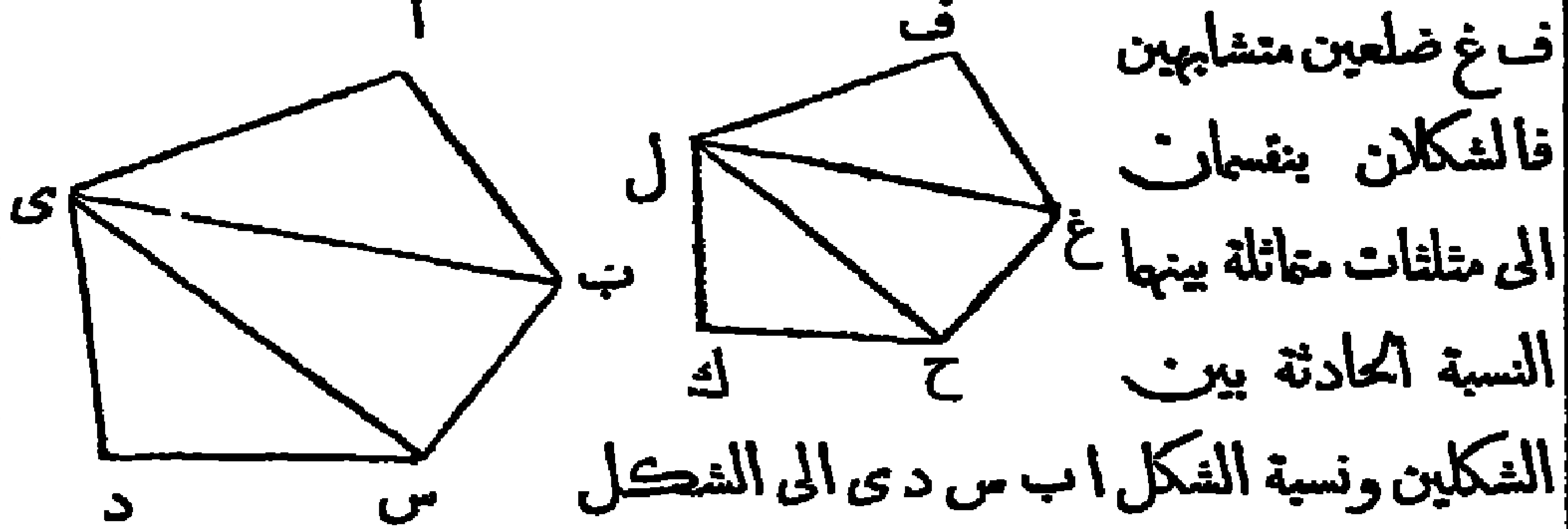
فرع . يتضح من هذه القضية انهُ اذا كان ثلاثة خطوط متناسبة فنسبة الاول الي الثالث كنسبة مثلث مبني على الاول الى مثلث مثله مبني على الثاني

القضية العشرون . ن

اشكالٌ متشابهة ذات اضلاع كثيرة تنقسم الى مثلثات متماثلة عدداً

ومتشابهة بينها نفس النسبة الحادثة بين الاشكال الاصلية. ونسبة الاشكال الاصلية بعضها الى بعض هي كمربعات اضلاعها المتشابهة

ليكن ا ب س د ى ف غ ح ك ل شكلين لها اضلاع كثيرة وليكن ا ب ف غ ضلعين متشابهين فالشكلان ينقسمان الى مثلثات متماثلة بينها النسبة الحادثة بين الشكلين ونسبة الشكل ا ب س د ى الى الشكل ف غ ح ك ل كنسبة مربع ا ب الى مربع ف غ. ارسم ب ى س ى غ ل ح ل.



فلكون الشكل ا ب س د ى يشبه الشكل ف غ ح ك ل فالزاوية ب ا ى تعدل الزاوية غ ف ل (حد ا ك٦) وب ا : ا ى :: غ ف : ف ل فالمثلثان ا ب ى ف غ ل لها زاوية من الواحد تعدل زاوية من الاخر والاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة فزوايا المثلث ا ب ى تعدل زوايا المثلث ف غ ل (ق٦ ك٦) فالمثلثان متشابهان (ق٤ ك٦). ولكون الشكلين متشابهين فالزاوية ا ب س تعدل الزاوية ف غ ح (حد ا ك٦) فالزاوية الباقية ى ب س تعدل الباقية ل غ ح ولكون المثلثين ا ب ى ف غ ل متشابهين فنسبة ى ب : ب ا :: ل غ : غ ف ولانّ الشكلين متشابهان فنسبة ا ب : ب س :: ف غ : غ ح (حد ا ك٦) فبالمساواة (ق٢٢ ك٥) ى ب : ب س :: ل غ : غ ح فالضلعان المحيطان بالزاويتين المتساويتين متناسبان وزوايا المثلث ى ب س تعدل زوايا المثلث ل غ ح (ق٦ ك٦) فهما متشابهان (ق٤ ك٦) وهكذا يبرهن ان المثلثين ى س د ل ح ك متشابهان فقد انقسم الشكلان الى مثلثات متماثلة متشابهة

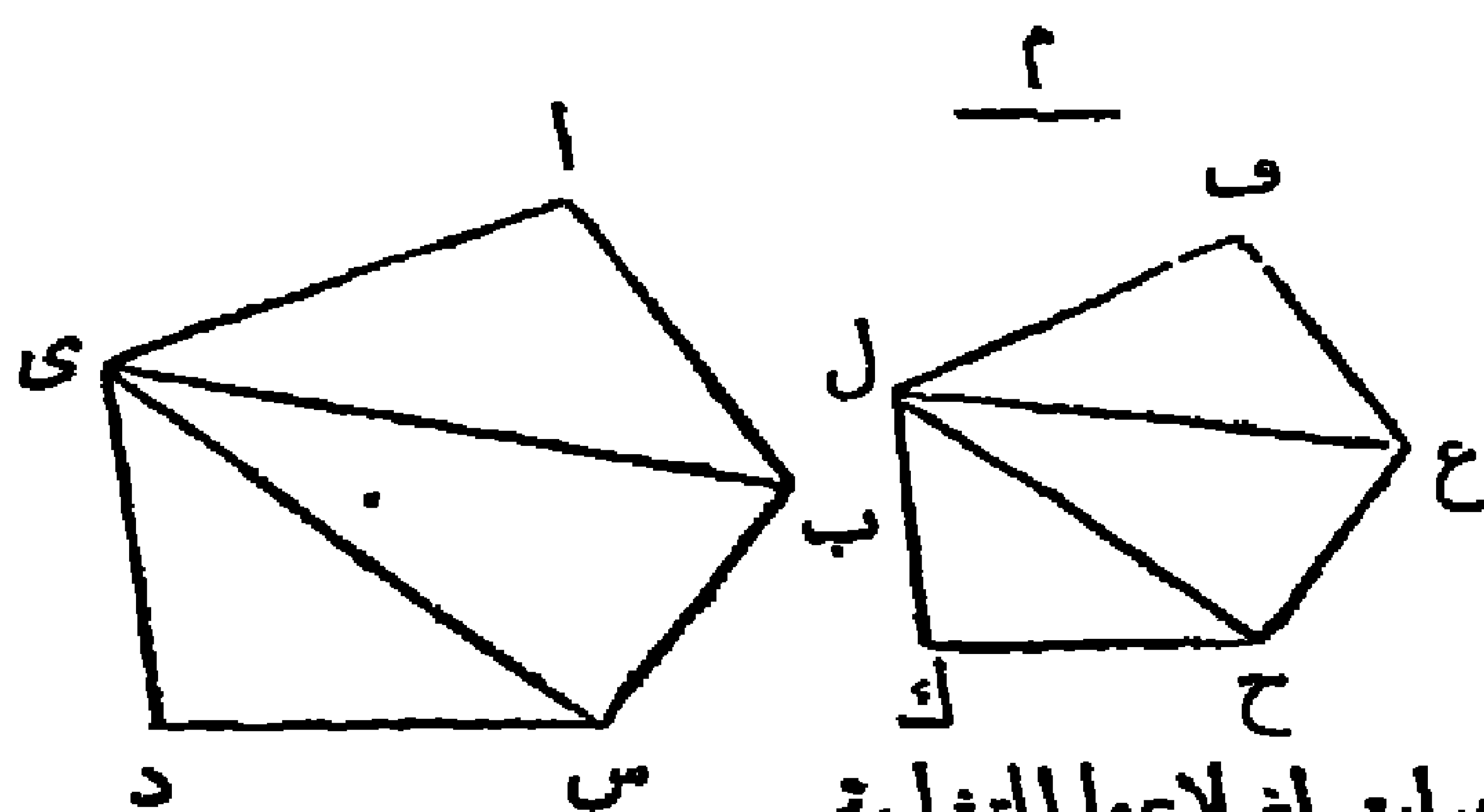
ونسبة هذه المثلثات بعضها الى بعض كنسبة الاشكال بعضها الى بعض فالسوابق هي المثلثات ا ب ى ى ب س ى س د والتوالي هي المثلثات ف غ ل ل غ ح ل ح ك. ونسبة الشكل ا ب س د ى الى الشكل ف غ ح ك ل كنسبة مربع ا ب الى مربع الضلع المشابه ف غ

لانّ المثلث ا ب ى يشبه المثلث ف غ ل فنسبة ا ب ى الى ف غ ل كنسبة

مربع الضلع ب ى الى مربع الضلع غ ل (ق ١٩ ك ٦) وهكذا المثلث ب ى س : المثلث غ ل ح :: مربع ب ى : مربع غ ل فنسبة ا ب ى : ف غ ل :: ب ى س : غ ل ح (ق ١١ ك ٥) وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان

ى ب س : ل غ ح :: ى س د : ل ح ك

وقد تبرهن ان ى ب س : ل غ ح :: ا ب ى : ف غ ل. فنسبة ا ب ى : ف غ ل :: ى ب س : ل غ ح :: ى س د : ل ح ك اي نسبة احد السوابق الى احد التوالي ككل السوابق الى كل التوالي (ق ١٢ ك ٥) فالمثلث ا ب ى : المثلث ف غ ل :: الشكل ا ب س د ى : الشكل ف غ ح ك ل ونسبة ا ب ى : ف غ ل :: ا ب٢ : ف غ٢ فنسبة الشكل ا ب س د ى : ف غ ح ك ل :: مربع ا ب : مربع ف غ



فرع اول. هكذا يبرهن في اشكال ذات اربعة او ستة اضلاع فاكثر ان نسبة بعضها الى بعض كنسبة مربعات اضلاعها المتشابهة

فرع ثانٍ. اذا استعلم متناسب ثالث بين الضلعين المتشابهين ا ب ف غ مثل خط م اي ا ب : ف غ :: ف غ : م فلانّ الشكل على ا ب : الشكل على ف غ :: مربع ا ب : مربع ف غ فنسبة ا ب : م :: الشكل على ا ب : الشكل على ف غ حسبما تقدم في المثلثات (فرع ق ١٩ ك ٦) فاذا كانت ثلاثة خطوط متناسبة تكون نسبة الاول الى الثالث كنسبة شكل على الاول الى شكل مثله على الثاني

فرع ثالث. المربعات متشابهة. فنسبة مربع الى مربع كنسبة مربع ضلع من الواحد الى مربع ضلع من الآخر. وهكذا في كل الاشكال المتشابهة ذات اضلاع مستقيمة اي احدها الى الآخر كمربعات اضلاعها المتشابهة

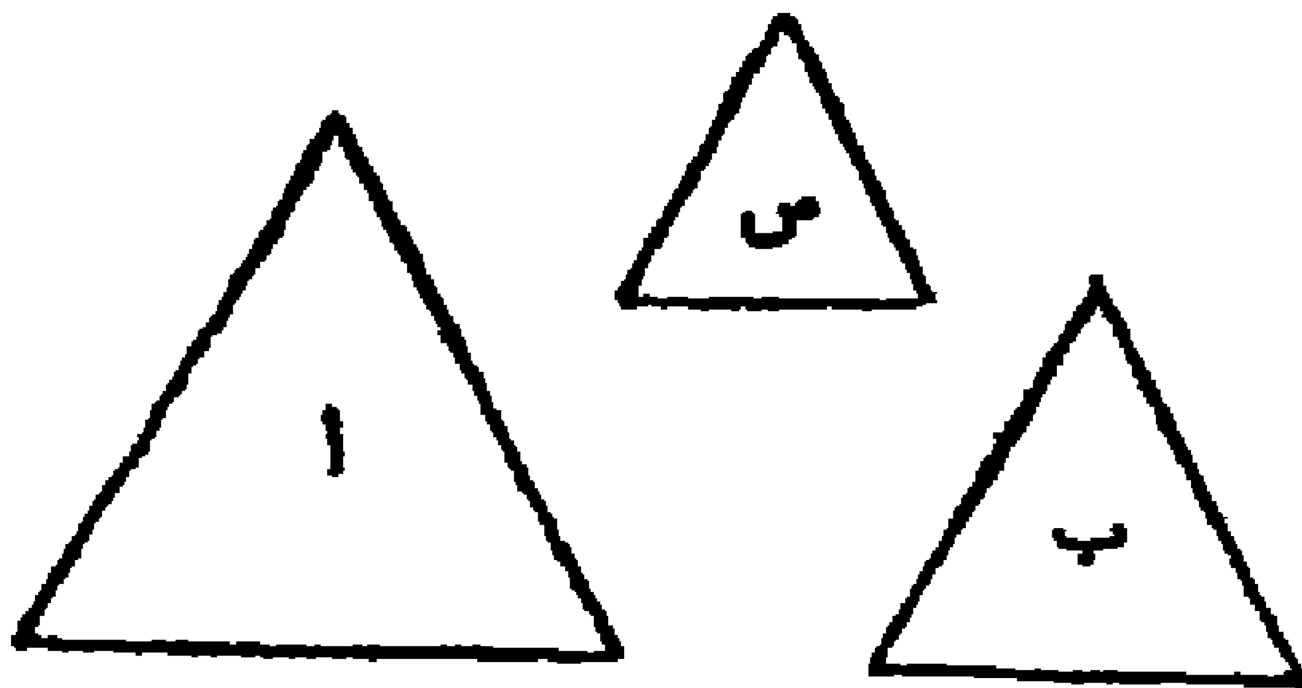
تعليقة. شكلان مركبان من مثلثات متماثلة متشابهة هما متشابهان. فبمشابهة المثلثين لنا ى ا ب = ل ف غ ا ب ى = ف غ ل ى ب س = ل غ ح فاذًا ا ب س = ف غ ح وب س د = غ ح ك وهلمّ جرًّا وايضًا ى ا : ل ف :: ا ب :

ف غ :: ى ث : ل غ :: ب س : غ ح وهلم جرًّا فالزوايا والاضلاع متناسبة فالشكلان متشابهان

القضية الحادية والعشرون . ن

اشكال ذات اضلاع مستقيمة متشابهة بشكل واحد ذي اضلاع مستقيمة هي متشابهة بعضها لبعض

ليكن ا وب شكلين مستقيمي الاضلاع شبيهين بشكلٍ آخر ذي اضلاع مستقيمة مثل س فهما متشابهان



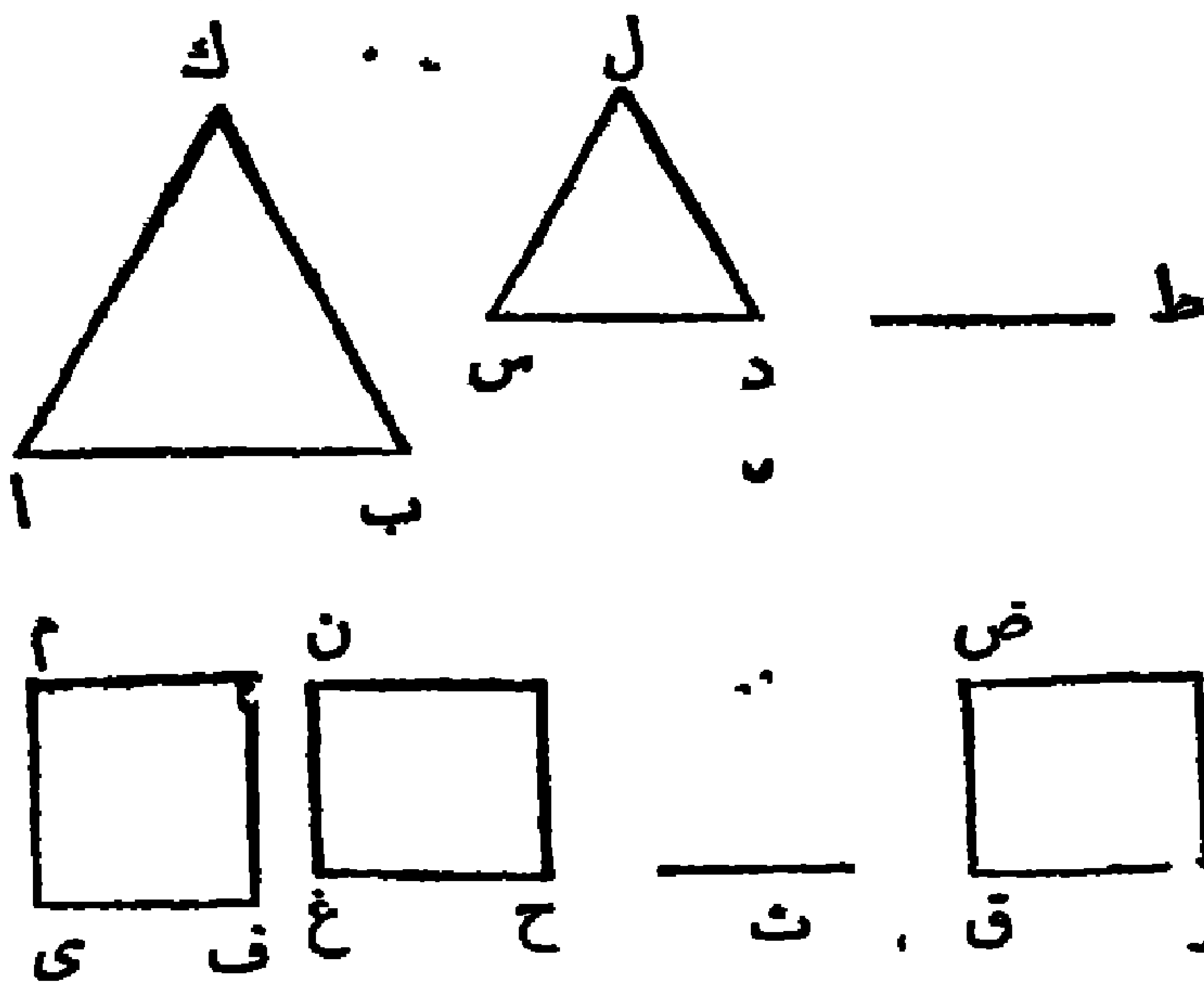
لانّ ا يشبه س فهما متساويا الزوايا والاضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية متناسبة (حد ا ك ٦) ولانّ ب يشبه س فهما متساويا الزوايا والاضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية متناسبة (حد ا ك ٦) فزوايا كل واحد من الشكلين ا وب تعدل زوايا الشكل س والاضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية منهما متناسبة فالشكلان متساويا الزوايا (حد ا ك ا) واضلاعهما الموالية لهذه الزوايا متناسبة (ق ا ا ك ٥) فالشكل ا يشبه الشكل ب (حد ا ك ٦)

القضية الثانية والعشرون . ن

اذا كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبةً فالاشكال المتشابهة ذات الاضلاع المستقيمة المبنية على هذه الخطوط تكون متناسبة ايضًا . واذا كانت هذه الاشكال متناسبة فالخطوط التي بُنِيت عليها تكون متناسبة ايضًا

ليكن ا ب س د ى ف غ ح اربعة خطوط مستقيمة متناسبة اي ا ب : س د

:: ى ف : غ ح وليُرسَم
على اب وس د
شكلان متشابهان
لهما اضلاع مستقيمة
كـ اب ل س د
وليُرسَم على ى ف
غ ح شكلان
متشابهان لهما
اضلاع مستقيمة



م ف ن ح فتكون نسبة كـ اب : ل س د :: م ف : ن ح

ليكن ط خطًّا مستقيمًا ومتناسبًا ثالثًا للخطَّين ا ب س د والخط المستقيم ث متناسبًا ثالثًا للخطَّين ى ف غ ح (ق ١١ ك ٦) فلكون

ا ب : س د :: ى ف : غ ح وايضًا

س د . ط :: غ ح : ث (ق ١١ ك ٥) فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥)

ا ب : ط :: ى ف : ث ولكن

اب : ط :: كـ اب : ل س د (فرع ٢ ق ٢٠ ك ٦) فاذًا

ى ف : ث :: م ف : ن ح فيكون

كـ اب : ل س د :: م ف : ن ح (فرع ٢ ق ٢٠ ك ٦)

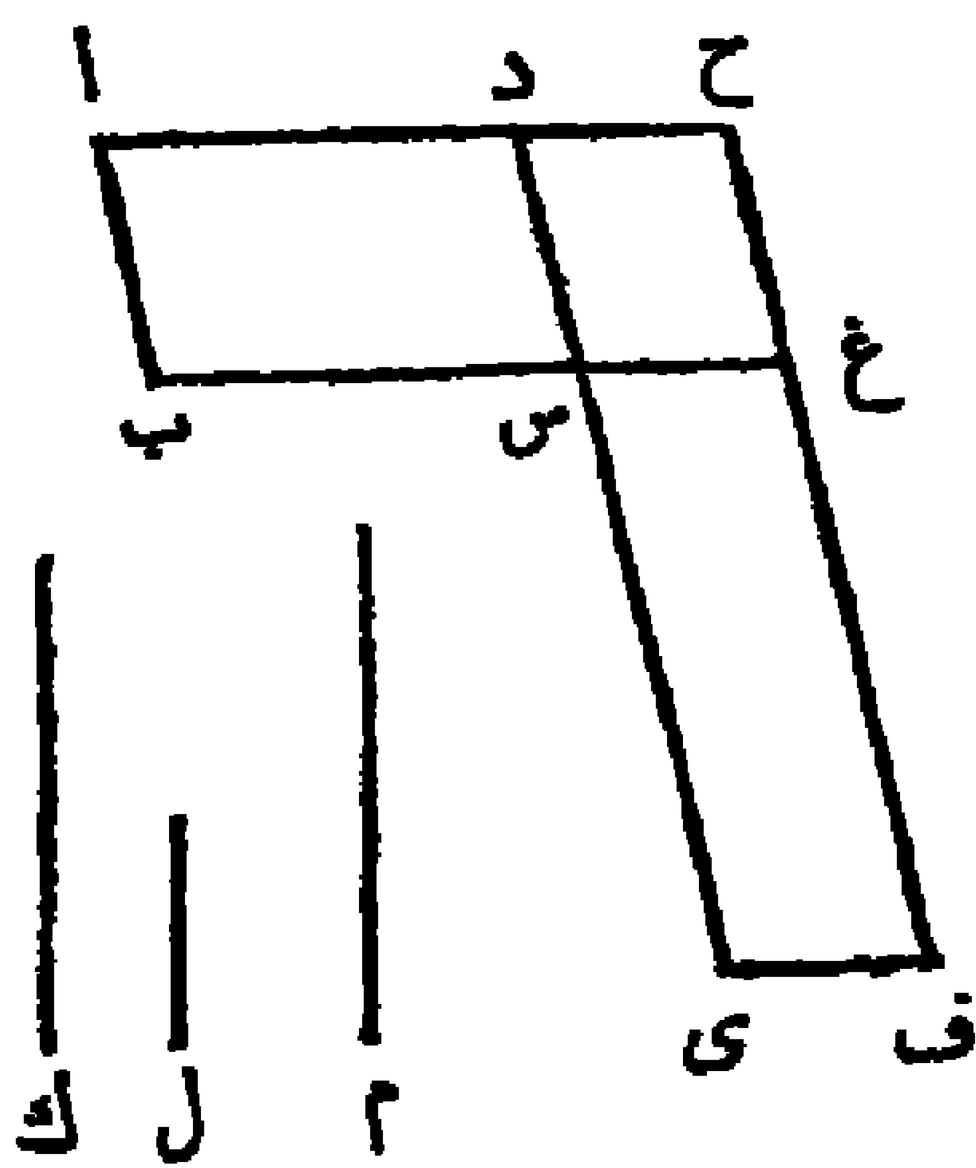
ثم اذا فُرِض ان نسبة كـ اب : ل س د :: م ف : ن ح تكون نسبة اب : س د :: ى ف : غ ح

اجعل نسبة اب : س د :: ى ف : ق ر (ق ١٢ ك ٦) وعلى ق ر ارسم الشكل المستقيم الاضلاع ص ر حتى يشبه م ف او ن ح شكلاً ووضعاً (ق ١٨ ك ٦) فلأنّ اب : س د :: ى ف : ق ر وقد رُسِم على اب وس د شكلان متشابهان شكلاً ووضعاً كـ اب ول س د وهكذا على ى ف ق ر قد رُسِم شكلان متشابهان شكلاً ووضعاً م ف وص ر فتكون نسبة كـ اب : ل س د :: م ف : ص ر. وبالمفروض كـ اب : ل س د :: م ف : ن ح فالشكل المستقيم الاضلاع م ف له تناسبٌ واحدٌ للشكلين ن ح ص ر فهما متساويان (ق ٩ ك ٥) وهما متشابهان

ايضاً شكلاً ووضعاً فالخط غ ح يعدل الخط ق ر ولان ا ب : س د :: ى ف : ق ر وق ر = غ ح فتكون نسبة ا ب : س د :: ى ف : غ ح

القضية الثالثة والعشرون . ن

تناسب اشكال متوازية الاضلاع متساوية الزوايا بعضها الى بعض هو التناسب المركب من تناسبات اضلاعها



ليكن ا س س ف شكلين متوازيَي الاضلاع . والزاوية ب س د فلتعدل الزاوية ى س غ فتناسب ا س الى س ف هو التناسب المركب من تناسبات اضلاعها . ليوضع ب س وس غ على استقامة واحدة فيكون ى س س د ايضاً على استقامة واحدة (ق ١٤ ك ١) تمّ الشكل د غ . ثم عيّن خطاً مستقيماً مثل ك واجعل تناسب ب س : س غ :: ك : ل (ق ١٢ ك ٦) وتناسب د س : س ى :: ل : م فتناسبات ك الى ل ول الى م هي مثل تناسبات الاضلاع اى تناسب ب س الى س غ وتناسب د س الى س ى . ولكن تناسب ك الى م هو المركب من تناسب ك الى ل مع تناسب ل الى م (حد ١٠ ك ٥) فتناسب ك الى م هو المركب من تناسبات اضلاع الشكلين . ولانّ ب س : س غ :: ا س : س ح (ق ١ ك ٦) وب س : س غ :: ك : ل فيكون ك : ل :: ا س : س ح (ق ١١ ك ٥) ولانّ د س : س ى :: س ح : س ف ود س : س ى :: ل : م فيكون ل : م :: س ح : س ف (ق ١١ ك ٥)

وقد تبرهن ان ك : ل :: ا س : س ح وان ل : م :: س ح : س ف فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥) ك : م :: ا س : س ف ولكن تناسب ك الى م هو المركب من تناسبات اضلاع الشكلين كما تقدم . فتناسب ا س الى س ف هو المركب من اضلاعهما

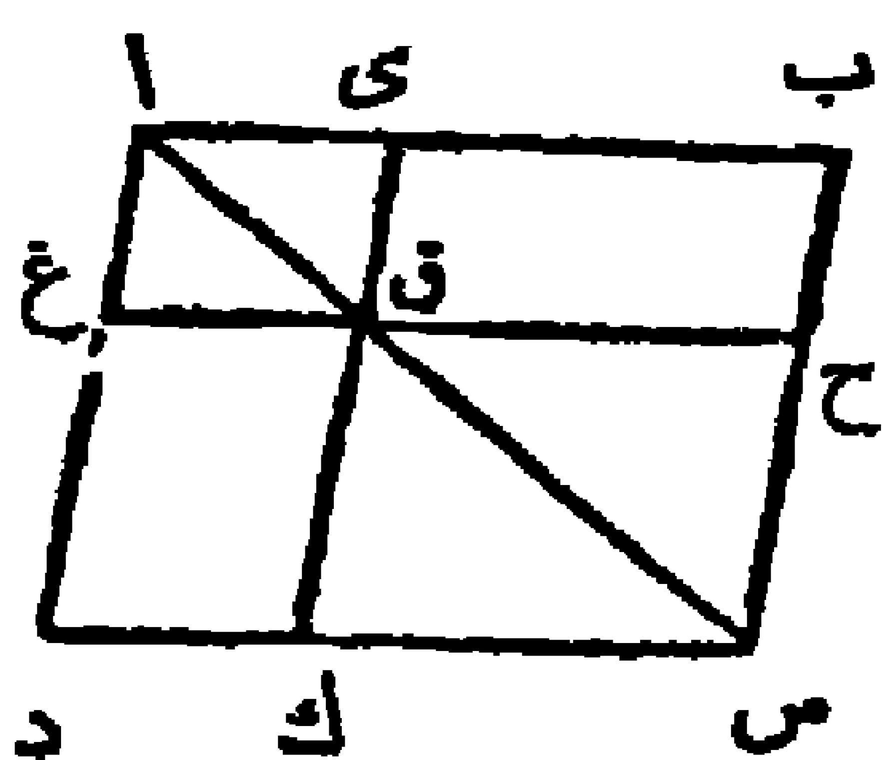
فرع اول . شكلان قائما الزوايا احدهما الى الاخر كحاصل قاعدتيهما في علوهما

فرعٌ ثانٍ . مساحة شكل متوازي الاضلاع تعدل مسطح القاعدة في العلو

فرع ثالث. مساحة مثلث تعدل مسطح قاعدته في نصف علوه

القضية الرابعة والعشرون. ن

الاشكال المتوازية الاضلاع على جانبي قطر شكل متوازي الاضلاع هي متشابهة بعضها لبعض وللشكل كله



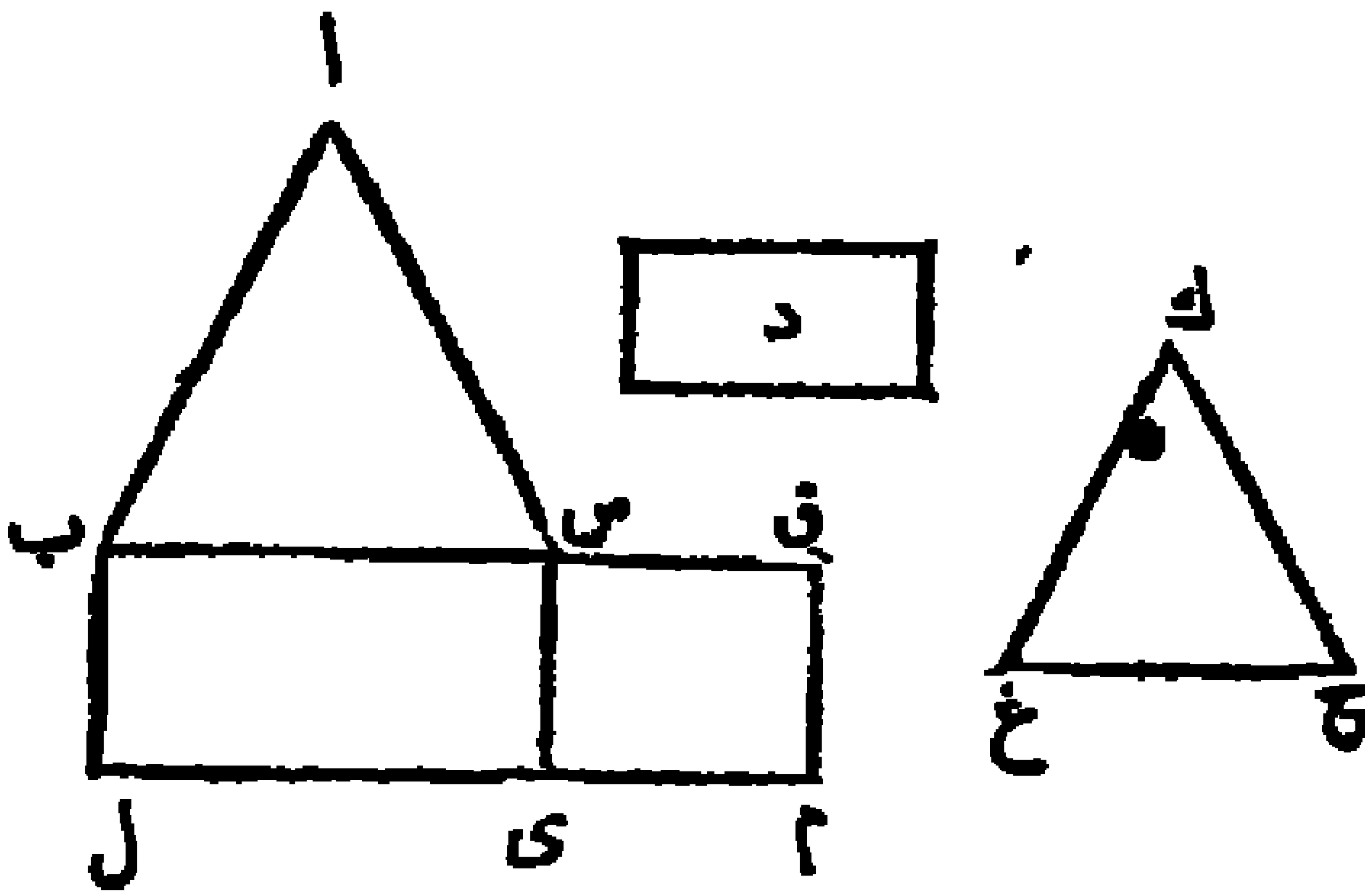
ليكن ا ب س د شكلاً متوازي الاضلاع و ا س قطره و ى غ ح ك شكلين متوازيي الاضلاع على جانبي القطر فهما متشابهان ويشبهان كل الشكل ا ب س د

لانَّ د س يوازي غ ق والزاوية ا د س تعدل الزاوية ا غ ق (ق ٢٩ ك ١) ولانَّ ب س يوازي ى ق والزاوية ا ب س تعدل الزاوية ا ى ق وكل واحدة من الزاويتين ب س د ى ق غ تعدل المقابلة د ا ب (ق ٣٤ ك ١) فهما متساويتان والشكلان ا ب س د ا ى ق غ متساويا الزوايا ولانَّ الزاوية ا ب س تعدل الزاوية ا ى ق والزاوية س ا ب مشتركة بين المثلثين ب ا س ى ا ق فهما متساويا الزوايا و ا ب : ب س :: ا ى : ى ق (ق ٤ ك ٦) ولكون الاضلاع المتقابلة من شكل متوازي الاضلاع هي متساوية (ق ٣٤ ك ١) يكون ا ب : ا د :: ا ى : ا غ (ق ٧ ك ٥) و د س : س ب :: غ ق : ق ى و س د : د ا :: ق غ : غ ا فاضلاع الشكلين ا ب س د ا ى ق غ المحيطة بالزوايا المتساوية هي متناسبة فهما متشابهان (حد ١ ك ٦) ولهذا السبب ايضاً الشكل ا ب س د يشابه الشكل ق ح س ك فكل واحد من الشكلين غ ى ك ح يشبه د ب والاشكال المستقيمة الاضلاع التي تشبه شكلاً واحداً مستقيم الاضلاع هي متشابهة بعضها لبعض (ق ٢١ ك ٦) فالشكل غ ى يشبه الشكل ك ح

القضية الخامسة والعشرون. ع

علينا ان نرسم شكلاً مستقيم الاضلاع حتى يشبه شكلاً مفروضاً مستقيم الاضلاع ويعدل شكلاً اخر مفروضاً مستقيم الاضلاع

ليكن ا ب س شكلاً مفروضًا مستقيم الاضلاع ود شكلاً اخر مفروضًا مستقيم الاضلاع. علينا ان نرسم شكلاً مستقيم الاضلاع يعدل د ويشبه ا ب س



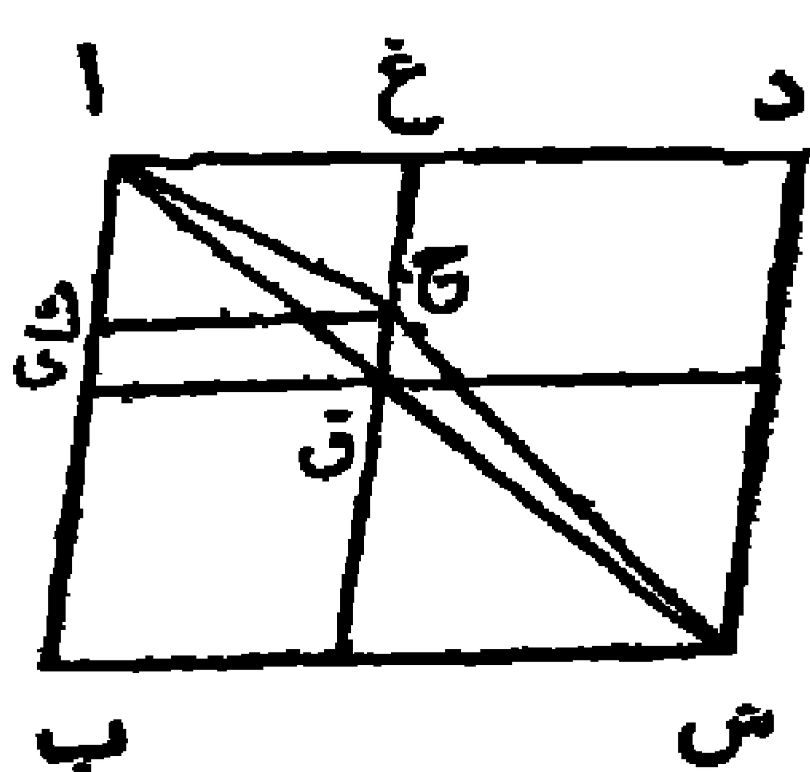
ارسم الشكل المتوازي الاضلاع ب ى على الخط المستقيم ب س حتى يعدل ا ب س (فرع ق ٤٥ ك ١) وعلى س ى ارسم شكلاً متوازي الاضلاع س م حتى يعدل د (فرع ق ٤٥ ك ١) واجعل الزاوية ق س ى منهُ تعدل الزاوية س ب ل فيكون ب س وق س على استقامة واحدة ول ى وى م كذلك (ق ٢٩ ك ١ او ق ١٤ ك ١) استعلم متناسبًا متوسطًا بين ب س وس ق مثل غ ح (ق ١٣ ك ٦) وارسم على غ ح شكلاً مستقيم الاضلاع ك غ ح حتى يشبه ا ب س شكلاً ووضعًا (ق ١٨ ك ٦)

فلكون نسبة ب س : غ ح :: غ ح : س ق فالشكل ا ب س : ك غ ح :: ب س : س ق (فرع ثانٍ ق ٢٠ ك ٦) وب س : س ق :: ب ى : س م (ق ١ ك ٦) فتكون نسبة ا ب س : ك غ ح :: ب ى : س م (ق ١١ ك ٥) والشكل ا ب س يعدل ب ى فالشكل ك غ ح يعدل س م (ق ١٤ ك ٥) والشكل س م يعدل د فالشكل ك غ ح يعدل د ايضًا وهو يشبه الشكل ا ب س وذلك ما كان علينا ان نعملهُ

القضية السادسة والعشرون . ن

شكلانِ متوازيا الاضلاع متشابهان اذا كان لهما زاوية مشتركة وتشابها وضعًا فهما على جانبَي قطرٍ واحدٍ

ليكن ا ب س د ا ى ق غ شكلين متوازيَي الاضلاع متشابهين شكلاً ووضعًا



ولتكن الزاوية د ا ب مشتركة بينهما فالشكلان على جانبَي قطرٍ واحدٍ

والاَّ فليكن ا ح س قطر الشكل ب د وا ق قطر الشكل ى غ والخط غ ق فليقطع ا ح س في النقطة ح ومن ح ارسم ح ك حتى يوازي ا د او ب س. فالشكلان ا ب س د ا ك ح غ متشابهان لانهما على جانبَي قطر واحد (ق ٢٤ ك ٦) ود ا : ا ب :: غ ا : ا ك (حد ١ ك ٦) وقد فُرِض ان ا ب س د ا ى ق غ متشابهان فتكون نسبة د ا : ا ب :: غ ا : ا ى فتكون نسبة غ ا : ا ى :: غ ا : ا ك (ق ١١ ك ٥) فاذاً ا ك = ا ى (ق ٩ ك ٥) اي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فلا يكون ا ك ح غ ا ب س د على جانبي قطر واحد فبالضرورة يكون ا ب س د ا ي ق غ على جانبي قطرٍ واحدٍ

القضية السابعة والعشرون. ن

من جميع الاشكال القائمة الزوايا التي تحيط بها اقسامُ خطٍ مستقيم فاعظمها مربع نصف الخط

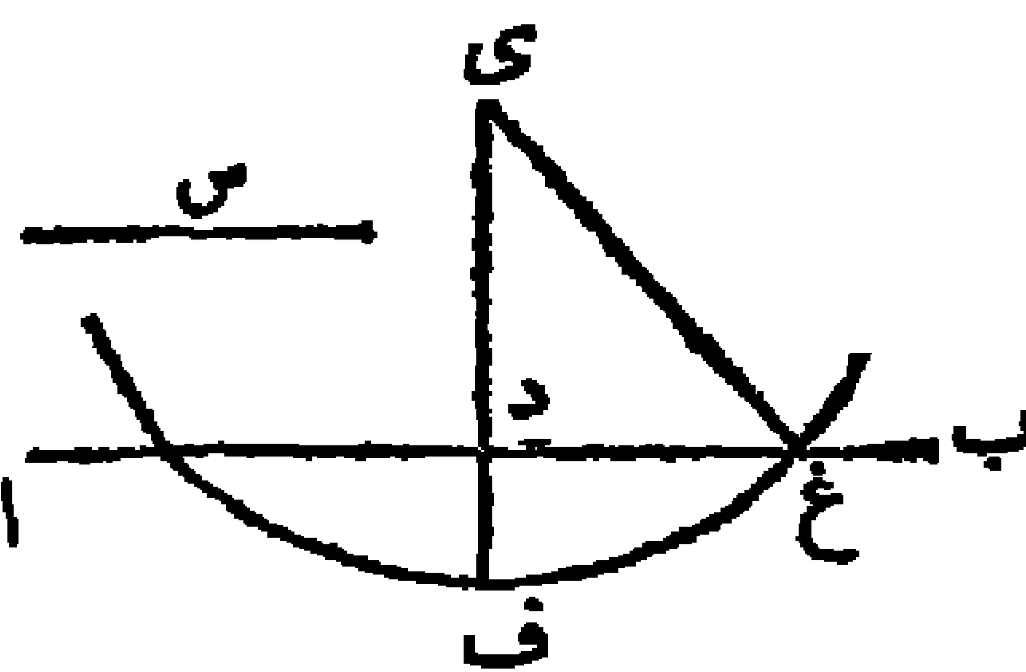
ليكن ا ب خطًّا مستقيمًا ولينصَّف في س ولتكن د اية نقطة كانت فيهِ فالمربع على ا س هو اعظم من القائم الزوايا ا د×د ب

ب د س ا

فلكون الخط المستقيم ا ب قد انقسم الى قسمين متساويين في س وغير متساويين في د فالقائم الزوايا ا د×د ب مع مربع س د يعدل مربع ا س (ق ٥ ك ٢) فاذاً مربع ا س هو اكبر من القائم الزوايا ا د×د ب

القضية الثامنة والعشرون. ع

علينا ان نقسم خطًّا مستقيمًا مفروضًا حتى يعدل القائمُ الزوايا مسطحُ قسمَيهِ مساحةً مفروضة ولاتكون تلك المساحة اعظم من مربع نصف الخط

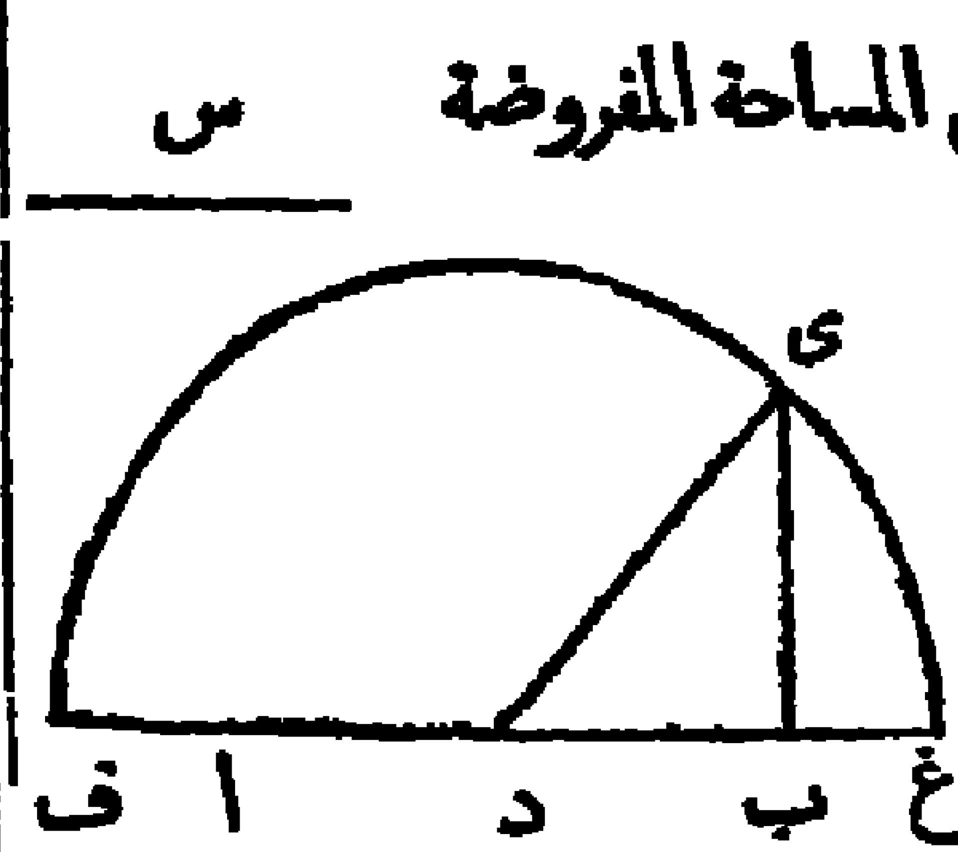


ليكن ا ب الخطّ المستقيم المفروض ومربع س المساحة المفروضة. علينا ان نقسم ا ب الى قسمين مسطحها يعدل مربع س ولا يكون اعظم من مربع نصف ا ب

نَصِّفْ ا ب في د فمربع ا د اذا عدل مربع س فهو المطلوب والاَّ فيكون ا د اعظم من س حسب المفروض. ارسم د ى عمودًا على ا ب حتى يعدل س. اخرج ى د الى ف واجعل ى ف يعدل ا د او د ب. ومن المركز ى والبعد ى ف ارسم دائرة تقطع ا ب في غ وارسم ى غ. فلكون ا ب قد انقسم الى قسمين متساويين في د وغير متساويين في غ فالقائم الزوايا ا غ × غ ب + د غ^{٢} = د ب^{٢} (ق ٥ ك ٢) = ى غ^{٢} ولكن ى د^{٢} + د غ^{٢} = ى غ^{٢} (ق ٤٧ ك ١) فاذًا ا غ × غ ب + د غ^{٢} = ى د^{٢} + د غ^{٢} اطرح د غ^{٢} فالباقي ا غ × غ ب = ى د^{٢} وى د = س فالقائم الزوايا ا غ × غ ب = س^{٢} وذلك ما كان علينا ان نعملهُ

القضية التاسعة والعشرون. ع

علينا ان نخرج خطًّا مستقيمًا مفروضًا حتى ان القائم الزوايا مسطَّح الخطّ مع ما زيد اليهِ في الجزء المزيد يعدل مساحةً مفروضة



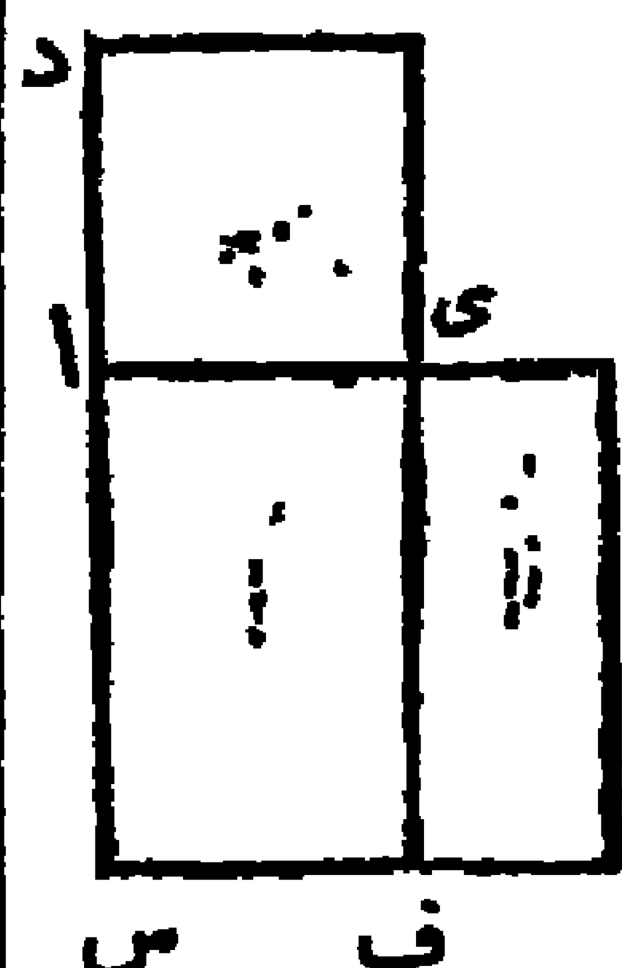
ليكن ا ب الخطّ المستقيم المفروض ومربع س المساحة المفروضة نصِّفْ ا ب في د وارسم ب ى عمودًا عليهِ واجعل ب ى يعدل س. ارسم ى د وعلى المركز د والبعد د ى ارسم دائرة تقطع ا ب بعد اخراجهِ في غ

فلكون ا ب قد تنصَّف في د وأُخرج الى غ (ق ٦ ك ٢) فالقائم الزوايا ا غ × غ ب + د ب^{٢} = د غ^{٢} = د ى^{٢}. ولكن د ى^{٢} (ق ٤٧ ك ١) = د ب^{٢} + ب ى^{٢} فالقائم الزوايا ا غ × غ ب + ب د^{٢} = ب د^{٢} + ب ى^{٢} وا غ × غ ب = ب ى^{٢} وب ى = س فاذًا ا غ × غ ب = س^{٢} وذلك ما كان علينا ان نعملهُ

القضية الثلثون. ع

علينا ان نقسم خطًّا مستقيمًا حتى يكون احد القسمين متناسبًا متوسطًا بين الخط كلهِ والقسم الاخر

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض. ارسم على ا ب مربعًا (ق٤٦ ك١) ب س واخرج س ا الى د حتى ان القائم الزوايا س د×د ا يعدل المربع س ب (ق٢٩ ك٦) اجعل ا ى يعدل ا د وتمم القائم الزوايا د ف اي د س×ا ى او د س × د ا. فلكون س د × د ا=س ب فالشكل د ف = س ب اطرح الجزء المشترك س ى فالباقي د ى = الباقي ب ف وب ف هو القائم الزوايا ف ى×ى ب او ا ب×ب ى. ود ى هو المربع على ا ى فالخط ا ى هو متناسب متوسط بين ا ب وب ى (ق١٧ ك٦) اي ا ب : ا ى :: ا ى : ب ى وا ب هو اعظم من ا ى فيكون ا ى اعظم من ى ب (ق١٤ ك ٥) فقد انقسم الخط ا ب على نسبة متوسطة (حد ٣ ك٦)

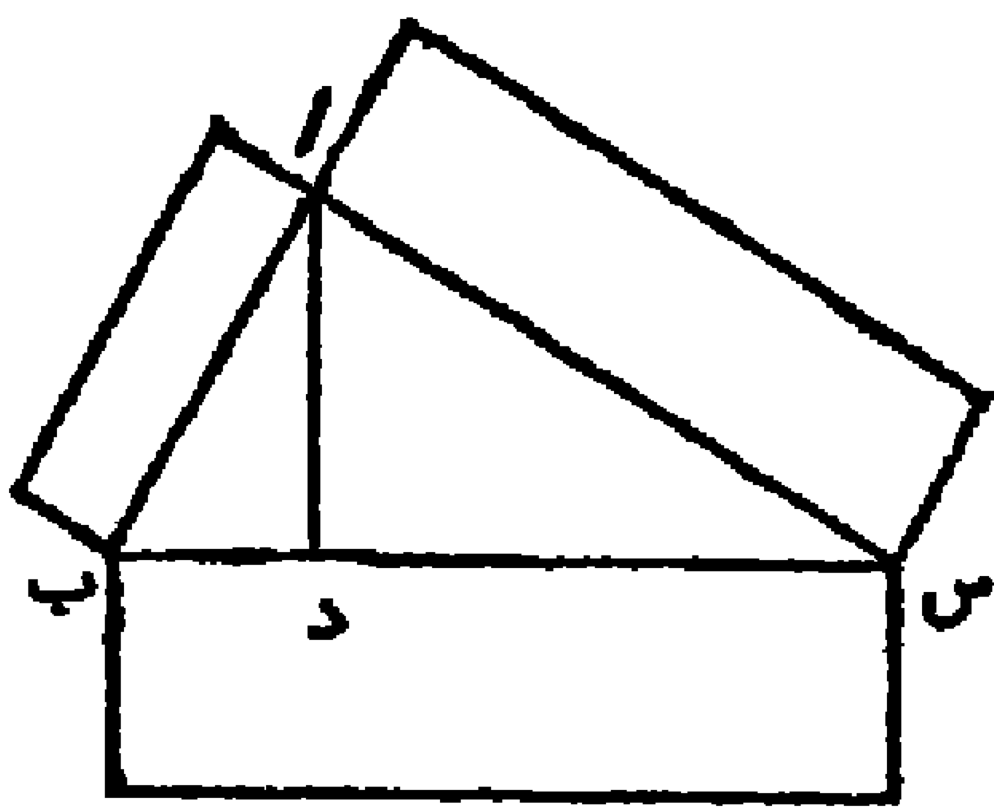


طريقة أخرى

ليكن ا ب الخط المفروض. اقسم ا ب في س حتى ان القائم الزوايا ا ب × ب س يعدل ا س^2 (ق ١١ ك٢) فلكون ا ب × ب س = ا س^2 تكون نسبة ا ب : ا س :: ا س : س ب (ق١٧ ك٦) اي ا س متناسب متوسط بين ا ب وس ب (حد ٣ ك ٦)

القضية الحادية والثلثون. ن

في كل مثلث ذي قائمة ذو الاضلاع المستقيمة المرسوم على الضلع الذي يقابل القائمة يعدل الشكلَين المتشابهَين بهِ هيئةً ووضعًا المرسومَين على الضلعَين المحيطين بالقائمة

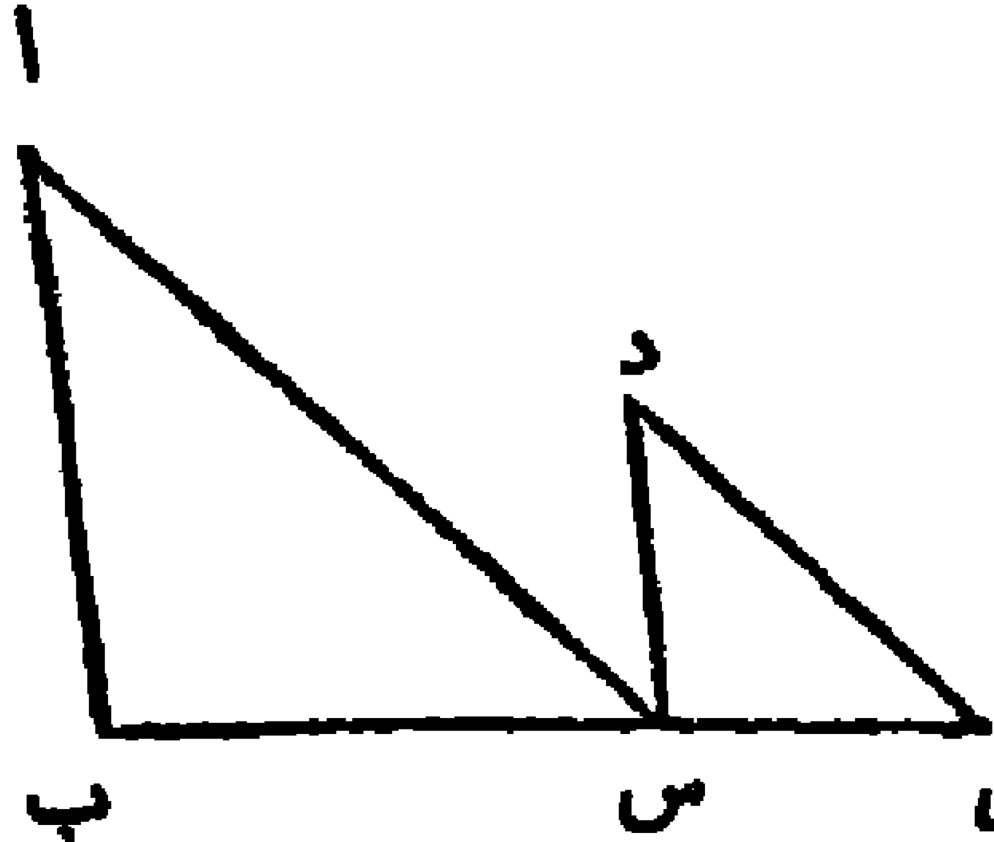


ليكن ا ب س مثلثًا ذا قائمة ب ا س فذو الاضلاع المستقيمة المرسوم على ب س يعدل الشكلين المتشابهين بهِ هيئةً ووضعًا المرسومين على ب ا وا س

ارسم العمود ا د . فلأنَّ ا د قد رُسم عمودًا من القائمة على القاعدة فالمثلثان ا د ب ا د س متشابهان ويشبهان كل المثلث ا ب س ايضًا (ق ٨ ك ٦) ونسبة س ب : ب ا :: ب ا : ب د (ق ٤ ك ٦) ولكون هذه الخطوط الثلثة المستقيمة متناسبةً تكون نسبة الاول الى الثالث كنسبة شكل على الاول الى شكل مثلهُ هيئةً ووضعًا على الثاني (فرع ثان ق ٢٠ ك ٦) فنسبة س ب : ب د :: شكل على س ب : مثله هيئةً ووضعًا على ب ا . وبالقلب (ق ب ك ٥) د ب : ب س :: الشكل على ب ا : مثله على ب س . وهكذا ايضًا د س : س ب :: الشكل على س ا : مثله على س ب . فاذًا ب د + د س : ب س :: الشكل على ب ا + الشكل على ا س : الشكل على ب س (ق ٢٤ ك ٥) فالشكلان على ب ا وا س معًا يعدلان الشكل على ب س وهي اشكالٌ متشابهة

القضية الثانية والثلثون . ن

مثلثان ضلعان من الواحد مناسبان لضلعين من الاخر اذا وُضعت زاوية من الواحد بملامسة زاوية من الاخر حتى تكون اضلعها المتشابهة متوازية يكون الضلعان الاخران على استقامة واحدة



ليكن ا ب س د س ى مثلثين والضلعان ب ا ا س فليناسبا س د د ى اي ب ا : ا س :: س د : د ى وليكن ا ب ود س متوازيين وا س ود ى متوازيين فيكون ب س وس ى على استقامة واحدة

لانَّ الخط المستقيم ا س يلاقي المتوازيين ا ب د س فالزاويتان المتبادلتان ب ا س ا س د متساويتان (ق ٢٩ ك ١) ولهذا السبب ايضًا الزاوية س د ى تعدل

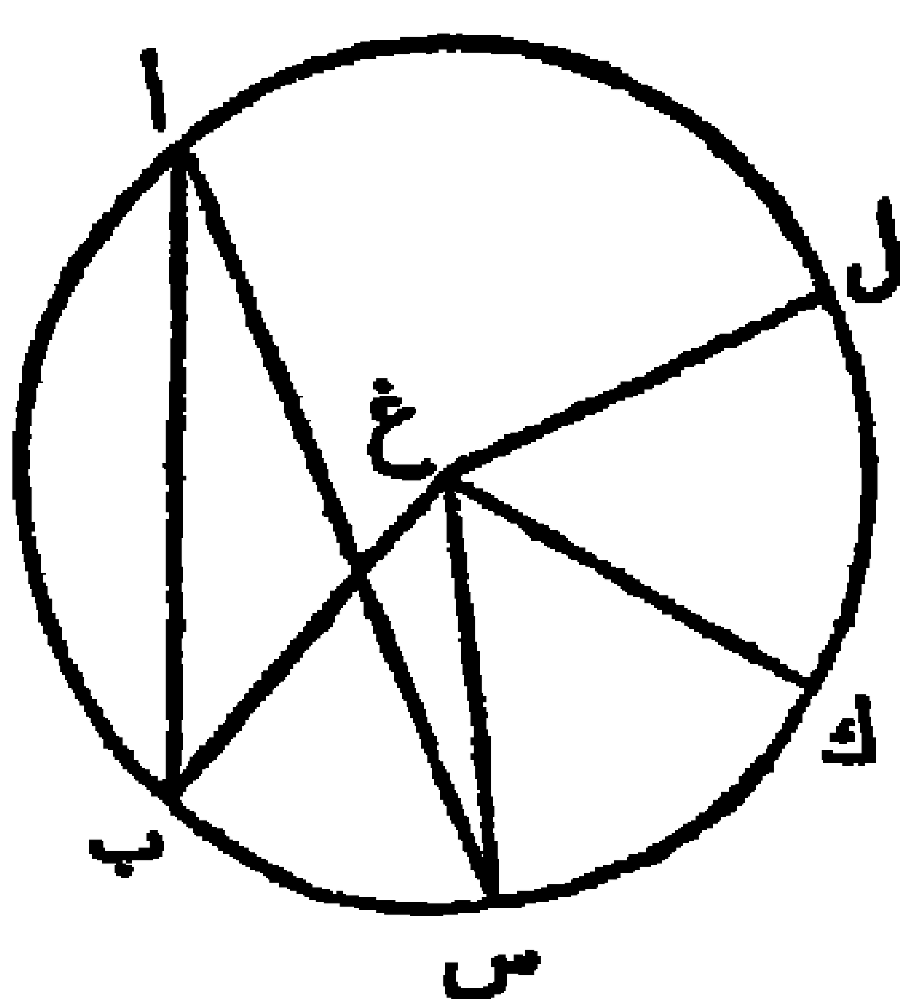
الزاوية ا س د فالزاوية ب ا س تعدل س د ى والمثلثان لهما الزاوية عند د تعدل الزاوية عند ا والاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة اي ب ا : ا س :: س د : د ى فزوايا المثلث ا ب س تعدل زوايا المثلث د س ى (ق ٦ ك ٦) فالزاوية ا ب س تعدل د س ى. وقد تبرهن ان ب ا س تعدل ا س د فالكل ا س ى يعدل الزاويتين ا ب س ب ا س. أضف الزاوية المشتركة ا س ب الى الجانبين فالزاويتان ا س ى ا س ب تعدلان ا ب س ب ا س ا س ب وهذه الثلاث تعدل قائمتين (ق ٣٢ ك ١) فاذًا ا س ى ا س ب تعدلان قائمتين فالخطان ب س س ى على استقامة واحدة (ق ١٤ ك ١)

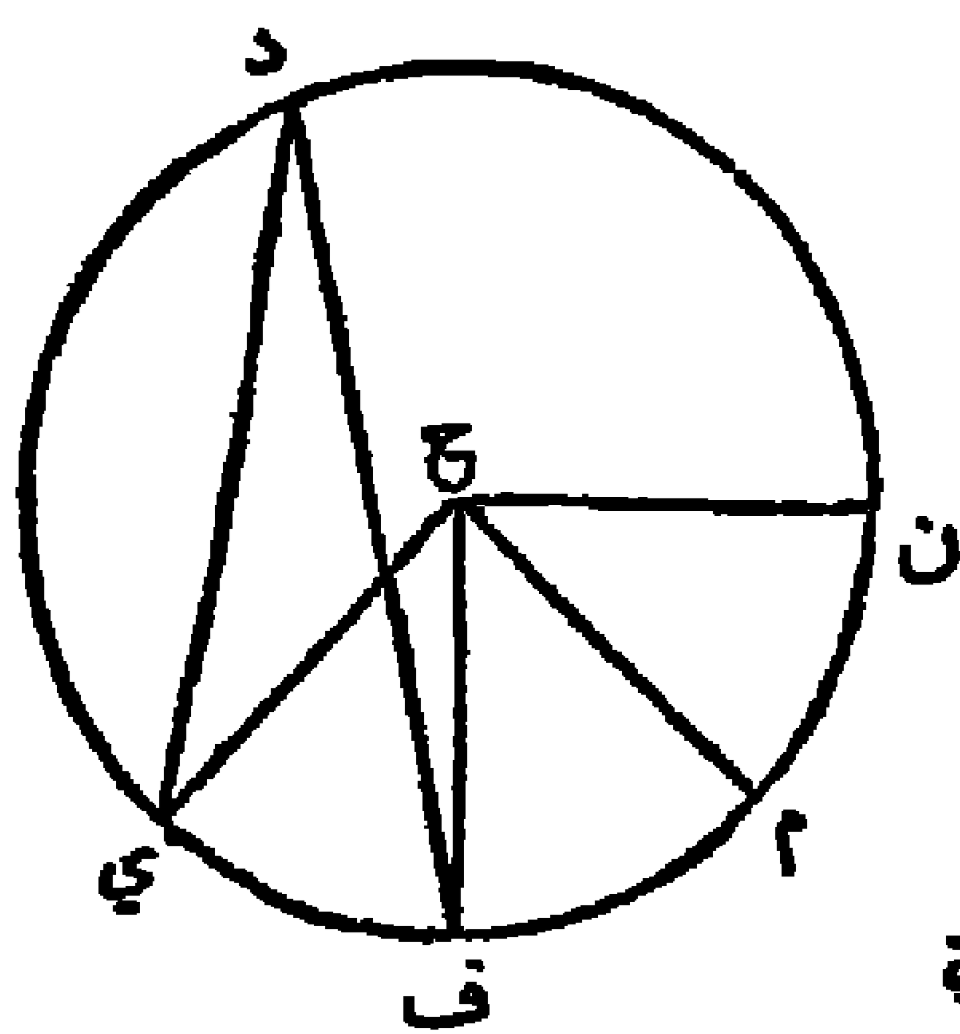
القضية الثالثة والثلثون ·ن

في دوائر متساوية نسبة الزوايا في المركز او في المحيط بعضها الى بعض كنسبة الاقواس التي تقابلها بعضها الى بعض. وهكذا القطعان ايضًا

لتكن ا ب س د ى ف دائرتين متساويتين فنسبة الزاوية في المركز ب غ س الى الزاوية في المركز ى ح ف والزاوية في المحيط ب ا س الى الزاوية في المحيط ى د ف كنسبة القوس ب س الى القوس ى ف والقطاع ب غ س : القطاع ى ح ف :: القوس ب س : القوس ى ف

في الدائرة ا ب س اقطع اقواسًا تعدل القوس ب س مثل س ك وك ل وفي الدائرة

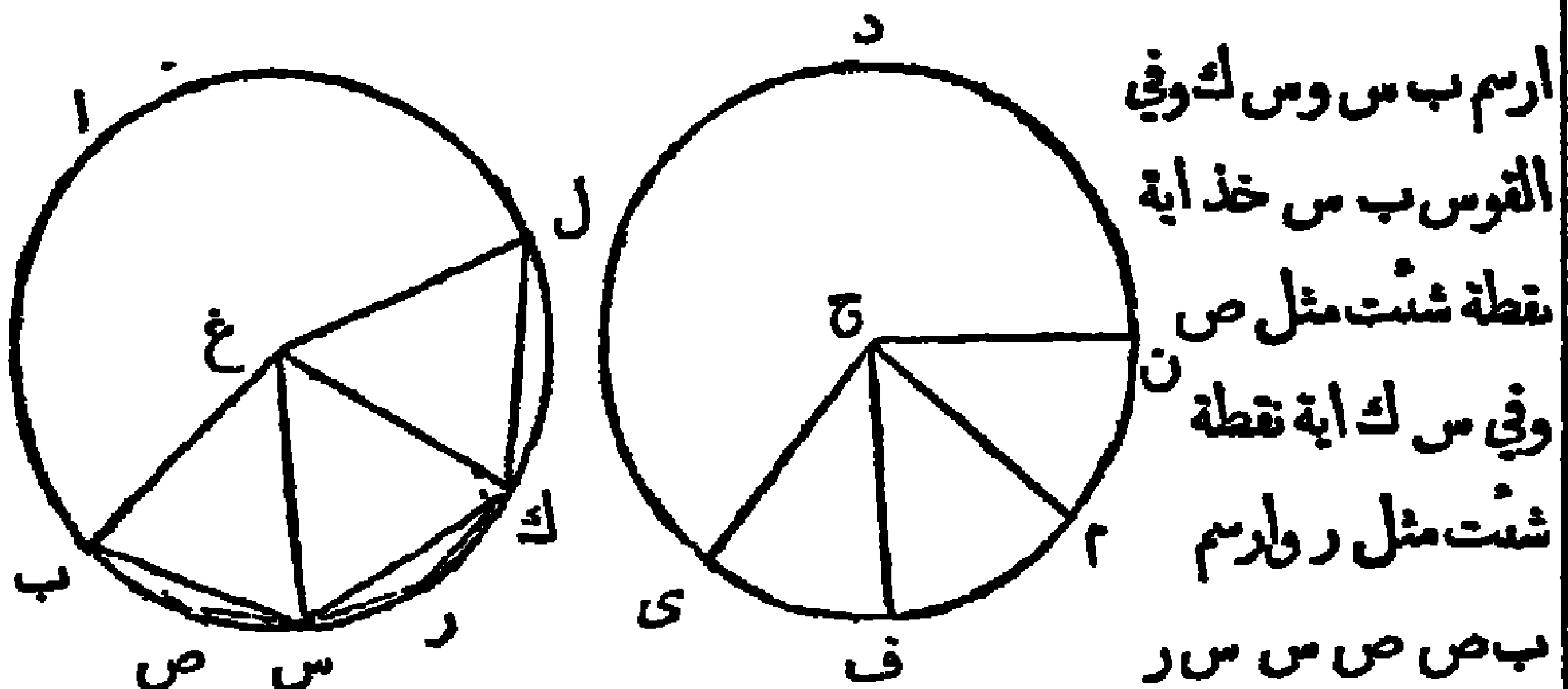




د ى ف اقطع اقواسًا تعدل القوس ى ف مثل ف م م ن. ارسم غ ك غ ل ح م ح ن. فالزوايا ب غ س س غ ك ك غ ل متساوية لان الاقواس ب س س ك ك ل متساوية (ق ٢٧ ك ٣) فاي مضروب كان القوس ب ل من القوس ب س كان ب غ ل ذات هذا المضروب من ب غ س. وعلى هذا الاسلوب يتضح ان

ىح ن ذات المضروب من ى ح ف الذي كان القوس ى ن من القوس ى ف والقوس ب ل اذا عدل القوس ى ن فالزاوية ب غ ل تعدل الزاوية ى ح ن (ق٢٧ ك٣) وان كان اعظم فاعظم وان كان اصغر فاصغر فنسبة ب س : ى ف :: ب غ س : ى ح ف (حد ٥ ك ٥) ولكن ب غ س : ى ح ف :: ب ا س : ى د ف (ق ١٥ ك ٥) لان كل واحدة مضاعف نظيرها (ق ٢٠ ك٣) فنسبة القوس ب س : القوس ى ف :: الزاوية ب غ س : الزاوية ى ح ف وكنسبة الزاوية ب ا س : الزاوية ى د ف

كذلك القطاع ب غ س : القطاع ى ح ف :: القوس ب س : القوس ى ف



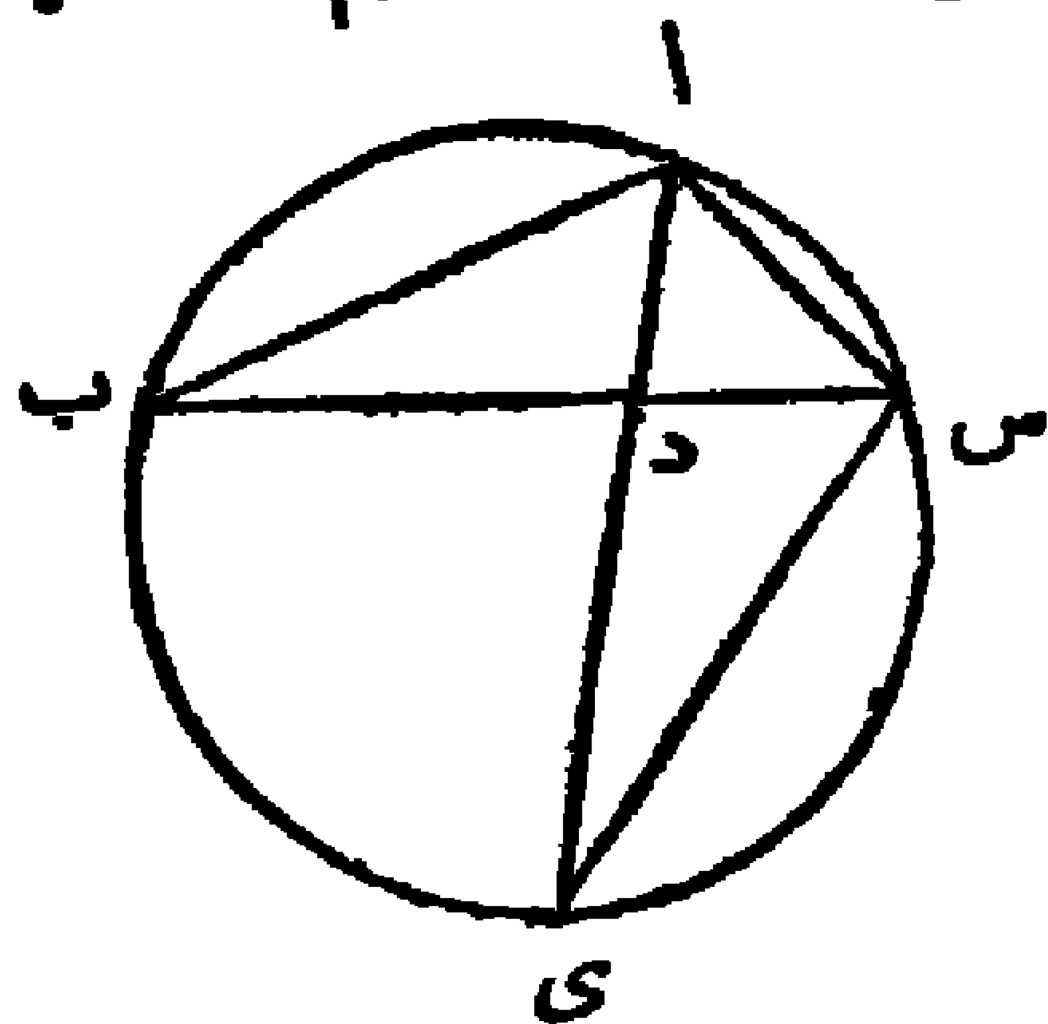
ارسم ب س وس ك وفي القوس ب س خذ اية نقطة شئت مثل ص وفي س ك اية نقطة شئت مثل ر وارسم ب ص ص س س ر ر ك. فضلعان من المثلث غ ب س اي ب غ ع س يعدلان ضلعين من المثلث غ س ك اي س غ غ ك والزاوية ب غ س = س ع ك فالقاعدة ب س = القاعدة س ك (ق٤ ك١) والمثلث ب غ س = المثلث س غ ك. ولكون القوس ب س = القوس س ك فالباقي من كل المحيط ب ا س يعدل الباقي س ا ك فالزاوية ب ص س تعدل الزاوية س ر ك (ق٧ ٢ ك٣) والقطعة ب ص س تشبه القطعة س ر ك (حد ٩ ك٣) وهما على خطين مستقيمين متساويين ب س وس ك فهما متساويان (ق٢٤ ك٣) فالقطعة ب ص س تعدل القطعة س ر ك وهكذا ايضاً يبرهن ان القطاع ك غ ل يعدل ب غ س او س غ ك. وهكذا يبرهن ايضاً ان القطعان ى ح ف ف ح م م ح ن متساوية. فاي مضروب كان القوس ب ل من القوس ب س فالقطاع ب غ ل هو ذات ذلك المضروب من القطاع ب غ س وهكذا ايضاً اي مضروب كان القوس ى ن من القوس ى ف فالقطاع ى ح ن هو ذات ذلك المضروب من القطاع ى ح ف. فالقوس ب ل اذا عدل القوس ى ن فالقطاع ب غ ل يعدل القطاع ى ح ن واذا كان اكبر

فاكبر واذا كان اصغر فاصغر فاذاً (حد ٥ ك ٥) القوس ب س : القوس ى ف :: القطاع ب غ س : ى ح ف

قضية ب ن

اذا تنصَّفت زاوية مثلثٍ بخطٍ مستقيم يقطع القاعدة ايضاً فالقائم الزوايا مسطَّح ضلعَي المثلث يعدل القائم الزوايا مسطح قسمَي القاعدة مع مربع الخط المستقيم الذي ينصّف الزاوية

ليكن ا ب س مثلثًا ولتتنصّف الزاوية ب ا س منهُ بالخط المستقيم ا د الذي يقطع القاعدة في النقطة د. فالقائم الزوايا ب ا ×ا س = ب د×د س +ا د٢



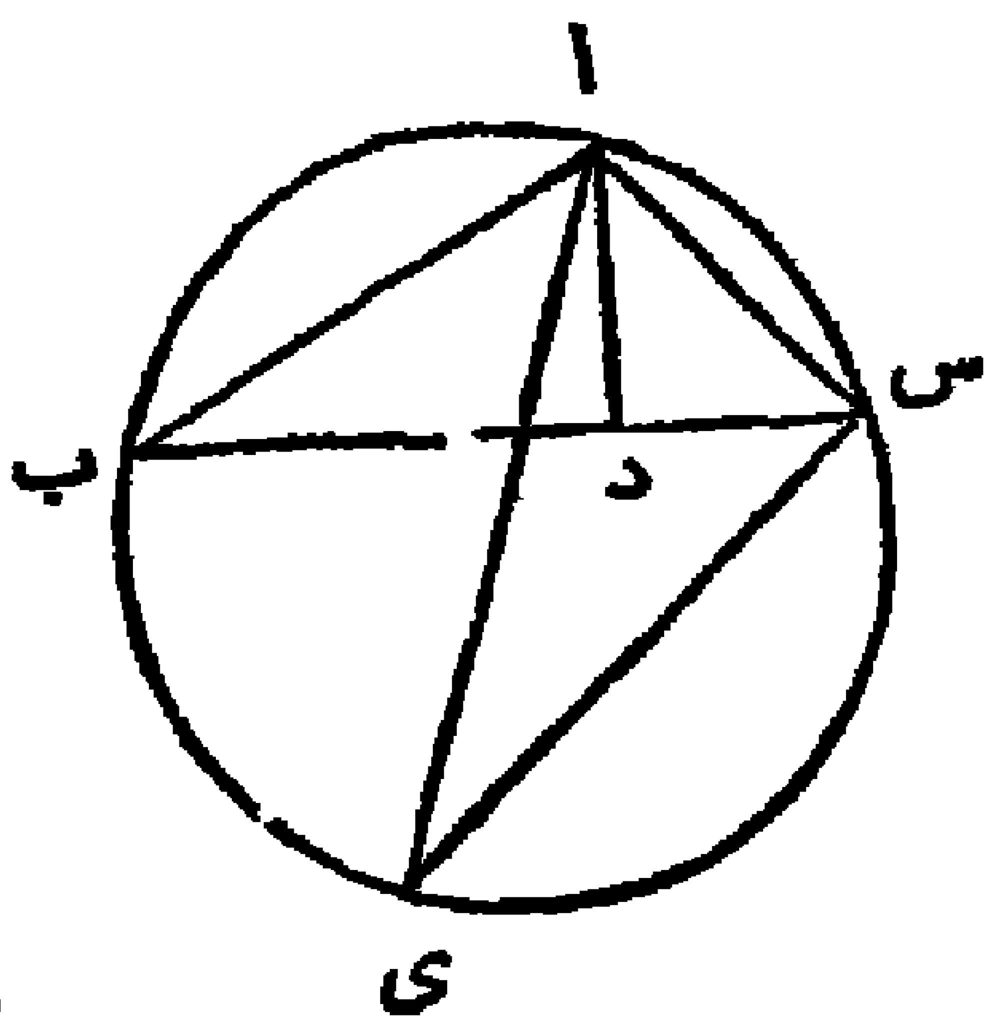
ارسم دائرة تحيط بالمثلث ا ب س (ق ٥ ك ٤) واخرج ا د حتى يلاقي المحيط في ى وارسم ى س. فلكون الزاوية ب ا د تعدل الزاوية س ا ى والزاوية ا ب د تعدل الزاوية ا ى س (ق ٢١ ك٣) لانهما في قطعة واحدة فالمثلثان ا ب د ا ى س متساويا الزوايا ونسبة ب ا : ا د :: ى ا : ا س (ق ٤ ك ٦) فاذاً ب ا ×ا س = ا د× ا ى (ق ١٦ ك ٦) = ى د×د ا +د ا٢ (ق ٣ ك ٢) وى د×د ا = ب د×د س (ق ٣٥ ك٣) فاذاً ب ا ×ا س = ب د×د س +ا د٢

قضية ج ن

اذا رُسم من زاوية مثلث خطٌّ مستقيم عمود على القاعدة فالقائم الزوايا مسطَّح ضلعَي المثلث يعدل القائم الزوايا مسطَّح العمود وقطر الدائرة المحيطة بالمثلث

ليكن ا ب س مثلثًا وليُرسَم العمود ا د على القاعدة ب س من الزاوية عند ا.

فالقائم الزوايا ب ا×ا س يعدل القائم الزوايا ا د في قطر الدائرة المحيطة بالمثلث

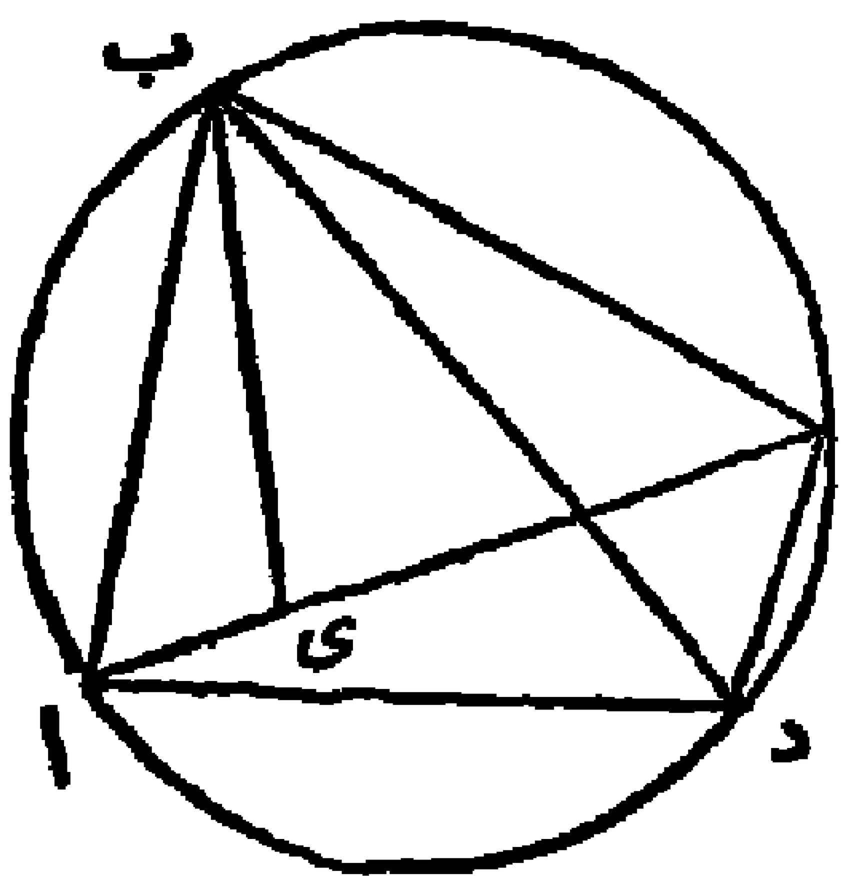


ارسم الدائرة ا س ب حتى تحيط بالمثلث ا ب س (ق٥ ك٤) وارسم قطرها ا ى ثم ارسم الخط ى س. فلكون القائمة ب د ا تعدل القائمة ى س ا الواقعة في نصف دائرة والزاوية ا ب د تعدل ا ى س لانهما في قطعة واحدة (ق٢١ ك٣) فالمثلثان ا ب د ا ى س هما متساويا الزوايا ونسبة ب ا : ا د :: ى ا : ا س (ق٤ ك٦) فاذًا ب ا×ا س=ا د×ى ا (ق١٦ ك٦)

قضيه د٠ن

القائم الزوايا مسطح قطري شكلٍ ذي اربعة اضلاع في دائرة يعدل القائمي الزوايا مسطحي ضلعيهِ المتقابلين

ليكن ا ب س د شكلاً ذا اربعة اضلاع في دائرة. فالقائم الزوايا ا س×ب د يعدل القائمي الزوايا ا ب×س د وب س×ا د



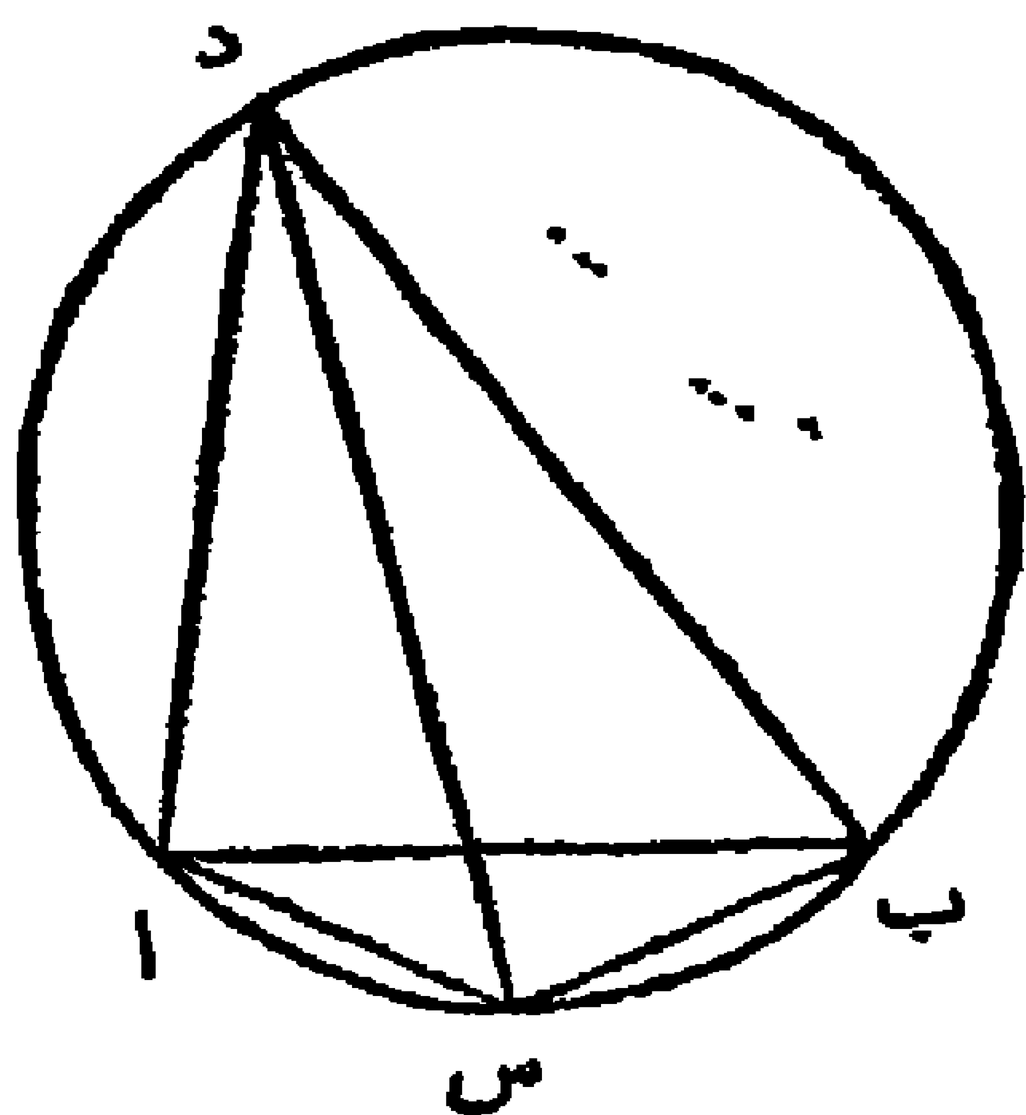
اجعل الزاوية ا ب ى تعدل الزاوية د ب س واضف الى كل واحدة منهما الزاوية المشتركة ى ب د. فالزاوية ا ب د=ى ب س. والزاوية ب د ا=ب س ى (ق٢٦ ك٣) لانهما في قطعة واحدة فزوايا المثلث ا ب د تعدل زوايا المثلث ب س ى ونسبة (ق٤ ك٦) ب س : س ى :: ب د : د ا فاذًا (ق١٦ ك٦) ب س×د ا=ب د×س ى. ولكون الزاوية ا ب ى تعدل د ب س والزاوية ب ا ى تعدل ب د س (٢١ ك٣) فزوايا المثلث ا ب ى تعدل زوايا المثلث ب س د ونسبة ب ا : ا ى :: ب د : د س فاذًا ب ا×د س=ب د×ا ى. وقد تبرهن ان ب س×د ا=ب د×س ى فاذًا ب س×د ا+ب ا×د س=

ب د×س ى+ب د×ا ى=ب د×ا س (ق ا ك٢) فالقائم الزوايا ب د× ا س=ا ب×س د+ا د×ب س

قضية ٥ ن

اذا تنصف قوس دائرة ورُسِم من طرفيهِ ومن نقطة الانتصاف خطوطٌ مستقيمة الى نقطةٍ ما من المحيط تكون نسبة مجتمع الخطَّين المرسومَين من طرفَي القوس الى الخط المرسوم من نقطة انتصافهِ كنسبة وتر القوس الى وتر نصفهِ

لتكن ا ب د دائرة وليتنصَّف القوس ا ب منها في س ولتُرسَم الخطوط المستقيمة ا د س د ب د من طرفي القوس ومن نصفهِ الى النقطة د من المحيط فنسبة مجتمع الخطَّين ا د د ب الى د س كنسبة ب ا الى ا س



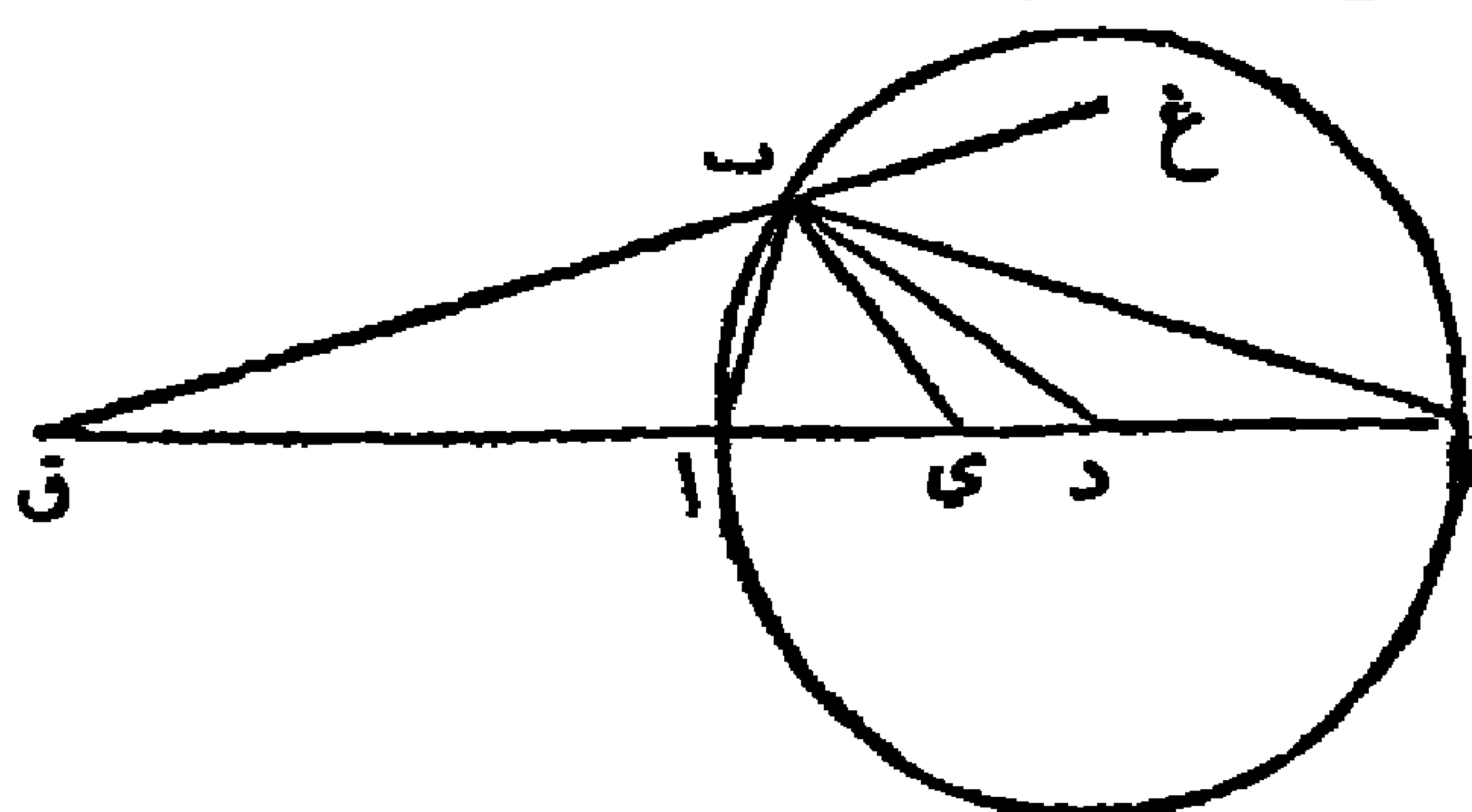
لكون ا د ب س ذا اربعة اضلاع في دائرة وقطراهُ ا ب ود س فالقائم الزوايا ا د ×س ب+د ب×ا س=ا ب×س د (ق د ك٦) ولكن ا د×س ب+د ب×ا س=ا د×ا س+د ب×ا س لانَّ ا س=س ب فاذًا ا د×ا س+د ب×ا س (ا ي) (ق ا ك٢) (ا د+د ب)× ا س=ا ب×س د. واضلاع اشكال متساوية قائمة الزوايا هي متناسبة بالتكافوء (ق ١٤ ك٦) فتكون نسبة ا د+د ب : د س :: ا ب : ا س

قضية و ن

اذا تعينت نقطتان في قطر دائرة بعد اخراجهِ حتى ان القائم الزوايا مسطح القسمين بين النقطتين ومركز الدائرة يعدل مربَّع نصف القطر

ورُسِم من هاتين النقطتين خطّان مستقيمان الى نقطةٍ ما من المحيط تكون نسبة احدهما الى الاخر كنسبة احَد قسمي القطر بين احدى النقطتين المذكورتين والمحيط الى الاخر بين النقطة الاخرى والمحيط

لتكن ا ب س دائرة مركزها د. اخرج د ا وعين فيهِ نقطتين ى وق حتى ان القائم الزوايا ى د×د ق يعدل مربَّع ا د ولْيُرسَم ى ب ق ب الى ب نقطة من المحيط



فتكون نسبة ق ب : ب ى :: ق ا : ا ى

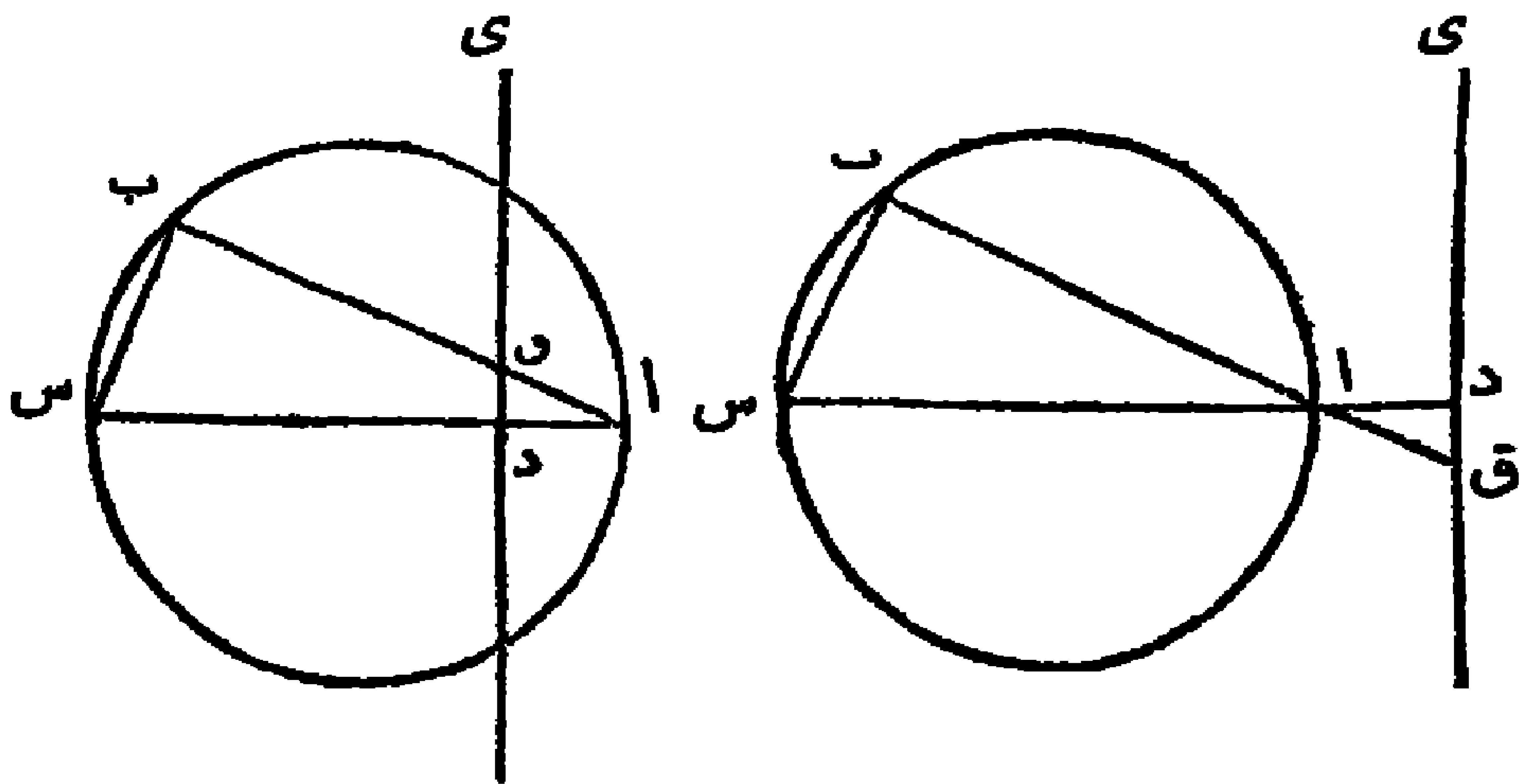
ارسم ب د. فلكون القائم الزوايا ق د×د ى يعدل مربع ا د او د ب فنسبة ق د : د ب :: د ب : د ى (ق١٧ ك٦). فالمثلثان ق د ب ب د ى اضلاعها المحيطة با الزاوية المشتركة د هي متناسبة وهما اذًا متساويا الزوايا (ق٦ ك٦) والزاوية د ى ب تعدل د ب ق ود ب ى تعدل د ق ب. ولكون الاضلاع المحيطة بهذه الزوايا المتساوية متناسبة (ق٤ ك٦) فنسبة ق ب : ب د :: ب ى : ى د وبالمبادلة (ق١٦ ك٥) ق ب : ب ى :: ب د : ى د او ق ب : ب ى :: ا د : د ى ولانَّ ق د : د ا :: د ا : د ى فبالقسمة (ق١٧ ك٥) ق ا : د ا :: ا ى : ى د وبالمبادلة (ق١١ ك٥) ق ا : ا ى :: د ا : ى د. وقد تبرهن ان ق ب : ب ى :: ا د : د ى فتكون نسبة ق ب : ب ى :: ق ا : ا ى

فرع. اذا رُسِم ا ب فلكون ق ب : ب ى :: ق ا : ا ى تكون الزاوية ق ب ى قد تنصفت بالخط ا ب (ق٣ ك٦). ولانَّ ق د : د س :: د س : د ى وبالتركيب (ق١٨ ك٥) ق س : د س :: س ى : ى د وقد تبرهن ان ق ا : ا د او د س :: ا ى : ى د فبالمساواة ق ا : ا ى :: ق س : س ى. ولكن ق ب : ب ى :: ق ا : ا ى فاذًا ق ب : ب ى :: ق س : س ى (ق١١ ك٥) فاذا أُخرِج ق ب الى غ ورُسِم ب س فالزاوية ى ب غ تتنصف بالخط ب س (ق١ ك٦)

قضية ز.ن

اذا رُسِم من طرف قطر دائرة خطٌّ مستقيمٌ في الدائرة واذا لاقى خطًّا عمودًا على القطر داخل الدائرة او خارجها بعد اخراجه فالقائم الزوايا مسطَّح الخط المستقيم في الدائرة والقسم منه الواقع بين طرف القطر والخط العمودي على القطر يعدل القائم الزوايا مسطَّح القطر والقسم منهُ المقطوع بالعمود عليهِ .

لتكن ا ب س دائرة قطرها ا س ولتكن د ى عمودًا على القطر ا س وليلاقِهِ



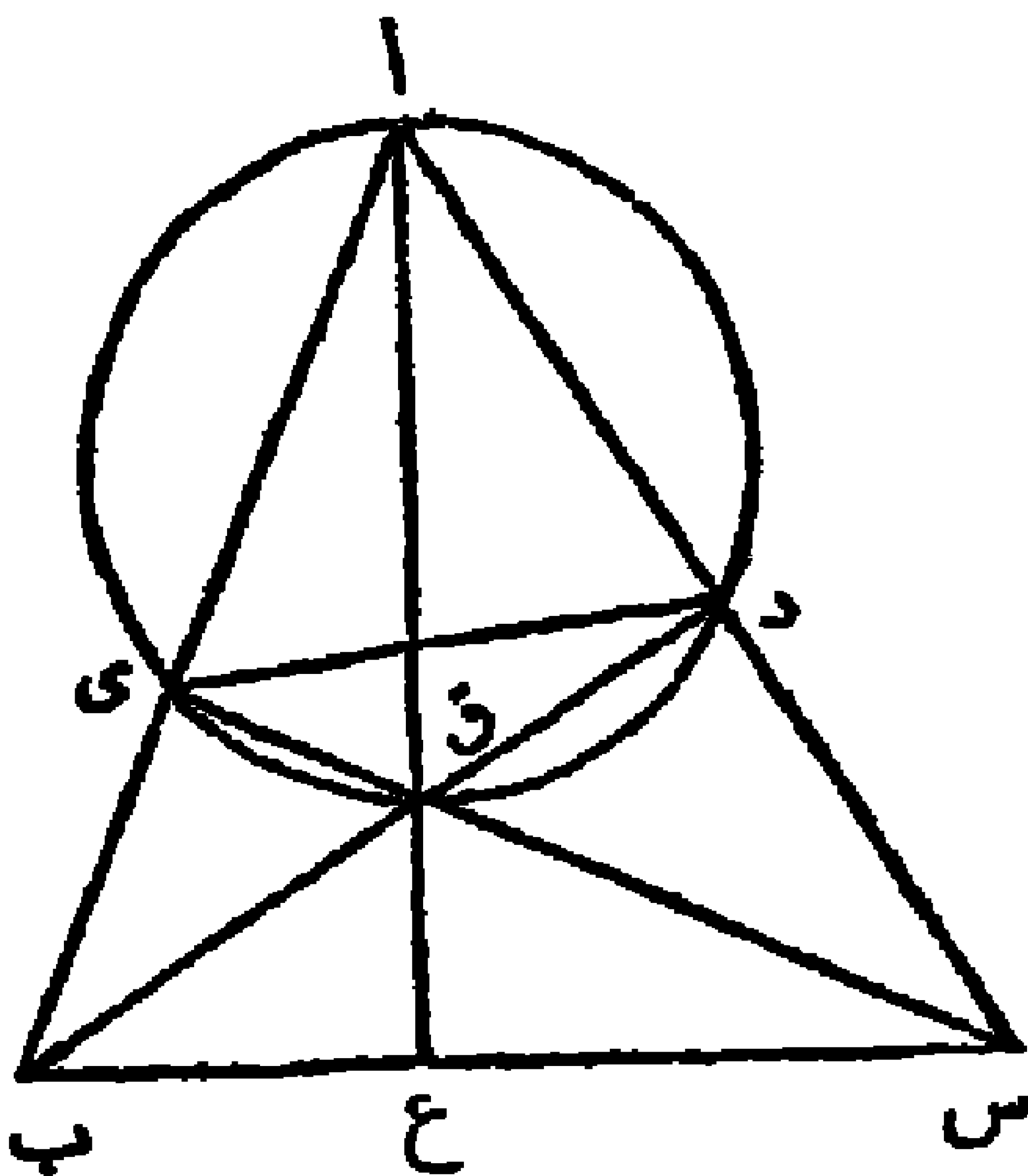
ا ب في ق فالقائم الزوايا ب ا × ا ق = س ا × ا د

ارسم ب س . فالزاوية ا ب س قائمة لانها في نصف دائرة (ق ٢١ ك ٣) وا د ق ايضًا قائمة حسب المفروض والزاوية ب ا س هي ذات الزاوية د ا ق او مقابلة لها فالمثلثان ا ب س ا د ق متساويا الزوايا ونسبة ب ا : ا س :: ا د : ا ق (ق ٤ ك ٦) فالقائم الزوايا ب ا × ا ق = ا س × ا د (ق ١٦ ك ٦)

قضية ح.ن

العموديات من زوايا مثلث الى الاضلاع المقابلة تتقاطع في نقطة واحدة

ليكن ا ب س مثلثًا وب د وس ى عمودين يتقاطعان في ق



ارسم ا ق ولْيُخرَج حتى يلاقي ب س في غ. فالخط ا غ عمودٌ على ب س. ارسم د ى ولْرسم الدائرة ا ى ق تحيط بالمثلث ا ى ق. فلكون ا ى ق قائمة فالخط ا ق قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ا ى ق (ق ٣١ ك ٣) وا ق ايضاً قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ا د ق فالنقط ا ى ق د في محيط دائرة واحدة.

ولكون الزاوية ى ق ب تعدل الزاوية د ق س (ق ١٥ ك ١) والزاوية ب ى ق تعدل س د ق لانها قائمتان فالمثلثان ب ى ق س د ق متساويا الزوايا ونسبة ب ق : ى ق :: س ق : د ق (٤ ك ٦) وبالمبادلة ب ق : س ق :: ى ق : د ق (ق ١٦ ك ٥) فلكون الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين ب ق س ى ق د متناسبة فالمثلثان ب ق س ى ق د متساويا الزوايا (ق ٦ ك ٦) فالزاوية ق س ب تعدل ى د ق. ولكن ى د ق تعدل ى ا ق لانها في قطعة واحدة (ق ٢١ ك ٣) فالزاوية ى ا ق تعدل الزاوية ق س غ والزاويتان ا ق ى س ق غ متساويتان ايضاً لانهما متقابلتان (ق ١٥ ك ١) فالباقيتان ا ى ق ق غ س متساويتان ايضاً (فرع ٤ ق ٣٢ ك ١) ولكن ا ى ق قائمة فتكون ق غ س ايضاً قائمة وا غ عمود على ب س

فرع. المثلث ا د ى يشبه المثلث ا ب س. لانّ المثلثين ب ا د س ا ى لهما الزاويتان عند د وى قائمتان والزاوية عند ا مشتركة بينهما فنسبة ب ا : ا د :: س ا : ا ى وبالمبادلة ب ا : س ا :: ا د : ا ى. فالمثلثان ب ا س د ا ى لهما الزاوية عند ا مشتركة بينهما والاضلاع المحيطة بها متناسبة فهما متساويا الزوايا ومتشابهان (ق ٦ ك ٦)

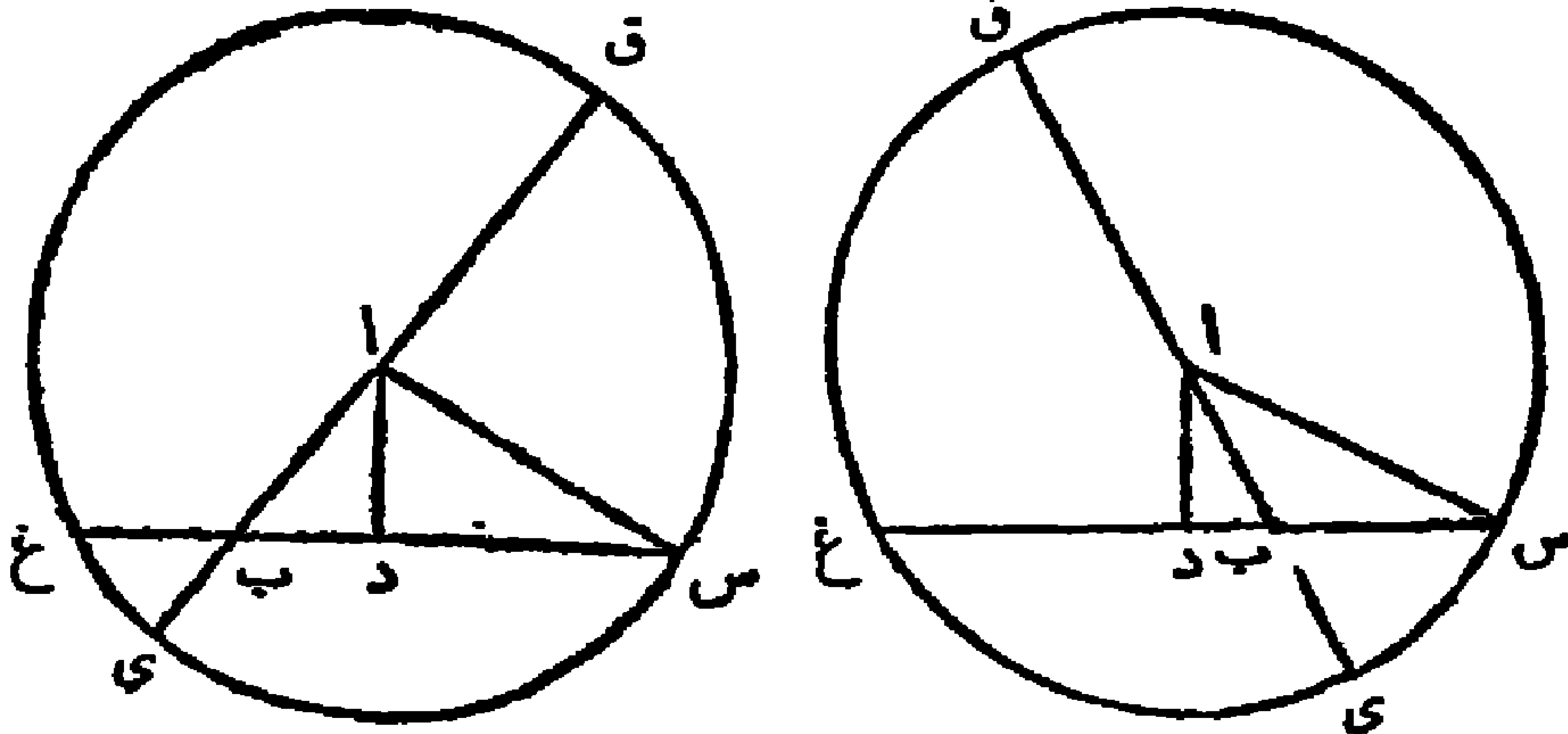
القائم الزوايا ب ا × ا ى = س ا × ا د

قضية ط . ن

اذا رُسِم من زاوية مثلثٍ عمودٌ على القاعدة فالقائم الزوايا مسطَّح مجتمع

الضلعين الاخرين في فضلتهما يعدل القائم الزوايا مسطَّح مجتمع قسمي القاعدة في فضلتهما

ليكن ا ب س مثلثًا ومن الزاوية ب ا س ليُرسَم ا د عمودًا على القاعدة ب س



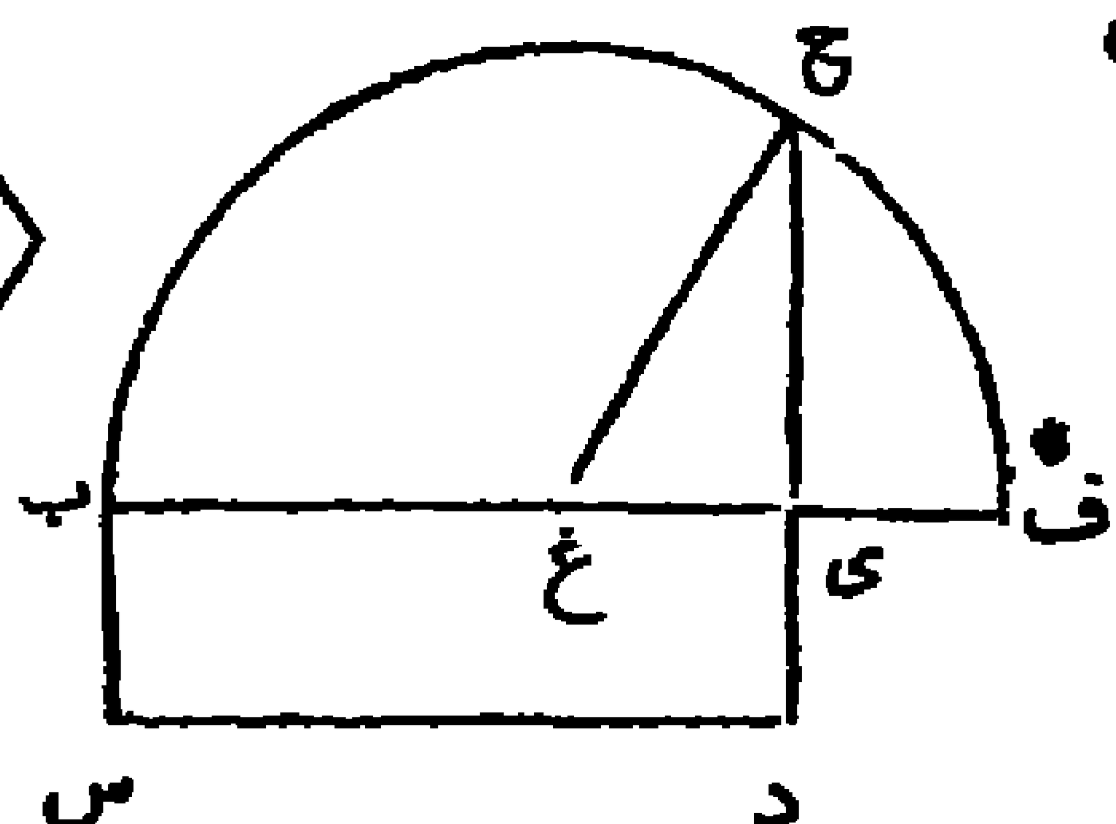
فالقائم الزوايا (ا س + ا ب) × (ا س − ا ب) = (س د + د ب) × (س د − د ب) اجعل ا مركزًا وا س اطول الضلعين نصف قطرٍ وارسم الدائرة س ق غ واخرج ب ا حتى يلاقي المحيط في ق وى. واخرج س ب حتى يلاقي المحيط في غ. فلانّ ا ق = ا س فالخط ب ق = ا ب + ا س مجتمع الضلعين ولان ا ى = ا س فالخط ب ى = ا س − ا ب فضلة الضلعين. ولكون ا د عمودًا من المركز على غ س فهو ينصّفهُ ايضًا فاذا وقع العمود داخل المثلث فالخط ب غ = د غ − د ب = د س − د ب = فضلة قسمي القاعدة وب س = ب د + د س = مجتمع قسمَي القاعدة واذا وقع ا د خارج المثلث فالخط ب غ = د غ + د ب = س د + د ب = مجتمع القسمين وب س = س د − ب د = فضلتهما. وعلى الحالتين لانّ الخطَّين ق ى غ س يتقاطعان في ب فالقائم الزوايا ق ب × ب ى = س ب × ب غ او حسبما تقدَّم (ا س + ا ب) × (ا س − ا ب) = (س د + د ب) × (س د − د ب)

عمليّات ملحقات بالكتاب السادس

قضية ي.ع

علينا ان نرسم مربعًا يعدل شكلاً مفروضًا ذا اضلاع مستقيمة

ليكن ا الشكل المفروض ذا الاضلاع المستقيمة . علينا ان نرسم مربعًا يعدل ا



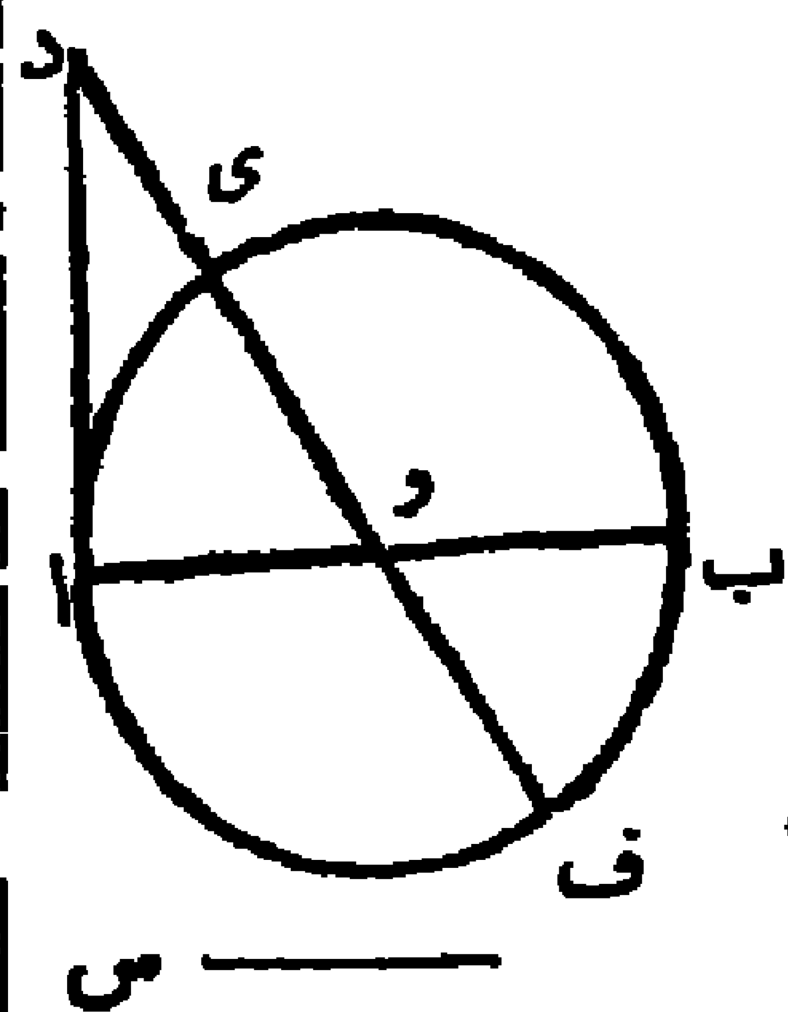
ارسم القائم الزوايا ب س د ى حتى يعدل ا (ق ٤٥ ك ١) واخرج احد اضلاعهِ ب ى واجعل ى ف يعدل ى د نصّف ب ف في غ واجعل غ مركزًا وغ ف او غ ب نصف قطرٍ وارسم نصف الدائرة ف ح ب واخرج د ى الى ح

ح ى^2 = ب ى × ى ف (ق ١٣ ك ٦) = ب د = ا فالمربع على ح ى يعدل ا

قضية ك.ع

علينا ان نرسم شكلًا قائم الزوايا يعدل مربعًا مفروضًا وفضلة ضلعيهِ المتواليين تعدل خطًّا مفروضًا

ليكن س ضلعًا من المربع المفروض وا ب فضلة ضلعي الشكل المطلوب



ارسم على ا ب دائرة ومن طرف القطر ارسم الماس ا د حتى يعدل ضلعًا من مربع س وفي النقطة د والمركز ارسم القاطع د ف فيكون ف د × د ى الشكل المطلوب

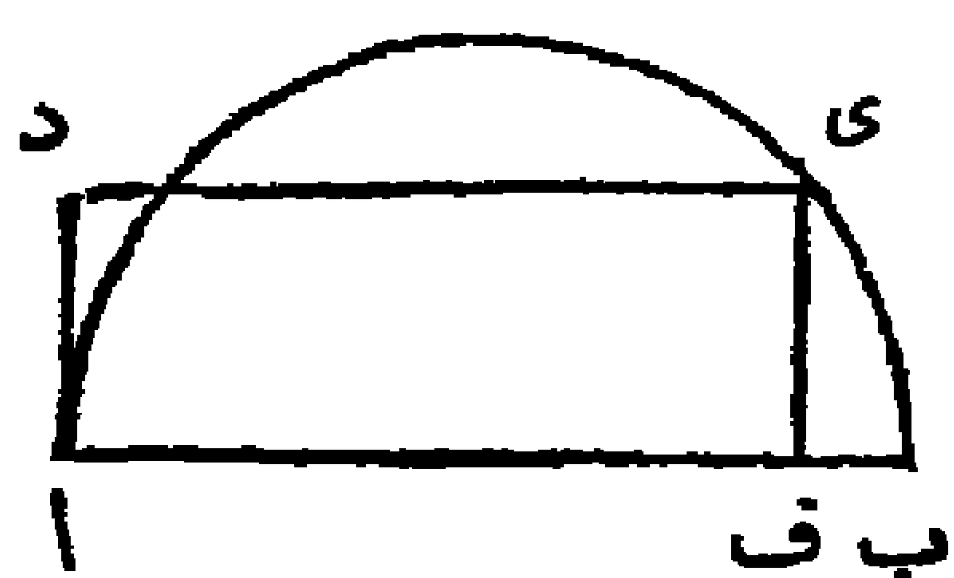
اولًا فضلة ضلعيهِ يعدل ى ف او ا ب

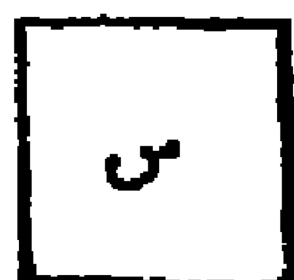
وثانيًا د ى × د ف = د ا^2 (ق ٣٦ ك ٣) ود ا = س

قضية ل.ع

علينا ان نرسم شكلًا قائم الزوايا حتى يعدل مربعًا مفروضًا ومجتمع ضلعيهِ المتواليين يعدل خطًّا مفروضًا

ليكن س المربّع المفروض وا ب مجتمع ضلعَي الشكل المطلوب





اجعل ا ب قطرًا وارسم عليهِ نصف دائرة وارسم د ى حتى يوازي ا ب واجعل ا د (اي ضلعًا من المربع المفروض) البعد بينهما والخطّ د ى فليقطع نصف الدائرةَ في ى ومن ى ارسم ى ف عمودًا على ا ب فيكون ا ف×ف ب الشكل المطلوب

لانَّ مجتمعهما يعدل ا ب ومسطَّحهما ا ف×ف ب يعدل مربَّع ف ى او ا د وا د^{٢}=س

تعليقة . حتى تكون هذه القضية ممكنة لا يكون ا د اطول من نصف القطر . اي ضلع من س لا يكون اطول من نصف الخطّ ا ب

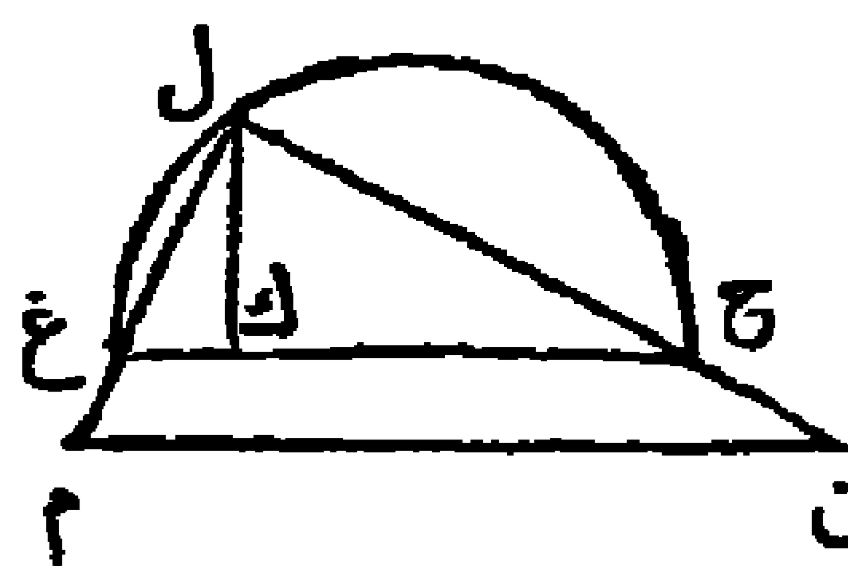


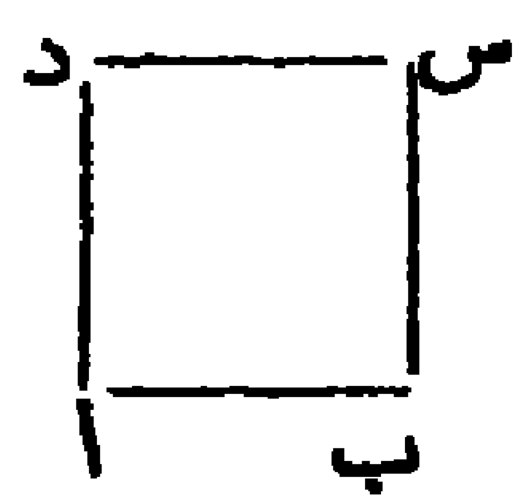
قضية م . ع

علينا ان نرسم مربَّعًا تكون نسبته الى مربع مفروض كنسبة خطٍّ مفروض الى خطٍّ اخر مفروض

ليكن ا س المربع المفروض وى وف الخطين المفروضين

ليكن غ ح خطًّا مستقيمًا غير معيَّن طولهُ وافصل منهُ غ ك حتى يعدل ى وك ح حتى يعدل ف وعلى غ ح ارسم نصف دائرة وارسم ك ل عمودًا على غ ح . وارسم ل غ م حتى يعدل ا ب ارسم م ن حتى يوازي غ ح واخرج ل ح الى ن . فلكون م ن يوازي غ ح فنسبة ل م : ل ن :: ل غ : ل ح ول م^{٢} : ل ن^{٢} :: ل غ^{٢} : ل ح^{٢} (ق ٢٢ ك ٦) ول غ ح مثلث قائم الزاوية فنسبة ل غ^{٢} : ل ح^{٢} :: غ ك : ك ح فاذًا ل م^{٢} : ل ن^{٢} :: غ ك : ك ح وقد فُرِض ان غ ك = ى وك ح = ق ول م = ا ب فالمربع على ا ب : المربع على ل ن :: ى : ف







قضية ن.ع

علينا ان نقسم مثلثًا الى قسمين بخطٍّ من احدى زواياهُ حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خط مثل م الى خط مثل ن

اقسم ب س الى قسمين ب د ود س مناسبين للخطين م ون وارسم ا د فينقسم المثلث حسب المفروض لان المثلثات التي لها علو واحد بعضها الى بعض كقواعدها بعضها الى بعض فلما



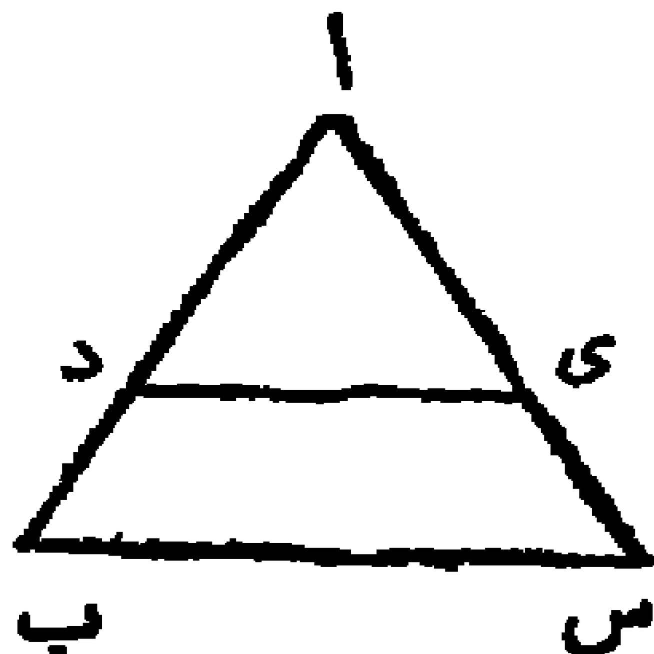
ا ب د : ا د س :: ب د : د س :: م : ن

تعليقة . يمكن انقسام مثلث الى اجزاء كثيرة مناسبة لخطوط مفروضة وذلك بانقسام القاعدة على التناسب المفروض

قضية س.ع

علينا ان نقسم مثلثًا الى قسمين بخطٍ يوازي احد اضلاعهِ حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خط مستقيم م الى خط مستقيم ن

اجعل ا ب^2 : ا د^2 :: م+ن : ن . ارسم د ى حتى يوازي ب س فقد انقسم المثلث حسب المفروض

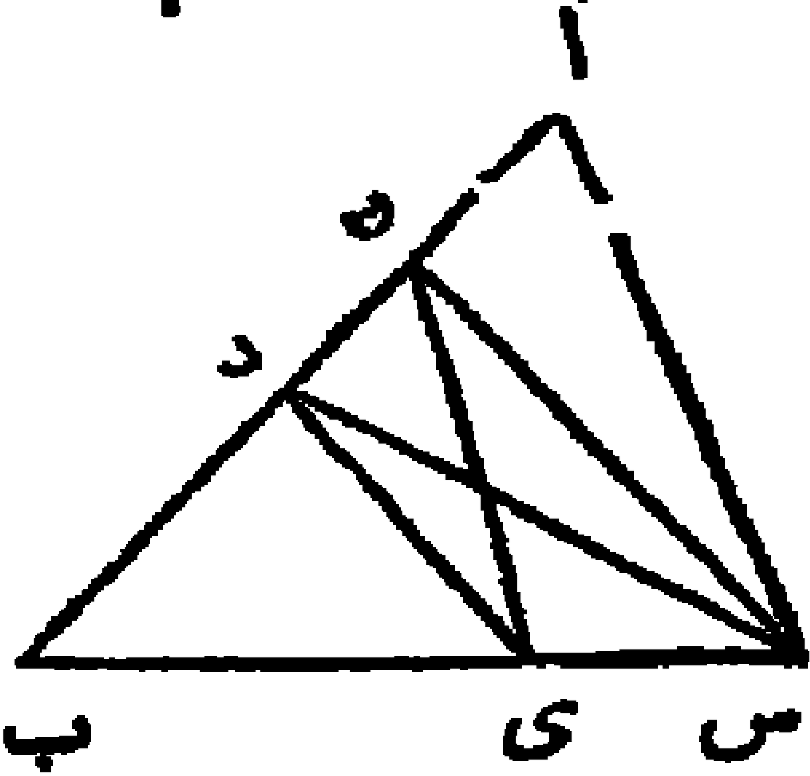


لانَّ المثلثين ا ب س ا د ى متشابهان وا ب س : ا د ى :: ا ب^2 : ا د^2 ولكن م+ن : ن :: ا ب^2 : ا د^2 فيكون ا ب س : ا د ى :: م+ن : ن فاذًا ب د ى س : ا د ى :: م : ن

قضية ع.ع

علينا ان نقسم مثلثًا مفروضًا الى قسمين بخطٍ مستقيم من نقطة مفروضة في احد اضلاعهِ حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خط مستقيم م الى خط مستقيم ن

ليكن ا ب س المثلث المفروض ون النقطة المفروضة. ارسم ن س واقسم ا ب في د حتى يكون ا د : د ب :: م : ن. وارسم د ى حتى يوازي ن س وارسم ن ى فالخط ن ى يقسم المثلث حسب المفروض



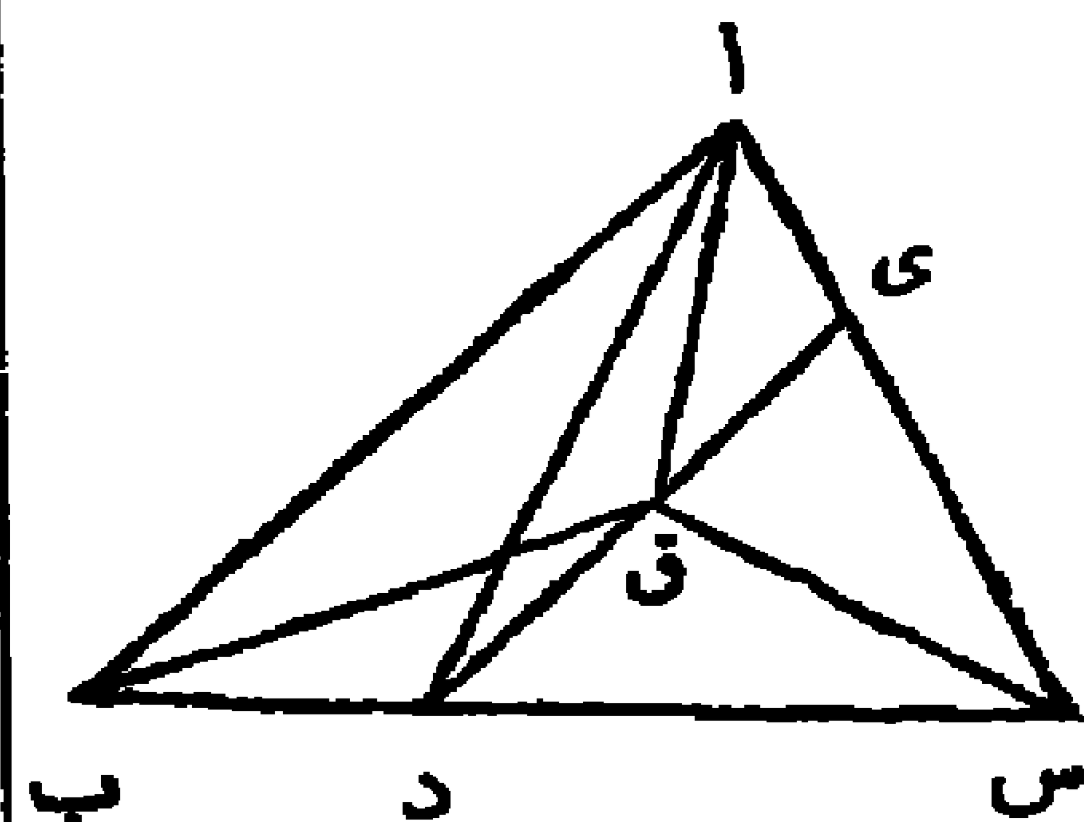
ارسم د س. فلأنَّ د ى ن س متوازيان فالمثلثان ن د ى س د ى متساويان. اضف الى كل واحد منهما المثلث د ى ب فالمثلث ن ى ب = د س ب. فاذا طرح كل واحد من المثلث ا ب س يبقى الشكل ذو الاضلاع الاربعة ا س ى ن وهو يعدل المثلث ا س د وا س د : د س ب :: ا د : د ب :: م : ن فيكون ا س ى ن : ن ى ب :: م : ن

تعليقة. على هذا الاسلوب ينقسم مثلث الى اجزاءٍ كثيرة متساوية بخطوط من نقطة مفروضة في احد اضلاعهِ. لانهُ اذا انقسم ا ب الى اجزاءٍ متساوية ورُسِم من نقط الانقسام خطوط توازي ن س فانها تقطع ب س وا س ومن هذه نقط التقاطع اذا رُسِمت خطوط الى ن تقسم المثلث الى الاقسام المطلوبة

قضية ف٠ع

علينا ان تقسم مثلثًا الى ثلاثة اقسام متساوية بخطوط مستقيمة من زواياهُ الى نقطة واحدة داخلهُ

اجعل ب د ثُلثَ ب س وارسم د ى حتى يوازي ب ا الضلع الذي يلي ب د. نصّف د ى في ق ومن ق ارسم الخطوط المستقيمة ق ا ق ب ق س فقد انقسم المثلث حسب المفروض



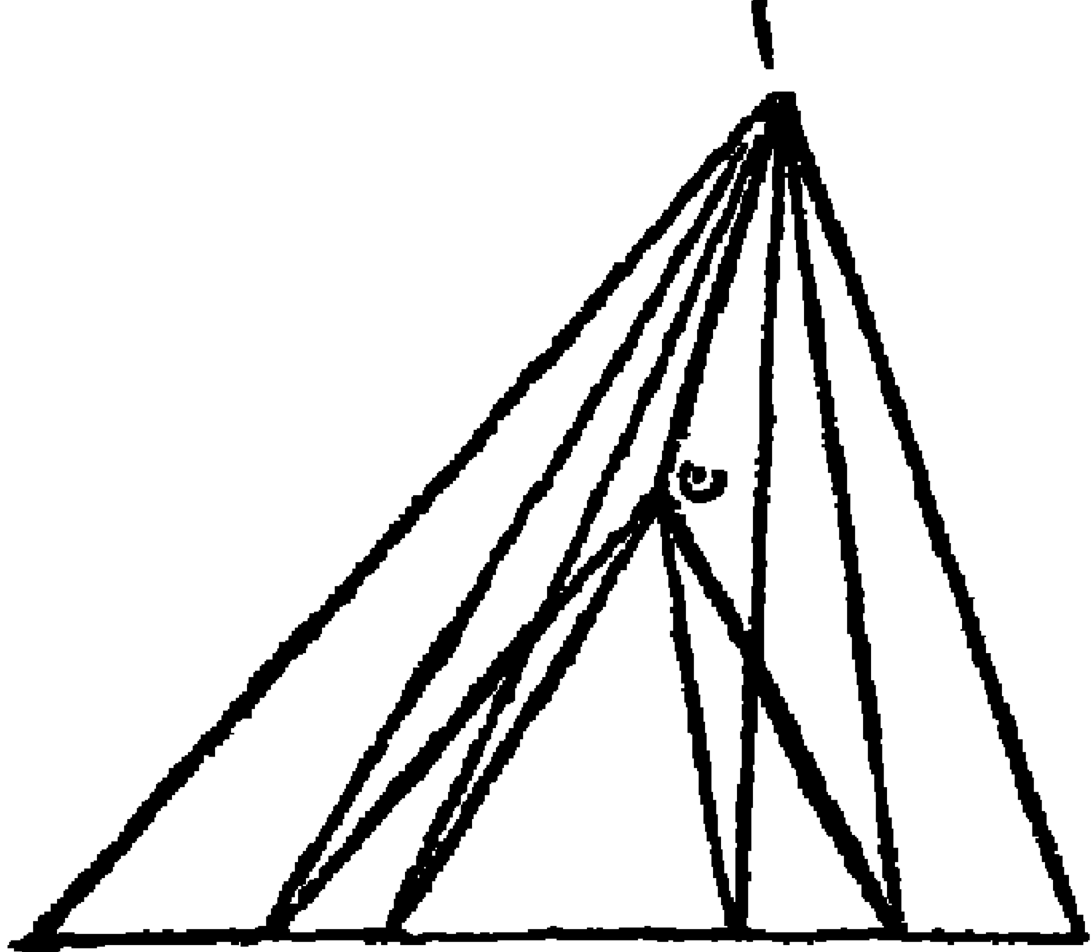
ارسم د ا. فلكون ب د ثُلث ب س فالمثلث ا ب د هو ثُلث المثلث ا ب س. وا ب د = ا ب ق (ق٣٧ ك١) فاذًا ا ب ق هو ثُلث ا ب س. ولانَّ د ق = ق ى فالمثلث ب د ق = ا ق ى وكذلك س د ق = س ق ى فالكل ب ق س يعدل الكل ا ق س وقد تبرهن ان ا ب ق يعدل ثُلث ا ب س فكل واحد من المثلثات

ا ب ق ب ق س س ق ا يعدل ثلث ا ب س

قضية ص ٠ ع

علينا ان تقسم مثلثًا الى ثلاثة اقسام متساوية بخطوطٍ من نقطة مفروضة داخلهُ

اقسم ب س الى ثلثة اقسام متساوية في د و ى وارسم د ن ى ن . ارسم ايضًا ا ف حتى يوازي د ن وارسم ا غ حتى يوازي ى ن . فاذا رُسمت ن ف ن غ ن ا ينقسم المثلث حسب المفروض

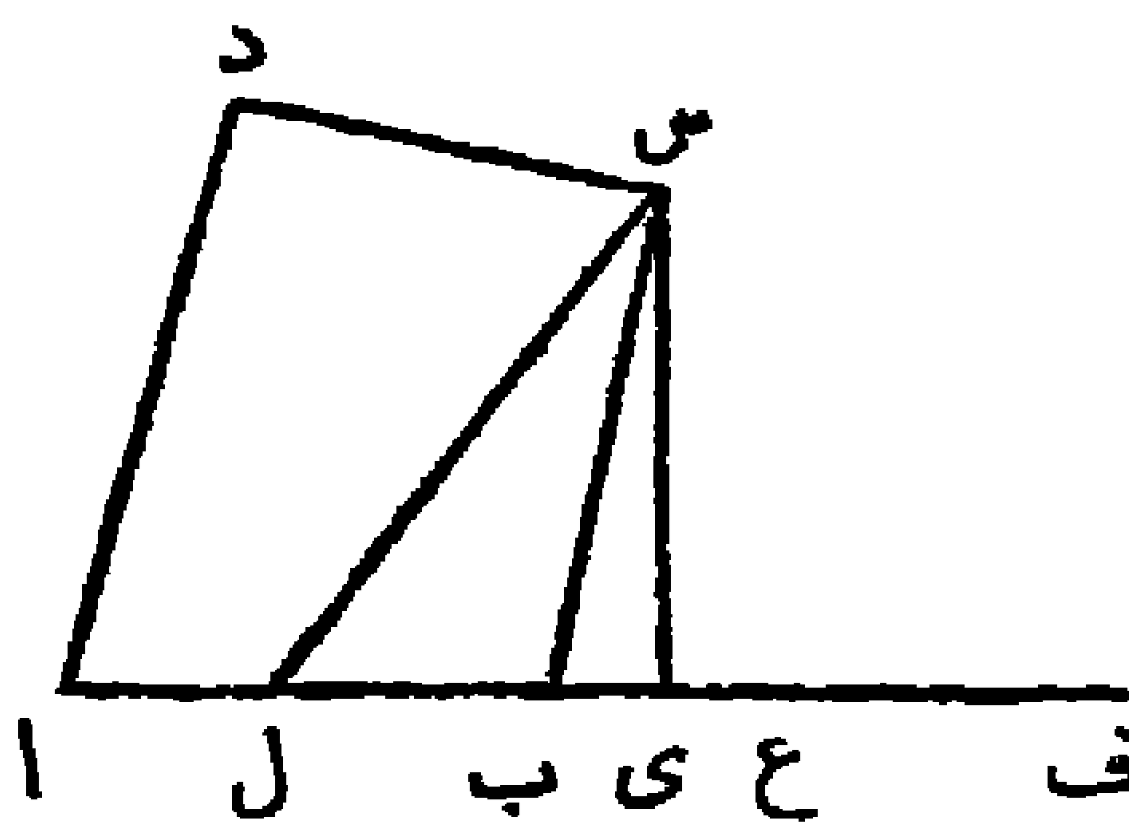


ارسم ا د ا ى . فلكون ا ف ون د متوازيين فالمثلث ا ف ن = ا ف د فاذا أُضيف اليها المثلث ا ب ف يحدث الشكل ا ب ف ن ذو الاربعة الاضلاع الذي يعدل المثلث ا ب د ولكن ب د انما هو ثُلث ب س فالمثلث ا ب د هو ثُلث ا ب س فالشكل ا ب ف ن هو ثُلث المثلث ا ب س . ولانَّ ا غ يوازي ن ى فالمثلث ا غ ن = ا غ ى . اضف اليها ا س غ فالشكل ا س غ ن يعدل المثلث ا س ى الذي هو ثُلث ا ب س فالشكل ا س غ ن ثلث ا ب س فكل واحد من الاشكال الثلاثة ا ب ف ن ا س غ ن ن ف غ يعدل ثُلث ا ب س

قضية ق ٠ ع

علينا ان تقسم شكلًا ذا اربعة اضلاع الى قسمين بخط من احدى زواياهُ حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خطٍ م الى خطٍ ن

ارسم س ى عمودًا على ا ب وارسم شكلًا ذا زوايا قائمة حتى يعدل الشكل



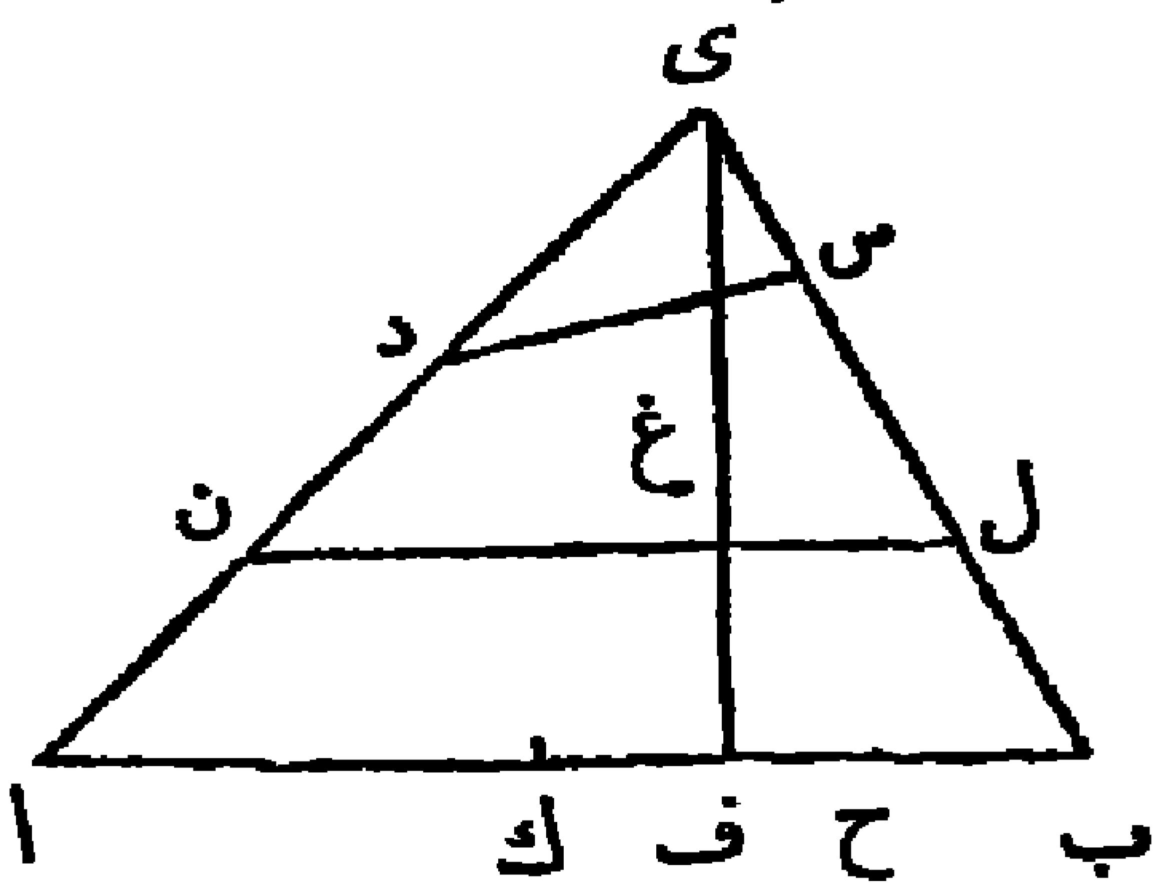
المفروض وليكن س ى ضلعًا من اضلاعهِ وى ف ضلعـًا اخر من اضلاعهِ واقسم ى ف في غ حتى تكون نسبة م : ن :: غ ف : ى غ. اجعل ب ل يعدل مضاعف ى غ. وارسم ل س. فقد انقسم الشكل حسب المفروض

لانَّ المثلث س ب ل يعدل س ى × ى غ. فنسبة القائم الزوايا س ى × غ ف : س ب ل :: غ ف : ى غ. ولكن س ى × غ ف = الشكل د ل ونسبة غ ف : غ ى :: م : ن فاذًا د ل : س ل ب :: م : ن

قضية ر ع

علينا ان تقسم شكلًا ذا اربعة اضلاع الى قسمين بخطٍ يوازي احد اضلاعهِ حتى تكون نسبة قسمٍ الى اخر كنسبة خطّ م الى خطّ ت

ليكن ا ب س د الشكل. اخرج ا د وب س حتى يلتقيا في ى وارسم ى ف عمودًا على ا ب ونصّفهُ في غ وعلى غ ف ارسم شكلًا قائم الزوايا حتى يعدل المثلث ى د س وليكن ح ب ضلعًا اخر من هذا الشكل. اقسم ا ح في ك حتى تكون نسبة ا ك : ك ح :: م : ت واجعل ى ا^2 : ى ن^2 :: ا ب : ك ب. ارسم ن ل حتى يوازي ا ب فينقسم الشكل حسب



المفروض. لانَّ المثلثين ى ا ب ى ن ل متشابهان تكون نسبة ى ا ب : ى ن ل :: ى ا^2 : ى ن^2 وبالمفروض ى ا^2 : ى ن^2 :: ا ب : ك ب فتكون نسبة ى ا ب : ى ن ل :: ا ب : ك ب :: ا ب × غ ف : ك ب × غ ف. وبالشكل ى ا ب = ا ب × غ ف فاذًا ى ن ل = ك ب × غ ف وا ك × غ ف = ا ل. ولكن ا ح × غ ف = ا س فاذًا ك ح × غ ف = ن س وا ك × غ ف : ك ح × غ ف :: ا ك : ك ح

وا ك : ك ح : م : ن فاذًا ا ل : ن س : م : ن

قضية ش . ع

علينا ان نقسم شكلاً ذا اربعة اضلاع الى قسمَين بخطٍّ من نقطة في احد اضلاعهِ حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خط م الى خط ت

ارسم ه د وارسم عليهِ شكلاً قائم الزوايا يعدل الشكل المفروض وليكن د ك ضلعهُ الاخر. اقسم د ك في ل حتى تكون نسبة د ل : ل ك :: م : ت. واجعل د ق يعدل ٢ د ل. واجعل ق غ يعدل العمود ا ن وارسم غ ٢ حتى يوازي د ه وارسم ه ٢ فينقسم الشكل حسب المفروض

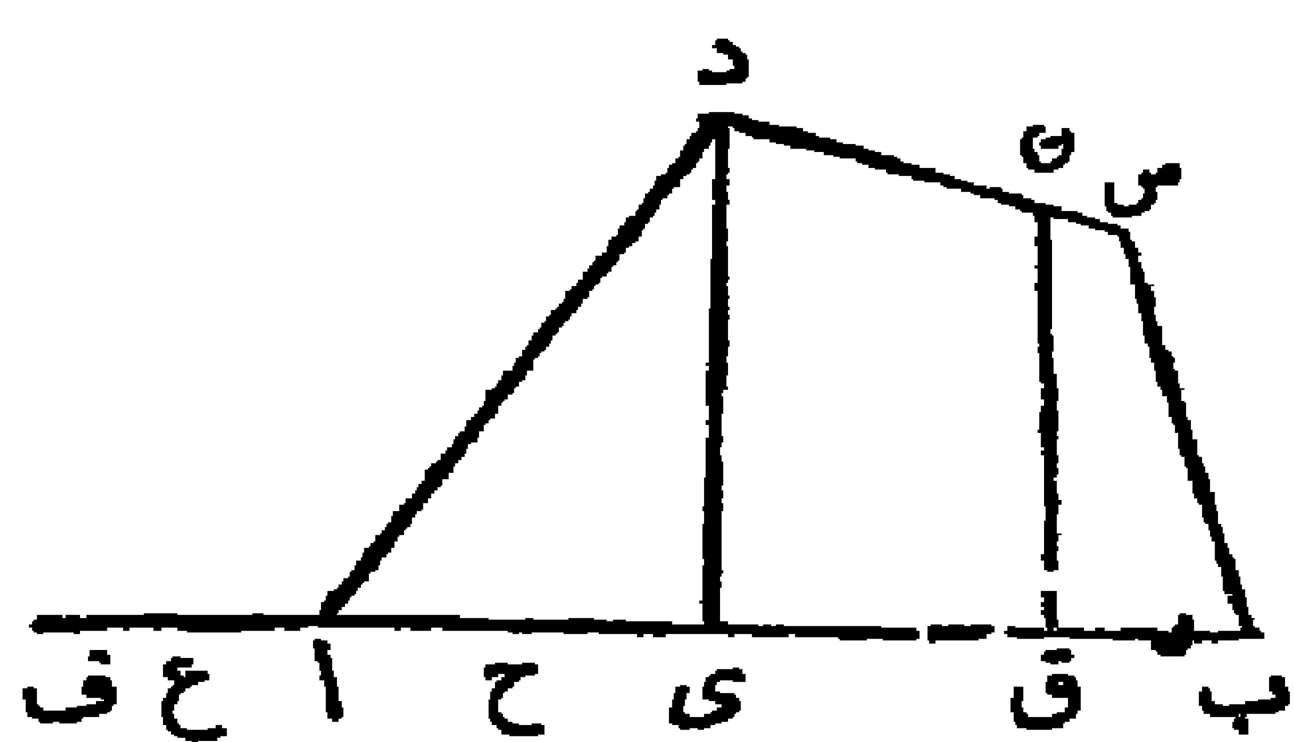
ارسم العمود ٢ ه. فبا لشكل ه د×د ك = ا س و ه د×د ق = ه د×ا ن + ه د× ٢ ه اي ه د×د ق يعدل مضاعف مجمع المثلثين ا ه د ه د ٢. فلانَّ د ل نصف د ق فالقائم الزوايا ه د×د ل = ا ه ٢ د فاذًا ه د×ل ك = ه ب س ٢. ولكن ه د×د ل : ه د×ل ك :: د ل : ل ك :: م : ت فاذًا ا ه ٢ د : ه ب س ٢ :: م : ت

قضية ت . ع

علينا ان نقسم شكلاً ذا اربعة اضلاع بخطٍّ عموديٍّ على احد اضلاعهِ حتى تكون نسبة قسم الى اخر كنسبة خطّ م الى خطّ ت

ليكن ا ب س د الشكل المفروض المطلوب انقسامهُ على نسبة م : ت بخطٍّ

عموديّ على الضلع ا ب



ارسم الخط د ى عمودًا على ا ب وانِ عليهِ شكلًا قائم الزوايا د ى × ى ف حتى يعدل الشكل ا ب س د واقسم ف ى في غ حتى تكون نسبة ف غ : غ ى :: م : ت . نصّف ا ى في ح واقسم الشكل ذا الاربعة الاضلاع ى س الى قسمين بالخط ن ق الذي يوازي د ى حتى تكون نسبة احدهما الى الاخر كنسبة ف غ : غ ح . فالخط ن ق يقسم الشكل ا س حسب المفروض

لانّ د ى × ى ف = ا س ود ى × ى ح = د ا ى فاذًا د ى × ح ف = ى س فالشكل ى س قد انقسم على نسبة انقسام ف ح قاعدة القائم الزوايا الذي يعدلهُ فاذًا ق س = د ى × ف غ وى ن = د ى × غ ح وان = د ى × غ ى فنسبة ق س : أن :: ف غ : غ ى :: م : ت

اصول الهندسة

مضافات

الكتاب الاول

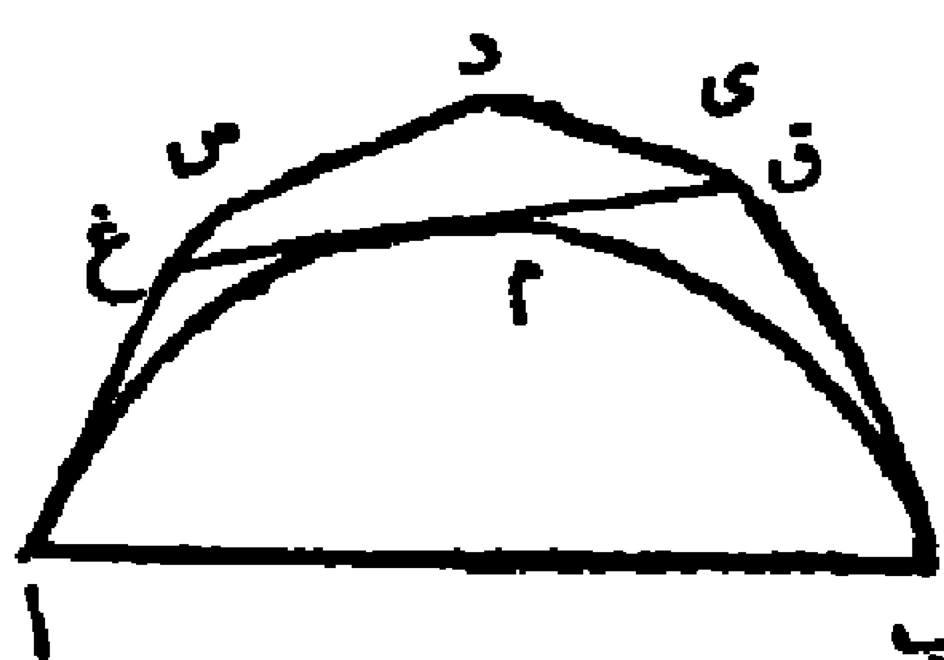
في تربيع الدائرة

سابقة

كل خطٍ منحنيًا كان او مركبًا من خطوطٍ مستقيمة محيطٍ بخطٍ محدَّبٍ هو اطول من الخطّ المحاط بهِ

ليكن ا م ب الخطّ المحاط بهِ فهو اقصر من الخطّ ا ع د ب المحيط بهِ

فان لم يكن ا م ب اقصر من كل خطٍ محيط بهِ فبالضرورة يوجد بين الخطوط المحيطة خطٌ اقصر من البقية واقصر من ا م ب او يماثلهُ. ليكن ا س د ى ب هذا الخط. ارسم بين الخطّ المحيط والمحاط بهِ خطًّا اخر مستقيمًا لا يلاقي ا م ب او يمسّهُ فقط مثل



الخطّ غ ق. فالخط غ ق انما هو اقصر من الخط ع س د ى ق. فاذا وضع ع ق عوض س د ى ق يكون ا غ ق ب اقصر من ا غ د ق ب وقد فُرِض ان هذا الاخير هو اقصر جميع الخطوط المحيطة فذاك محال فكل خط محيط بالخط ا م ب هو اطول منهُ

فرعٌ اول. محيط شكل كثير الاضلاع في دائرة هو اقصر من محيط الدائرة

فرعٌ ثانٍ . اذا رُسم من نقطة مفروضة خطّان مستقيمان يمسّان دايرة فمجموعها هو اطول من القوس المقطوع بهما فمحيط شكل كثير الاضلاع محيط بدائرة هو اطول من محيط الدائرة

القضية الاولى . ن

اذا فُرِض مقداران غير متساويَين وطُرِح من اكبرها نصفهُ ومن الباقي نصفهُ الى اخرهِ يبقى اخيرًا مقدارٌ اصغر من اصغر المقدارين المفروضين

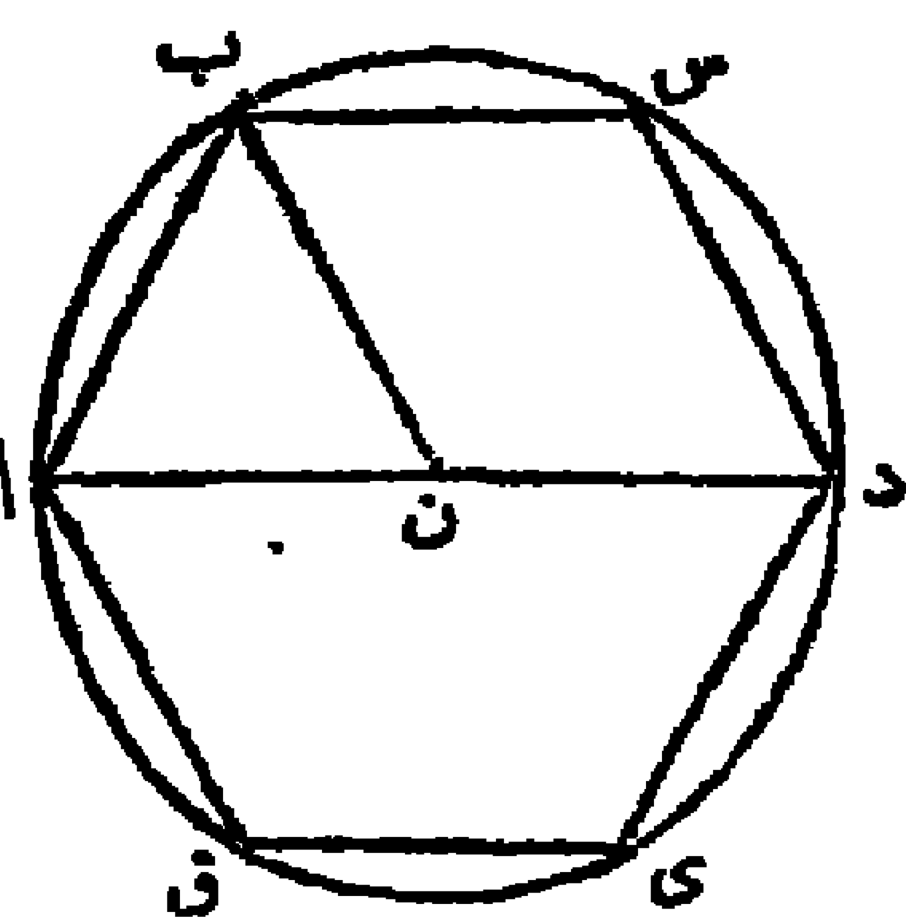
ليكن ا ب اكبر مقدارين وس اصغرها . فاذا طُرح من ا ب نصفهُ ومن الباقي نصفهُ الى اخرهِ يبقى اخيرًا مقدارٌ اصغر من س

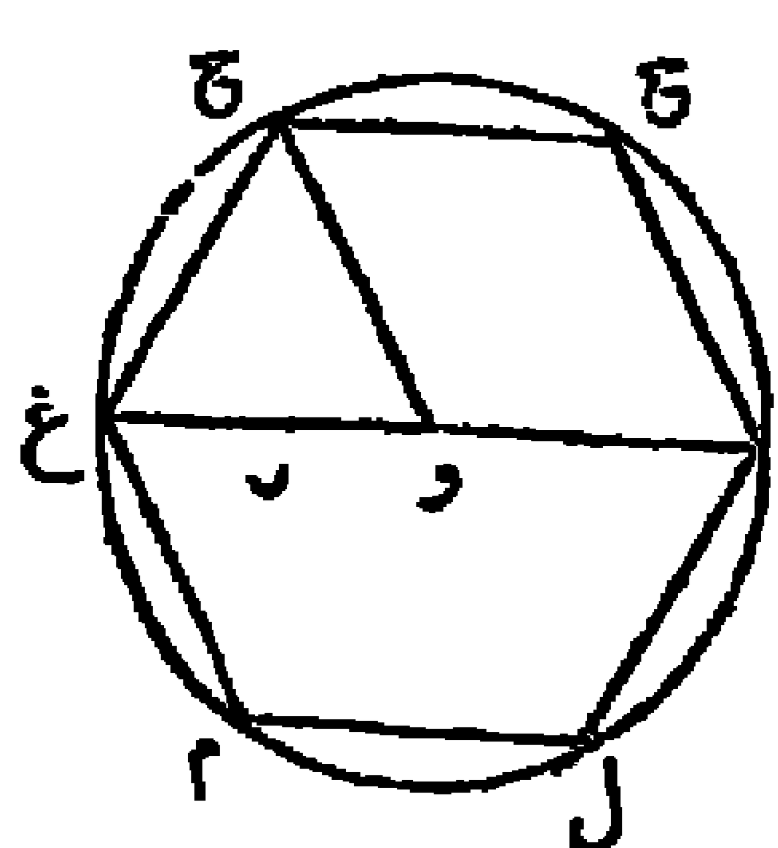
لانهُ قد يمكن ان يتكرر س حتى يصير اكبر من ا ب . فليكن د ى مضروبًا للمقدار س اكبر من ا ب وليكن فيهِ الاقسام د ف ف غ غ ى وكل قسم فليعدل س . اطرح من ا ب نصفهُ ب ح ومن ا ح اطرح نصفهُ ح ك وكرِر العمل حتى ان اقسام ا ب تماثل اقسام د ى عددًا اي ا ك ك ح ح ب . فلكون د ى اعظم من ا ب والقسم ى غ المطروح من د ى ليس هو نصف د ى ولكن ح ب القسم المطروح من ا ب هو نصفهُ فالباقي غ د هو اكبر من الباقي ا ح . ولكون غ د اكبر من ح ا والقسم غ ف ليس اكثر من نصف د غ والقسم ح ك هو نصف ا ك فالباقي ف د اعظم من الباقي ا ك ولكن ف د يعدل س فاذًا س اكبر من ا ك او ا ك انما هو اصغر من س

القضية الثانية . ن

اشكالٌ كثيرة الاضلاع المتساويةِ ومتماثلةٌ في عدد اضلاعها ومرسومة في دوائر هي متشابهةٌ ونسبة بعضها الى بعض كنسبة مربعات اقطار الدوائر التي رُسمت فيها

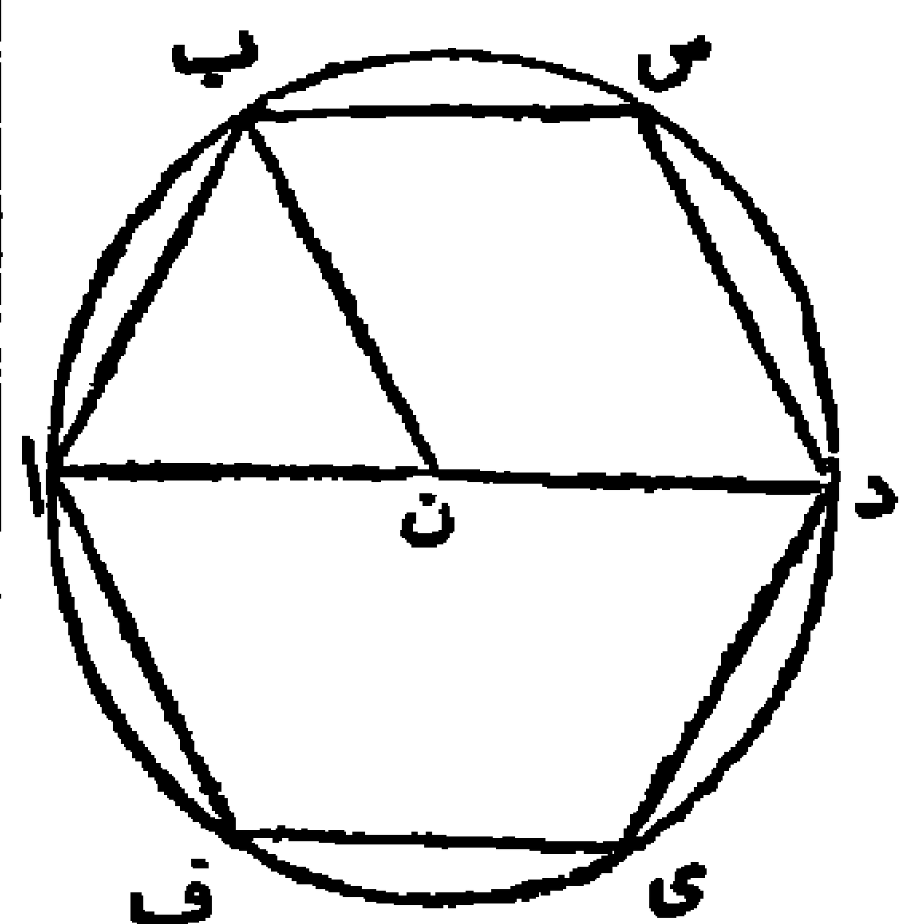
ليكن ا ب س د ى ق وغ ح ج ك ل م شكلين اضلاعهما كثيرة متساوية وليكونا متماثلين في عدد اضلاعهما ومرسومين في دائرتين ا د ب غ ح ك فهما متشابهان ونسبة

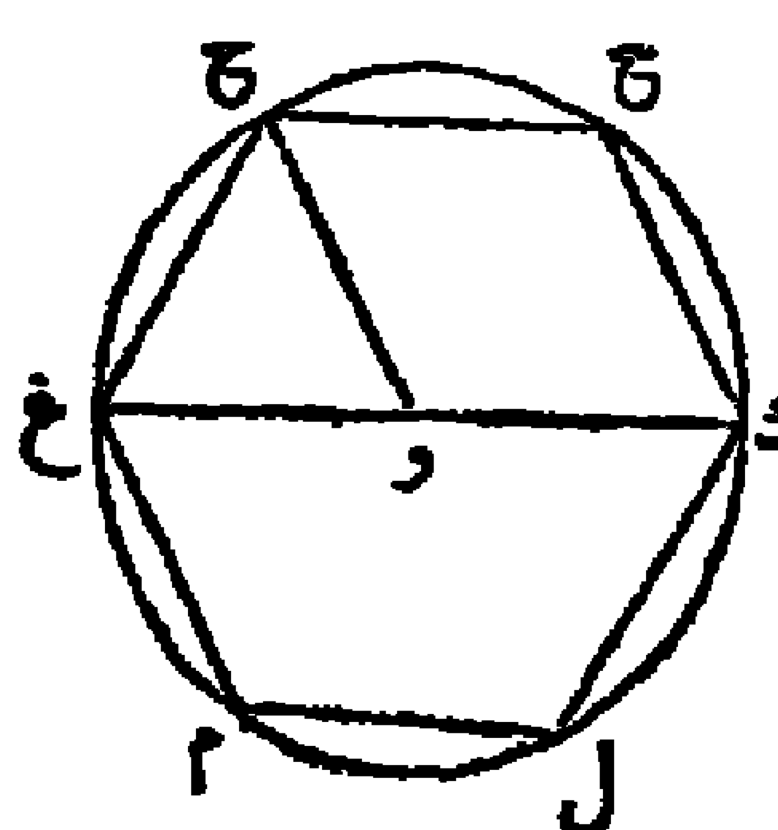




ا ب س د ى ق الى غ ح ج ك ل م كنسبة مربع قطر الدائرة ا ب د الى مربع قطر الدائرة غ ح ك

استعلم ن وو مركزي الدائرتين وارسم ا ن وغ و واخرجهما حتى يلاقيا المحيطين في د وك. ارسم ب ن وح و. فلكون الخطوط المستقيمة ا ب ب س س د د ى ى ق ق ا متساوية فالاقواس التي تقابلها ايضًا متساوية (ق ٢٨ ك ٣) ولذلك الاقواس غ ح ح ج ج ك ك ل ل م م غ هي متساوية ايضًا وهي تماثل اقواس الدائرة الاخرى عددًا فاي جزء كان القوس ا ب من المحيط ا ب د كان القوس غ ح ذات ذلك الجزء من المحيط غ ح ك. والزاوية ا ن ب ذات الجزء من اربع زوايا قائمة الذي كان القوس ا ب من المحيط ا ب د (ق ٣٣ ك ٦) والزاوية غ و ح هي من اربع زوايا قائمة ما كان القوس غ ح من المحيط غ ح ك (ق ٣٣ ك ٦) فالزاويتان ا ن ب غ و ح هما جزءآن متساويان كل واحد من اربع زوايا قائمة فهما متساويان. والمثلثان المتساويا الساقين ا ن ب غ و ح هما متساويا الزوايا ايضًا والزاوية ا ب ن تعدل الزاوية غ ح و. وعلى هذا الاسلوب اذا رسم ن س وج يبرهن ان الزاوية ن ب س تعدل و ح ج. فالكل ا ب س يعدل الكل غ ح ج. وهكذا يبرهن في





بقية زوايا الشكلين فهما متساويا الزوايا. وقد فرض انهما متساويا الاضلاع. فالاضلاع

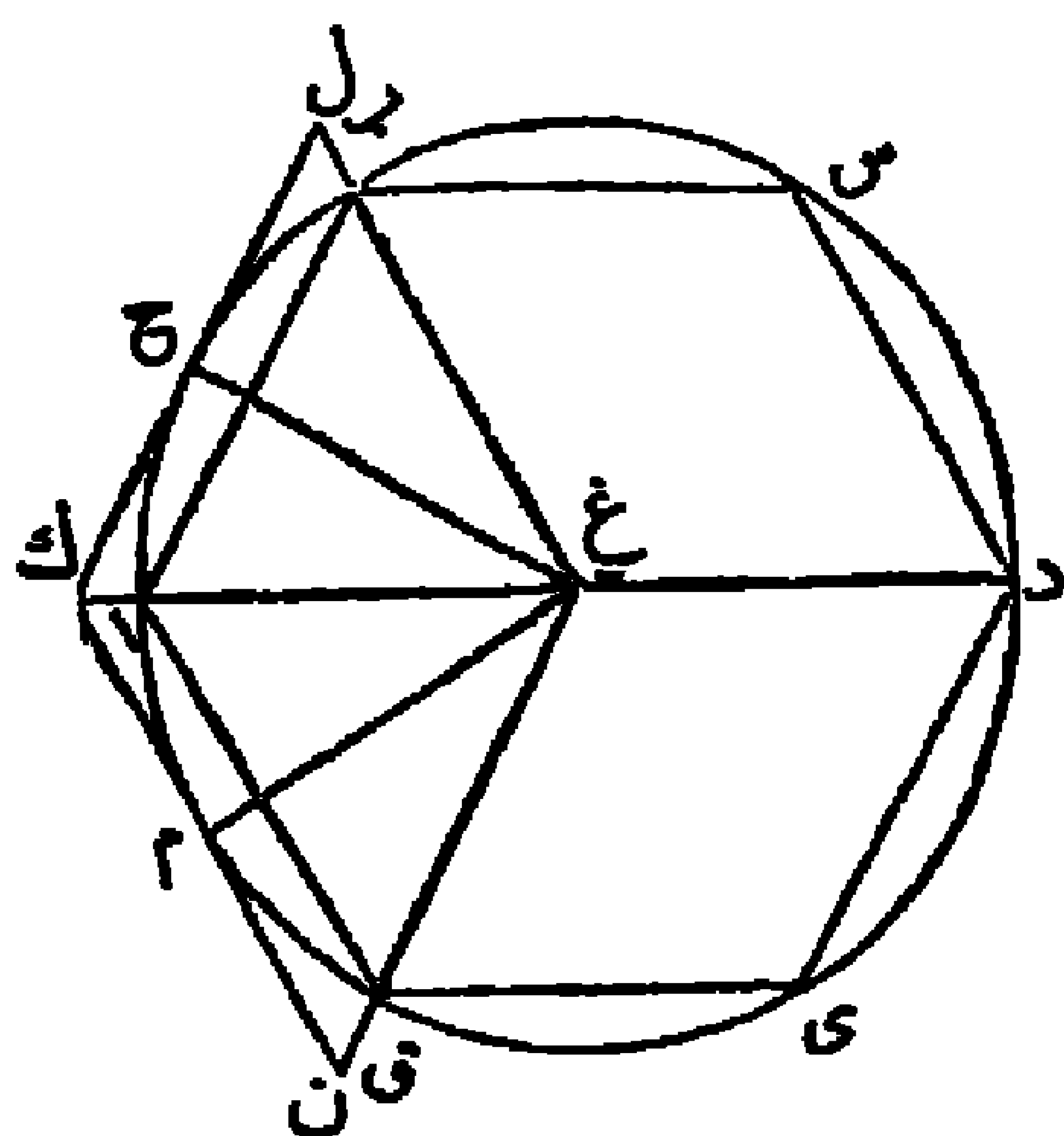
التي تلي الزوايا المتساوية هي متناسبة. فالشكلان متشابهان (حدّ ا ك٦) والاشكال الكثيرة الاضلاع المتشابهة هي كمربعات اضلاعها المتشابهة (ق٢٠ ك٦) فالشكل ا ب س د ى ف : غ ح ج ك ل م :: مربع ا ب : مربع غ ح. ولكون المثلثين ا ب ن غ ح و متساويي الزوايا فمربع ا ب : مربع غ ح :: مربع ا ن : مربع غ و (ق٤ ك٦) او :: ٤ ا ن^{٢} : ٤ غ و^{٢} (ق١٥ ك٥) اي :: ا د^{٢} : غ ك^{٢} (فرع ٢ ق ٨ ك٢) فالشكل ا ب س د ى ف : غ ح ج ك ل م :: ا د^{٢} : غ ك^{٢}. وقد تبرهن انهما متشابهان

فرع. كل شكل كثير الاضلاع المتساوية في دائرة هو متساوي الزوايا. لان المثلثات المتساوية الساقين التي تلتقي زواياها في المركز هي متساوية ومتشابهة والزوايا عند قواعدها متساوية فزوايا الشكل متساوية

القضية الثالثة. ع

مفروض ضلع شكلٍ كثير الاضلاع المتساوية في دائرة. علينا ان نجد ضلع شكل مثلهُ محيط بالدائرة

ليكن ا ب س د ى ق شكلاً كثير الاضلاع المتساوية في دائرة. علينا ان نجد ضلع شكل مثلهُ محيط بالدائرة



استعلم مركز الدائرة غ وارسم ع ا غ ب ونصّف القوس ا ب في ح ومن ح ارسم المماسّ ل ح ك الذي يمسّ الدائرة في ح ويلاقي غ ا وغ ب بعد اخراجها في ك ول فالخط ك ل هو ضلع الشكل المطلوب.

اجعل الزاوية ك غ ن تعدل ك غ ل.

ارسم غ ن حتى يعدل غ ل وارسم ك ن وارسم ع م عمودًا على ك ن وارسم ح غ

لكون القوس ا ب قد تنصّف في ح فالزاوية ا غ ح تعدل الزاوية ب غ ح (ق٢٧ ك٣) ولكون ك ل يمسّ الدائرة في ح فالزاويتان ك ح غ ل ح غ قائمتان (ق١٨ ك٣) فزاويتان من المثلث ك ح غ تعدلان اثنتين من المثلث ل ح غ والضلع غ ح مشترك بينهما فهما متساويان (ق٢٦ ك١) والضلع غ ل يعدل الضلع

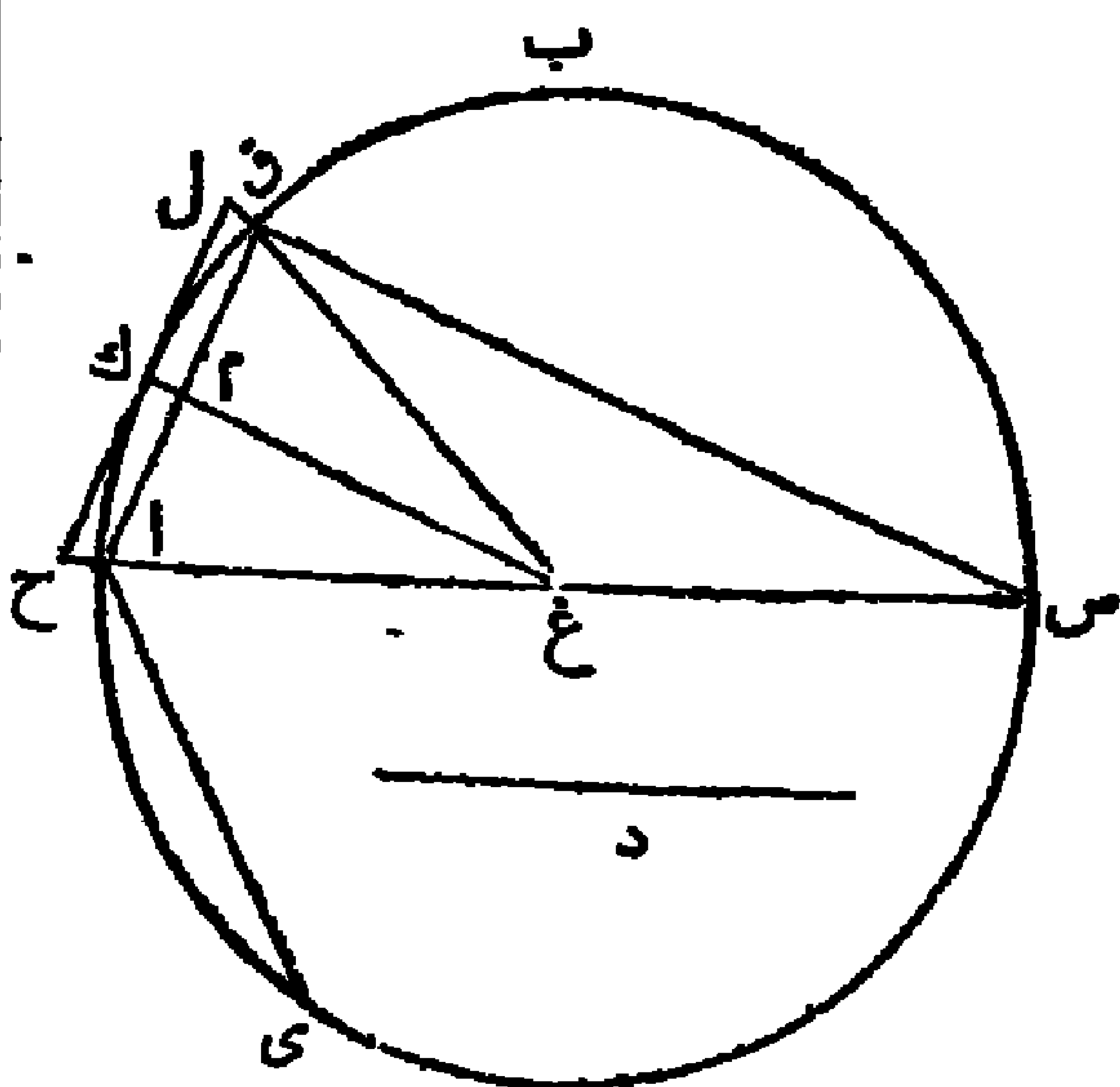
غ ك. ثم في المثلثين ك غ ل ك غ ن الضلع غ ل = غ ن وغ ك مشترك بينهما والزاوية ل غ ك تعدل ك غ ن فالقاعدة ك ل = ك ن (ق ٤ ك ١) والمثلث ك غ ن متساوي الساقين فالزاوية غ ك ن = غ ن ك والزاويتان غ م ك غ م ن قائمتان فالمثلثان غ م ك غ م ن متساويان (ق ٢٦ ك ١) والضلع ك م = م ن فقد تنصف ك ن في م وك ن = ك ل فاذاً ك م = ك ح والضلع غ ك مشترك بين المثلثين غ ك م غ ك ح والزاوية غ ك ح = غ ك م فالضلع غ م = غ ح (ق ٤ ك ١) فالنقطة م هي في محيط الدائرة ولكون ك م غ قائمة فالخط ك م مماس الدائرة. وهكذا اذا رُسِمت خطوط مستقيمة من المركز الى بقية زوايا الشكل في الدائرة برسم شكل محيط بالدائرة اضلاعهُ تعدل ك ل وعدد الاضلاع يماثل اضلاع الشكل في الدائرة

فرع اول. اذا جُعِل غ مركزاً وغ ل او غ ك او غ ن نصف قطر ورُسِمت دائرة فالشكل يقع في تلك الدائرة ويشبه ا ب س د ى ق

فرع ثانٍ. نسبة ا ب : ك ل :: العمود من غ على ا ب : العمود من غ على ك ل اي : نصف قطر الدائرة فمحيط الشكل في الدائرة : محيط الشكل المحيط بالدائرة :: العمود من المركز على ضلع من اضلاع الشكل في الدائرة : نصف قطر الدائرة

القضية الرابعة. ن

اذا فُرِضَتْ دائرة فقد يمكن ان يوجد شكلان متشابهان اضلاعهما كثيرة احدهما في الدائرة والآخر محيطٌ بها وفضلتهما اقلُّ من مساحة مفروضة



ليكن ا ب س الدائرة المفروضة ومربع د مساحة مفروضة فقد يمكن ان يُرسَم شكل كثير الاضلاع في ا ب س وآخر يشبههُ محيطاً بها وتكون فضلة الشكلين اقل من مربع د

ارسم في الدائرة ا ب س الخطَّ المستقيم ا ى حتى يعدل د.

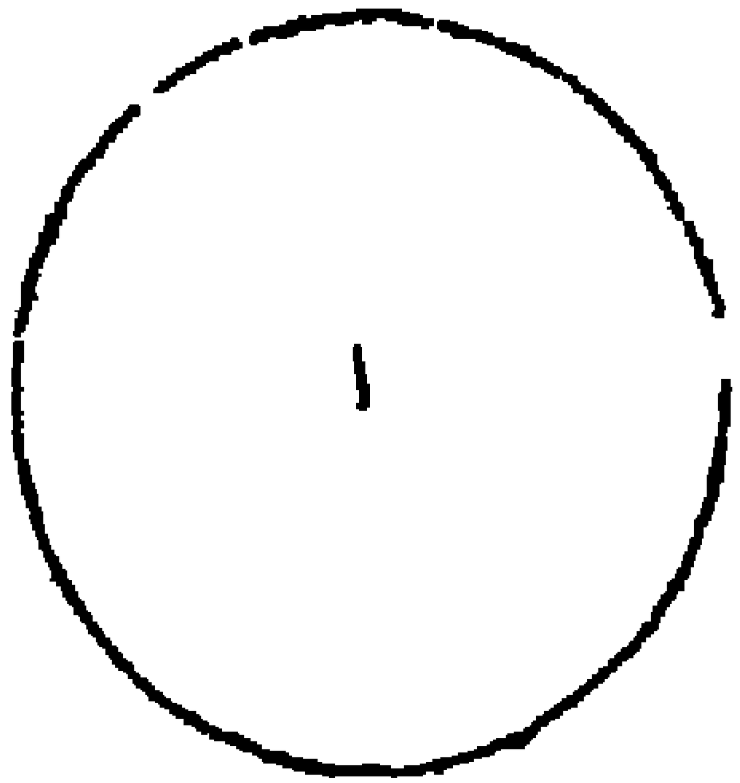
وليكن ا ب ربع محيط الدائرة. من ا ب اطرح نصفهُ ومن الباقي نصفهُ وهكذا حتى يبقى ا ق اقل من القوس ا ى (ق ا ك ا مضافات) استعلم المركز غ وارسم القطر ا س والخطَّين المستقيمَين ا ق ق غ. نصِّف القوس ا ق في ك وارسم ك غ وارسم ح ل حتى يمسَّ الدائرة في ك ويلاقي غ ا غ ق بعد اخراجها في ح ول وارسم س ق

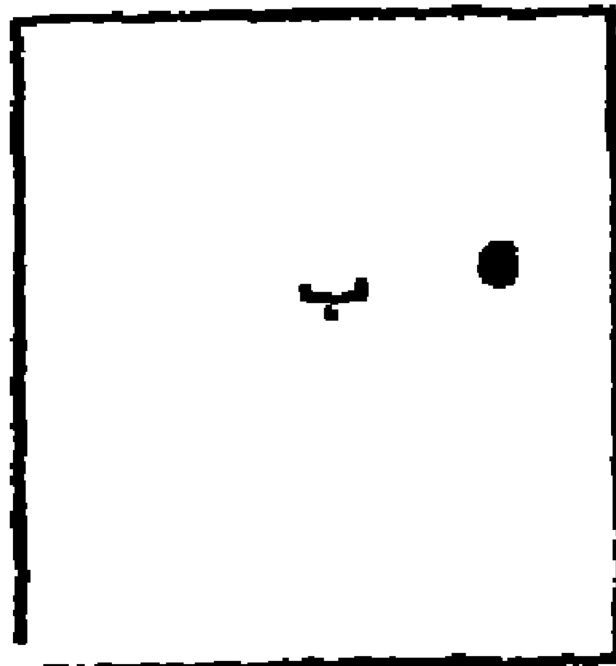
المثلثان ح غ ل اغ ق متساويا الساقَين والزاوية ا غ ق مشتركة بينهما فهما متساويا الزوايا (ق٦ ك٦) والزاويتان غ ح ل غ ا ق متساويتان. ولكن الزاوية غ ك ح = س ق ا لانهما قائمتان. فالمثلثان ح غ ك اس ق متساويا الزوايا (فرع٤ ق٣٢ ك ١) وقد استُعلِم القوس ا ق بتنصيف القوس ا ب ثم بتنصيف النصف الى الاخرِ فالقوس ا ق يتعدد مرارًا معلومة في القوس ا ب فيتعدَّد ايضًا في محيط الدائرة ا ب س مرارًا معلومة فيكون الخط المستقيم ا ق ضلع شكل كثير الاضلاع المتساوية في الدائرة ا ب س ويكون ح ل ضلع شكل مثلهُ محيط بالدائرة ا ب س (ق٢ ك ا مضافات). ليُكنَ عن الشكل في الدائرة بحرف مثل ن وعن الشكل المحيط بها بحرف مثل م. فلكون هذين الشكلين متشابهين تكون نسبة احدها الى الآخر كمربَّعي الضلعين المتشابهين ح ل ا ق (فرع٢ ق٢٠ ك٦) اي (لكون المثلثين ح ل غ ا ق غ متشابهين) كنسبة مربَّع ح غ الى مربع ا غ الذي يعدل مربَّع غ ك. وقد تبرهن ان المثلثين ح غ ك ا س ق متشابهان. فتكون نسبة $ا س^2 : س ق^2 ::$ الشكل م : الشكل ن. وما لطرح مربَّع ا س : زيادتهِ على مربَّع س ق اي مربع ا ق (ق٤٧ ك ا) :: الشكل م : زيادتهِ على الشكل ن. ولكن مربع ا س اي المربع المحيط بالدائرة ا ب س هو اعظم من شكل ذي ثمانية اضلاع متساويه محيط بالدائرة لانهُ محيط بذلك الشكل. والشكل ذو الثمانية الاضلاع اعظم من شكل ذي ستَّة عشر ضلعًا وهلم جرًّا. فمربع ا س هو اعظم من الشكل المرسوم حول الدائرة بانقسام القوس ا ب حسبما تقدم فهو اعظم من الشكل م. وقد تبرهن ان مربع ا س : مربع ا ق :: الشكل م : فضلة الشكلين. فلكون $ا س^2$ اعظم من م يكون مربع ا ق اعظم من فضلة الشكلين (ق١٤ ك٥) ففضلة الشكلين اذًا هي اقل من مربع ا ق وا ق اقصر من د. ففضلة الشكلين اقل من مربع د اي من المساحة المفروضة

فرع اول. فضلة الشكلين اعظم من فضلة احدهما والدائرة. فيمكن ان يُرسَم شكلٌ في الدائرة او محيط بها تكون فضلة احدهما والدائرة اقل من مساحة مفروضة

مهما كانت تلك المساحة صغيرة

فرعٌ ثانٍ. المساحة ب التي هي اكبر من كل شكل يُرسَم في الدائرة ا واصغر من كل شكل يُرسَم محيطًا بالدائرة تعدل الدائرة ا والاَّ فتكون اكبر منها او اصغر منها واولاً لتكن اكبر من ا بما يعدل مساحة س. فالاشكال التي تُرسَم محيطة بالدائرة ا هي



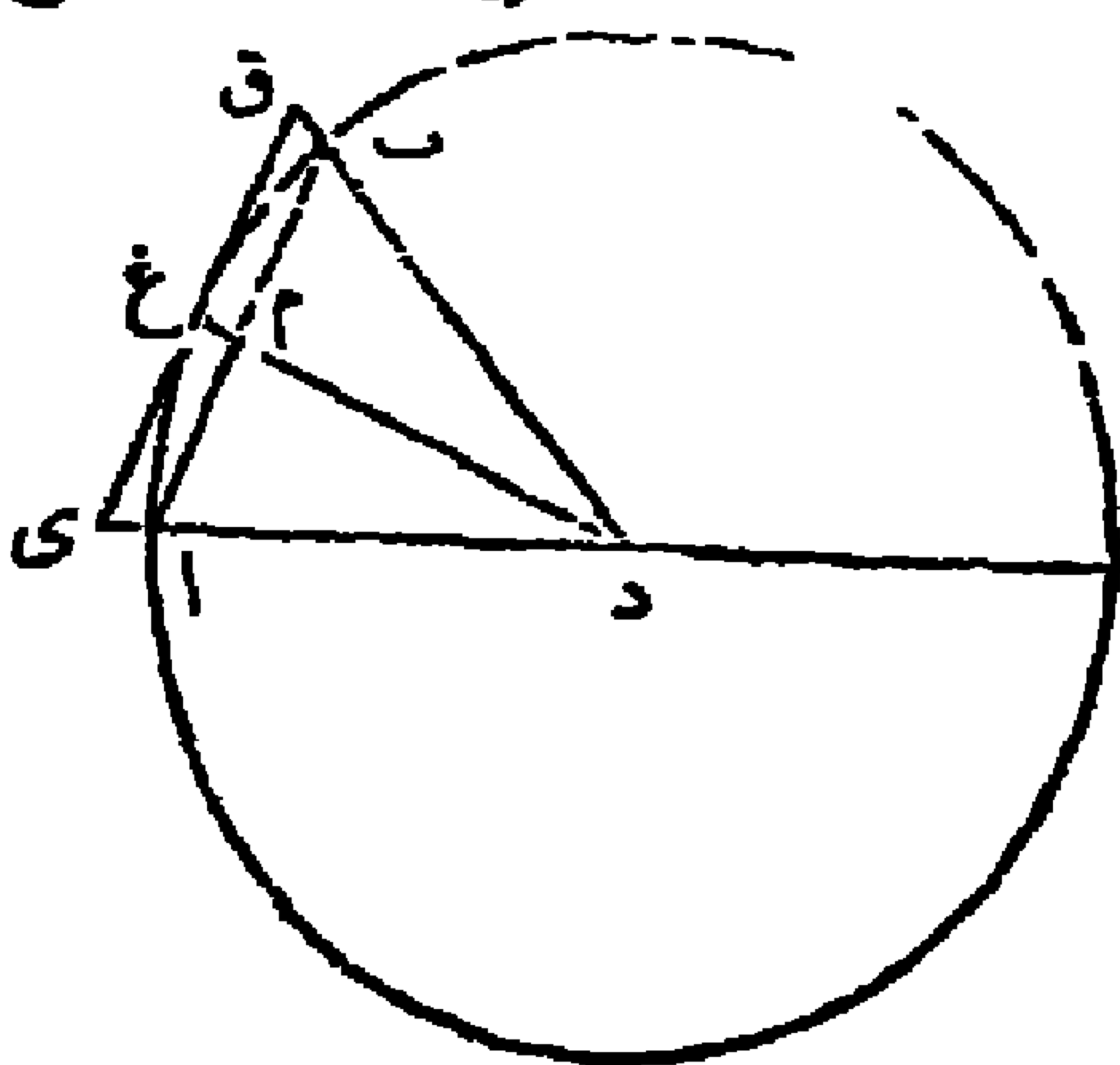


بالمفروض اكبر من د. ولكن ب اكبر من ا بمساحة س فلا يرسم شكل محيط بالدائرة ا الا ما كان اكبر منها بما يعدل مساحة س وذاك محال. وهكذا اذا كانت ب اصغر من ا بمساحة س يبان انهُ لا يمكن ان يُرسَم في الدائرة ا شكل الاَّ ما كان اصغر من ا بمساحة اكبر من س وذاك محال فلا يكون ا و ب غير متساويين اي هما متساويان

القضية الخامسة. ن

مساحة دائرةٍ تعدل القائم الزوايا مسطَّح نصف قطرها في خطٍّ مستقيم يعدل نصف محيطها

لبكن ا ب س دائرة مركزها د وقطرها ا س. فاذا أُخرِج ا س وأُخِذ ا ح حتى يعدل نصف محيط الدائرة فمساحتها تعدل القائم الزوايا د ا × ا ح



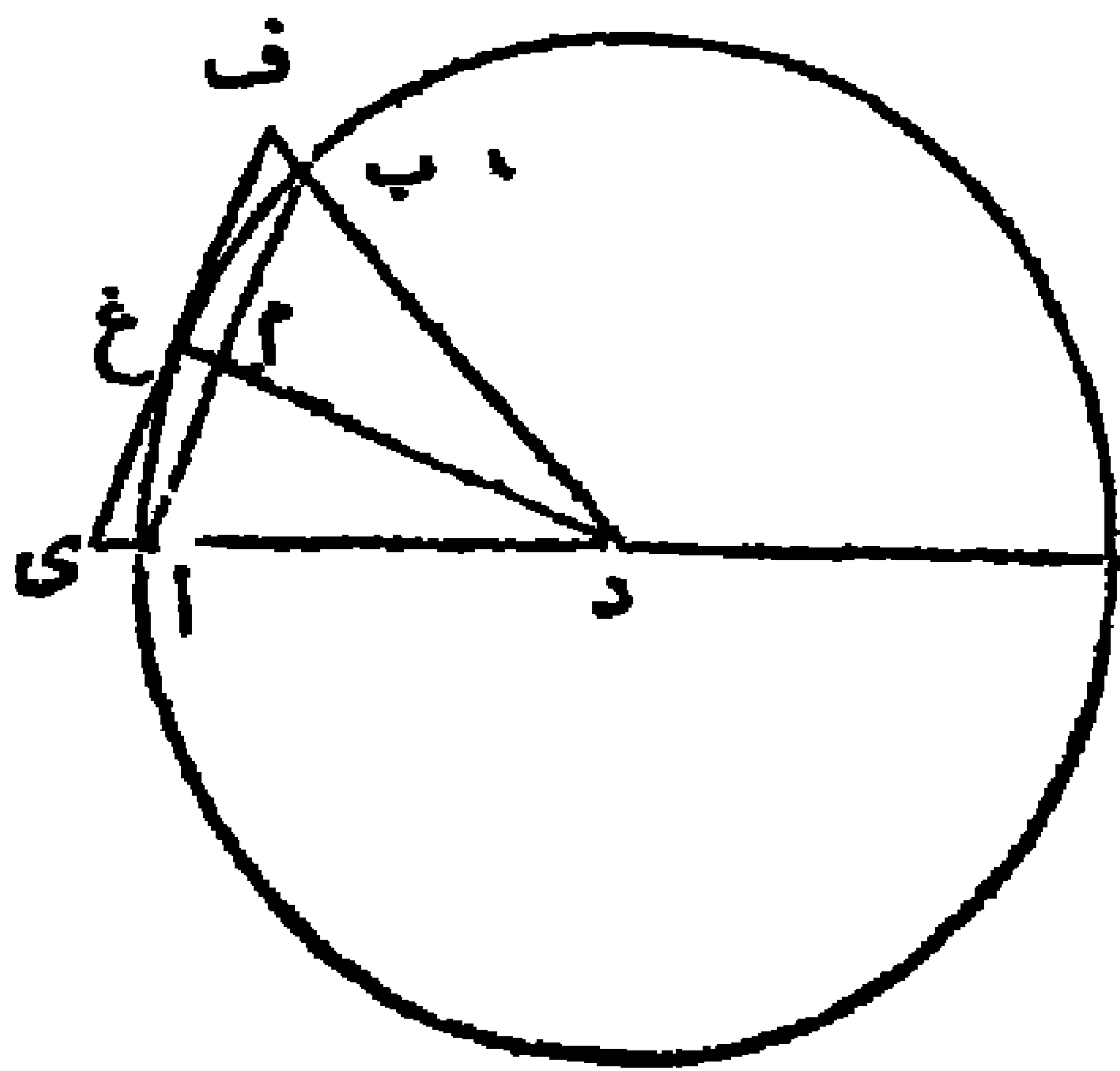
ليكن ا ب ضلع شكل كثير الاضلاع المتساوية في الدائرة ا ب س. نَصِّف

القوس ا ب في غ ومن غ ارسم المماسّ ى غ ف الذي يلاقي د ا ود ب بعد اخراجها في ى وف. فيكون ى ف ضلع شكل كثير الاضلاع المتساوية محيط بالدائرة ا ب س (ق٢ ك١ مضافات). اقطع من ا س بعد اخراجهِ ا ك حتى يعدل نصف محيط الشكل الذي كان ا ب ضلعًا من اضلاعهِ واقطع ايضًا ا ل حتى يعدل نصف محيط الشكل الذي كان ى ف ضلعًا من اضلاعهِ. فيكون ا ك اقصر من ا ح وا ل اطول من ا ح (سابقة المضافات) ثم في المثلث ى د ف قد رُسِم د غ عمودًا على القاعدة فالمثلث ى د ف يعدل القائم الزوايا د غ في نصف ى ق (ق ١ ٤١ ك١) وهكذا في جميع المثلثات التي رؤوسها عند د والتي يتركب منها الشكل المحيط بالدائرة فالشكل كله يعدل القائم الزوايا د غ في ا ل الذي فُرِض انهُ نصف محيط الشكل (ق ١ ك٢) او يعدل د ا×ا ل ولكن ا ل اطول من ا ح فالقائم الزوايا د ا×ا ل اكبر من د ا×ا ح اي القائم الزوايا د ا×ا ح اصغر من د ا×ا ل اي اصغر من كل شكل يحيط بالدائرة ا ب س

واما المثلث ا د ب فانهُ يعدل القائم الزوايا د م في نصف ا ب فهو اصغر من القائم الزوايا د غ او د ا في نصف ا ب. وهكذا في جميع المثلثات التي رؤوسها عند د والتي يتركب منها الشكل في الدائرة ا ب س. فكل الشكل يعدل د ا×ا ك لانّ ا ك = نصف محيط الشكل في الدائرة. والقائم الزوايا د ا×ا ك هو اصغر من القائم الزوايا د ا×ا ح فبالاحرى يكون الشكل الذي ا ب ضلعًا منهُ اصغر من د ا ×ا ح. اي د ا ×ا ح اكبر من كل شكل يمكن رسمهُ في الدائرة ا ب س. وقد تبرهن ان د ا×ا ح اصغر من كل شكل يحيط بالدائرة ا ب س فالقائم الزوايا د ا ×ا ح يعدل الدائرة ا ب س (فرع ٢ ق ٤ ك١ مضافات) ود ا هو نصف قطر الدائرة ا ب س وا ح نصف محيطها

فرع اول. لكون د ا : ا ح :: د ا^2 : د ا×ا ح (ق ١ ك٦) وقد تبرهن ان د ا× ا ح = مساحة الدائرة التي كان د ا نصف قطرها فنسبة نصف قطر دائرة : نصف محيطها او القطر كلهِ الى المحيط كلهِ :: مربع نصف القطر : مساحة الدائرة

فرع ثانٍ. يمكن ان يرسم شكلٌ كثير الاضلاع المتساوية محيط بدائرة



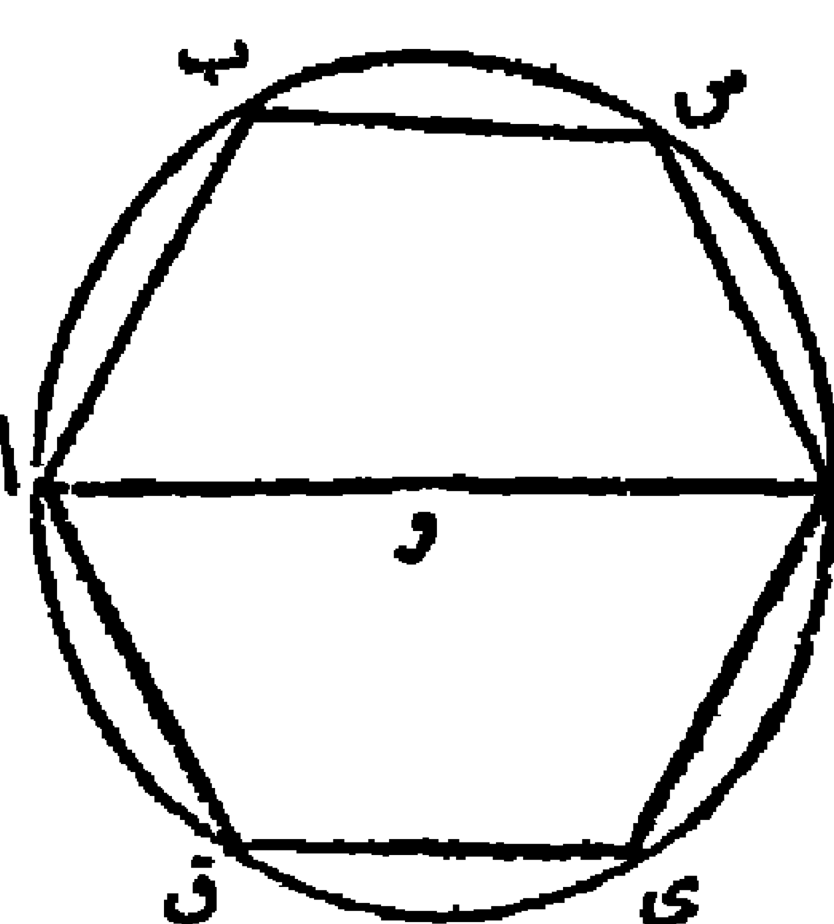
حتي تكون فضلة محيطهِ ومحيط الدائرة اقل من خط مفروض. ليكن ن ق الخط المفروض. اقطع منهُ ن ر اقل من نصفهِ واقل من ا د. وليُرسَم شكلٌ محيط بالدائرة ا ب س حتى تكون فضلة الشكل والدائرة اقل من مربع ن ر (فرع اول ق٤ ك١ مضافات) وليكن ى ف ضلع هذا الشكل. فقد تبرهن ان الدائرة تعدل د ا×ا ح والشكل المحيط يعدل د ا×ا ل فضلة الشكل والدائرة تعدل د ا×ح ل فالقائم الزوايا د ا×ح ل اصغر من مربع ن ر. ولانَّ د ا اطول من ن ر يكون ح ل اقصر من ن ر ومضاعف ح ل اقصر من مضاعف ن ر وبالاحرى مضاعف ح ل اقصر من ن ق. ولكن ح ل هو فضلة نصف محيط الشكل الذي كان ى ف ضلعًا منهُ ونصف محيط الدائرة. فمضاعف ح ل هو فضلة كل محيط الشكل وكل محيط الدائرة (ق٥ ك٥) ففضلة محيط الشكل ومحيط الدائرة هي اقل من الخط المفروض ن ق

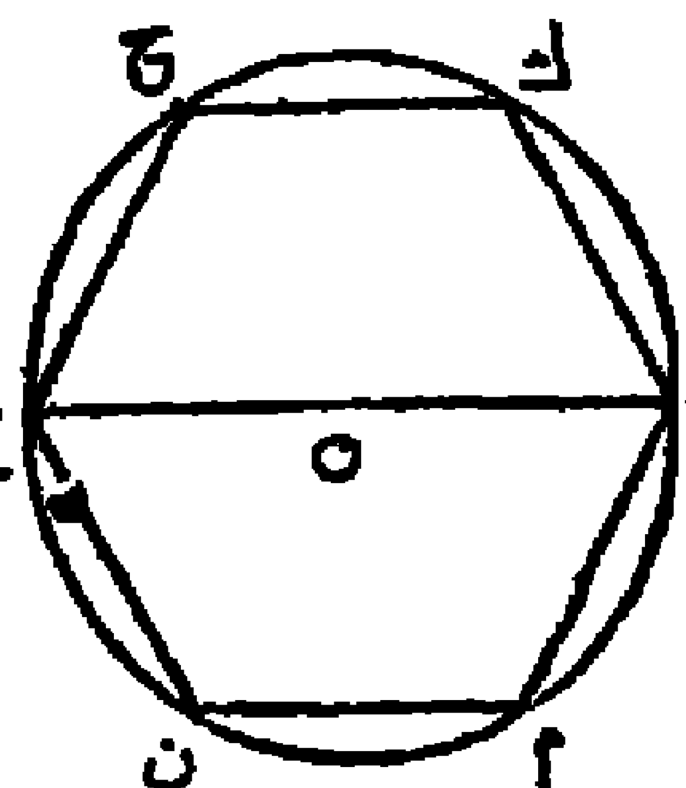
فرع ثالث. يمكن ان يرسم شكل كثير الاضلاع المتساوية في دائرة حتى تكون فضلة محيط الدائرة ومحيطهُ اقل من خطٍ مفروض

القضية السادسة. ن

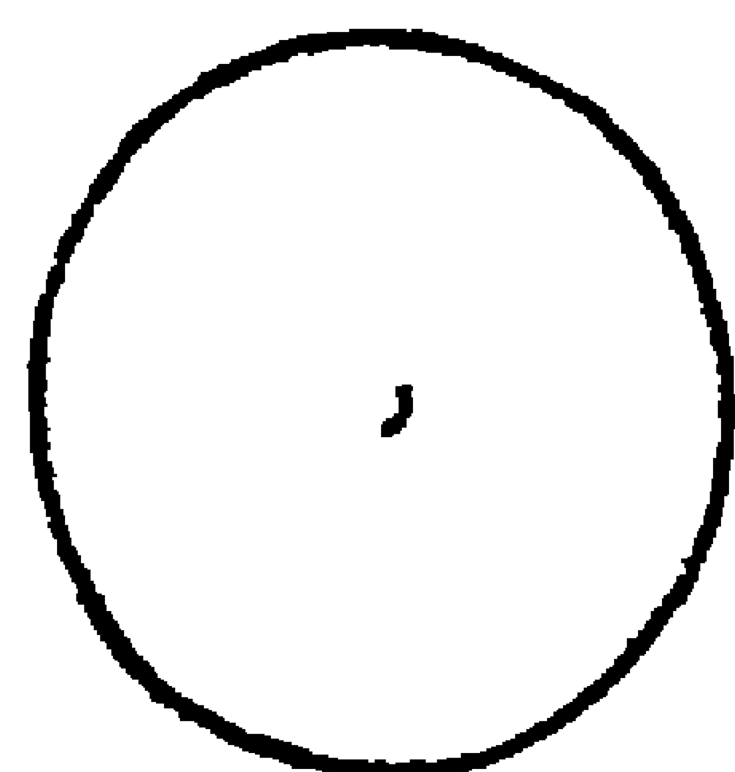
نسبة مساحات الدوائر بعضها الى بعض هي كنسبة مربَّعات اقطارها بعضها الى بعض

ليكن ا ب د غ ح ل دائرتين. فمساحة الدائرة ا ب د الى مساحة الدائرة





غ ح ل كمربع القطر
اد الى مربع القطر
غ ل [illegible]
ليكن
ا ب س د ى ق
وغ ح ك ل م ن



شكلين متشابهين لهما اضلاع كثيرة في الدائرتين وليكن ر مساحةً ما ولتكن نسبة مربع اد الى مربع غ ل كالدائرة ا ب د الى ر. فلكون الشكلين ا ب س د ى ق غ ح ك ل م ن متشابهين فنسبة مساحة احدهما الى مساحة الاخر كمربع قطر دائرة الواحد الى مربع قطر دائرة الآخر (ق ٢ ك ١ مضافات) فنسبة اد^2 : غ ل^2 :: الشكل ا ب س د ى ق : الشكل غ ح ك ل م ن. ولكن اد^2 : غ ل^2 :: الدائرة ا ب د : ر. فالشكل ا ب س د ى ق : الشكل غ ح ك ل م ن :: ا ب د : ر. والدائرة ا ب د > ا ب س د ى ق فتكون ر > غ ح ك ل م ن (ق ١٤ ك ٥) اي ر اكبر من كل شكل مرسوم في الدائرة غ ح ل

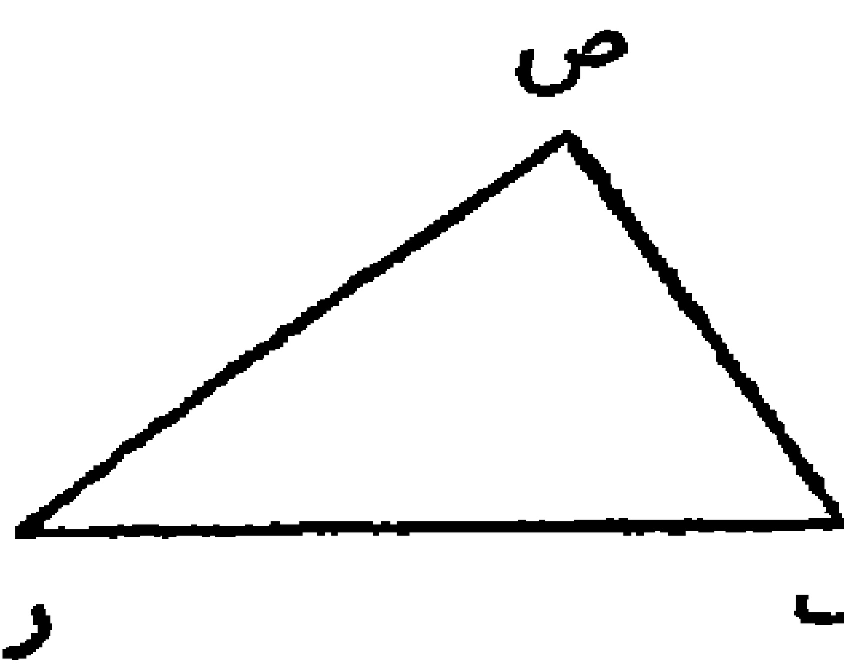
وهكذا يبرهن ان ر اصغر من كل شكل يُرسَم حول الدائرة غ ح ل فاذًا ر = الدائرة غ ح ل (فرع ٢ ق ٤ ك ١ مضافات) وقد فُرِض ان ا ب د : ر :: اد^2 : غ ل^2 فتكون ا ب د : غ ح ل :: اد^2 : غ ل^2

فرع اول. نسبة محيطات الدوائر بعضها الى بعض كنسبة اقطارها بعضها الى بعض

لنفرض ان الخط المستقيم ك = نصف محيط الدائرة ا ب د والخط المستقيم ى = نصف محيط الدائرة غ ح ل. فالقائم الزوايا ا و × ك = ا ب د وغ ه × ى = غ ح ل (ق ٥ ك ١ مضافات) فنسبة ـــــــــ ك
ا و × ك : غ ه × ى :: اد^2 : غ ل^2 :: ـــــــــ ى
او^2 : غ ه^2 وبالمبادلة ا و × ك : ا و^2 :: غ ه × ى : غ ه^2. والاشكال القائمة الزوايا اذا

كانت على علو واحدٍ تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض (ق ا ك٦) فنسبة ك : ا و :: ى : غ ه وبالمبادلة ك : ى :: ا و : ع ه فاذا تضاعف كل واحد نكون نسبة المحيط ا ب د : المحيط ع ح ل :: القطر ا د : القطرع ل

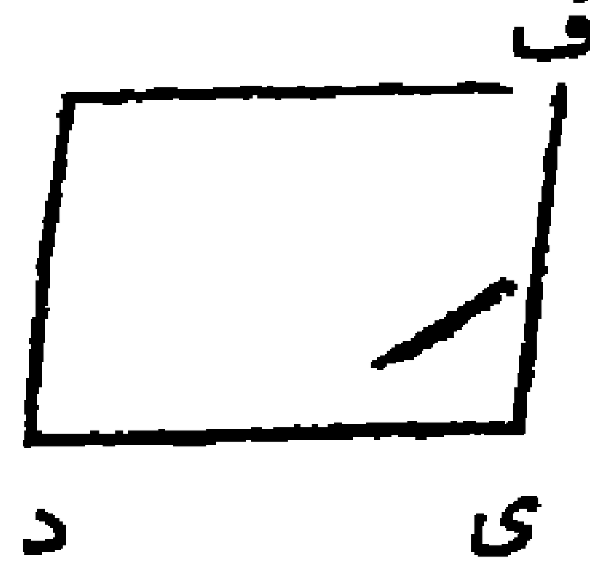
فرع ثانٍ . الدائرة المرسومة على الضلع الذي يقابل القائمة في مثلث ذي قائمة تعدل الدائرتين المرسومتين على الضلعين الاخرين . لانّ نسبة الدائرة على ص ر . الدائرة على ر ف :: مربع ص ر : مربع ر ف ، والدائرة على ف ص : الدائرة على ر ف : مربع ف ص : مربع ر ف . فالدائرتان على ص ر وص ف : الدائرة على ف ر :: مربعي ص ر وص ف : مربع ر ف (ق٢٤ ك٥) ولكن مربعا ص ر ص ف يعدلان مربع ر ف (ق٤٧ ك١) فالدائرتان على ص ر وص ف تعدلان الدائرة على ر ف

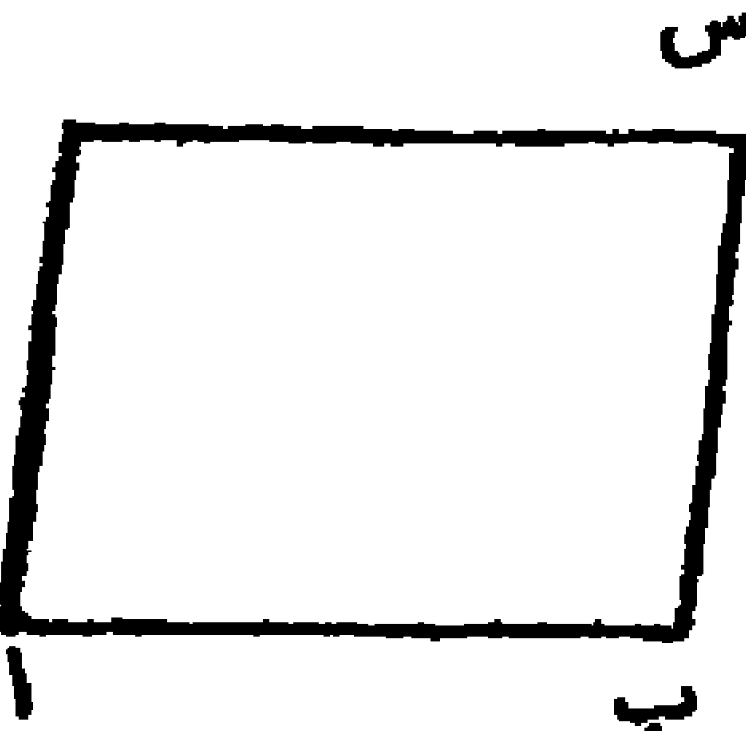


القضية السابعة . ن

اشكال متوازية الاضلاع ومتساوية الزوايا تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة مسطح الاعداد التي تناسب اضلاعها بعضها الى بعض

ليكن ا س ود ف شكلين متوازيي الاضلاع متساويي الزوايا . وليكن م ن ف ق اربعة اعداد ولتكن نسبة ا ب : ب س :: م : ن ونسبة ا ب : د ى :: م : ف ونسبة ا ب : ى ف :: م : ق فبالمساواة نسبة ب س . ى ف .. ن . ق . فالسكل ا س : د ف :: م ن : ف ق





ليكن ن ف مسطح ن في ف . ونسبة م ن الى ف ق تتركب من نسب م ن الى ن ف ون ف الى ف ق (حد ١٠ ك٥) . ولكن نسبة م ن الى ن ف هي نسبة م الى ف (ق١٥ ك٥) لانّ م ن ون ف مضروبان متساويان من م وف . ولهذا السبب ايضاً نسبة ن ف الى ف ق هي نسبة ن الى ق فنسبة م ن الى ف ق قد تركبت من

نسبة م الى ف ونسبة ن الى ق. وبالمفروض نسبة م الى ف هي نسبة الضلع ب س الى الضلع د ى. ونسبة ن الى ق هي نسبة الضلع ب س الى الضلع ى ق فنسبة م ن الى ف ق قد تركبت من نسبة ا ب الى د ى ونسبة ب س الى ى ف. ونسبة الشكل ا س الى الشكل د ف قد تركبت من هذه النسب ايضاً (ق ٢٣ ك ٦) فالشكل ا س الى الشكل ا د كنسبة م ن مسطح العددين م ون الى ف ق مسطح العددين ف وق

فرعٌ اول. اذا كانت نسبة غ ح الى ك ل كنسبة م الى ن فالمربع المرسوم على غ ح الى المربع على ك ل كنسبة م م او مربع م الى ن ن او مربع ن

غ ——— ح

ك ——— ل

فرعٌ ثانٍ. اذا فُرِضت خطوط مثل ا ب س د الى اخرهِ واعداد مناسبة لها مثل م ن ر ص اي ا : ب :: م : ن وا : س :: م : ر وا : د :: م : ص. فاذا كان القائم الزوايا مسطح خطين من هذه الخطوط يعدل مربع الخط الثالث فمسطح العددين المناسبين للاولين يعدل مربع العدد المناسب للثالث اي اذا كان ا × س = ب٢ فحينئذٍ م × ر = ن × ن = ن٢

وبالقلب اذا فُرِض م ور عددين مناسبين للخطين ا وس وفُرِض ان ا × س = ب٢ ووُجِد عدد مثل ن حتى ان ن٢ = م ر فحينئذٍ ا : ب :: م : ن

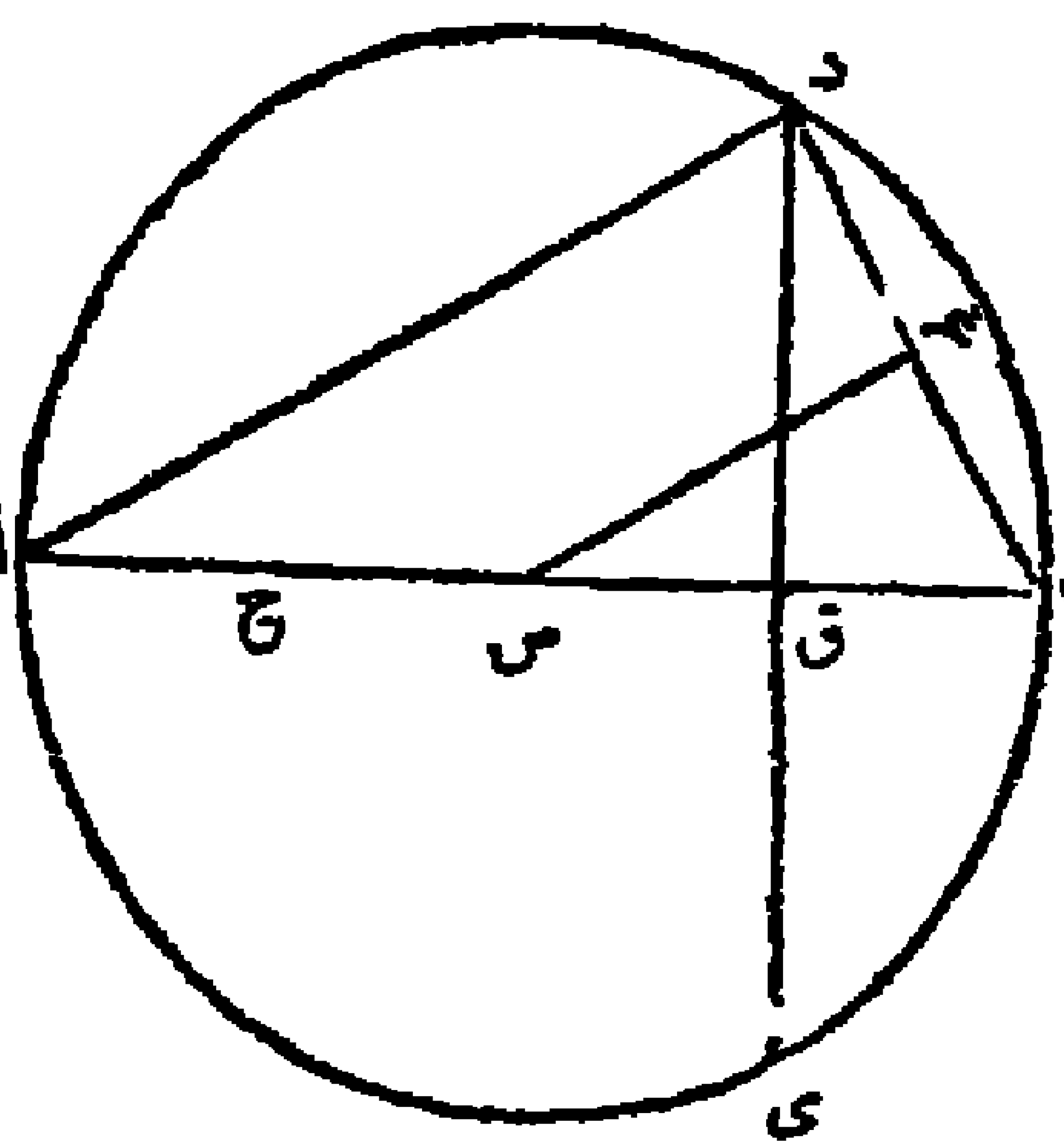
تعليقة. لكي نجد اعداداً مناسبة لعدّة مقادير من جنسٍ واحد لنفرض ان احدها قد انقسم الى اجزاء متساوية ولنفرض م عدد الاجزاء كلها وح جزءًا من الاجزاء. ولنفرض ان ح يوجد ن مرّة في المقدار ب ور مرّة في المقدار س وص مرّة في المقدار د وهلمّ جرًّا الى اخرهِ. فالامر واضح ان الاعداد م ن ر ص هي مناسبة للمقادير ا ب س د. فاذا قيل في القضايا الآتية ان خطًّا مثل ا = عدداً مثل م يراد ان ا = م × ح اي ان ا يعدل المقدار المفروض ح مضروباً في م وهكذا في المقادير الأُخَر ب س د وللاعداد المناسبة لها لانّ ح انما هو قياس مشترك للكل. وقد يُترَك ذكر هذا القياس المشترك للاختصار ولكنهُ متضمن في المعنى كما قيل انّ خطًّا او مقداراً هندسيًّا يعدل عدداً ما. واذا كان في ذلك العدد كسرٌ اوكان مختلطًا يراد انّ القياس المشترك ح قد انقسم الى اجزاء يُدَلُّ عليها بالكسر. فلو قيل ا = ٢٦٠،٢٧٥ يراد انهُ يوجد مقدار ح حتى ان ا = ٢٦٠ × ح + ٢٧٥/١٠٠٠ × ح وهكذا

كل ما دلّ على نسب مقادير هندسية بواسطة اعداد

القضية الثامنة ن

العمود من مركز دائرة على وتر قوس من الدائرة هو متناسب متوسط بين ربع القطر وخطٍ مركب من نصف القطر مع عمود من المركز على وتر مضاعف القوس . ووتر القوس هو متناسب متوسط بين القطر وخطٍ هو فضلة نصف القطر والعمود المذكور من المركز

لبكن ا ب د دائرة مركزها س ود ب ى قوساً ما ود بَ نصفهُ . ارسم الوترين د ى د ب وايضاً س ق عموداً على د ى وس ع عموداً على د ب ولنخرج س ق حتى يلاقي المحيط في ب وا . نصّف ا س في ح . فالعمود س ع هو متناسب متوسط بين ا ح وا ق . وب د متناسب متوسط بين ا ب وب ق الذي هو فضلة نصف القطر وس ق



ارسم ا د فلكون ا د ب قائمة لانها في نصف دائرة وس غ ب ايضاً قائمة فالمثلثان ا ب د س ب غ متساويا الزوايا وا ب : ا د :: ب س : س غ (ق ٤ ك ٦) وبالمبادلة ا ب : ب س :: ا د : س ع ولكن ا ب هو مضاعف ب س فيكون ا د مضاعف س غ ومربع ا د يعدل اربعة امثال مربع س ع

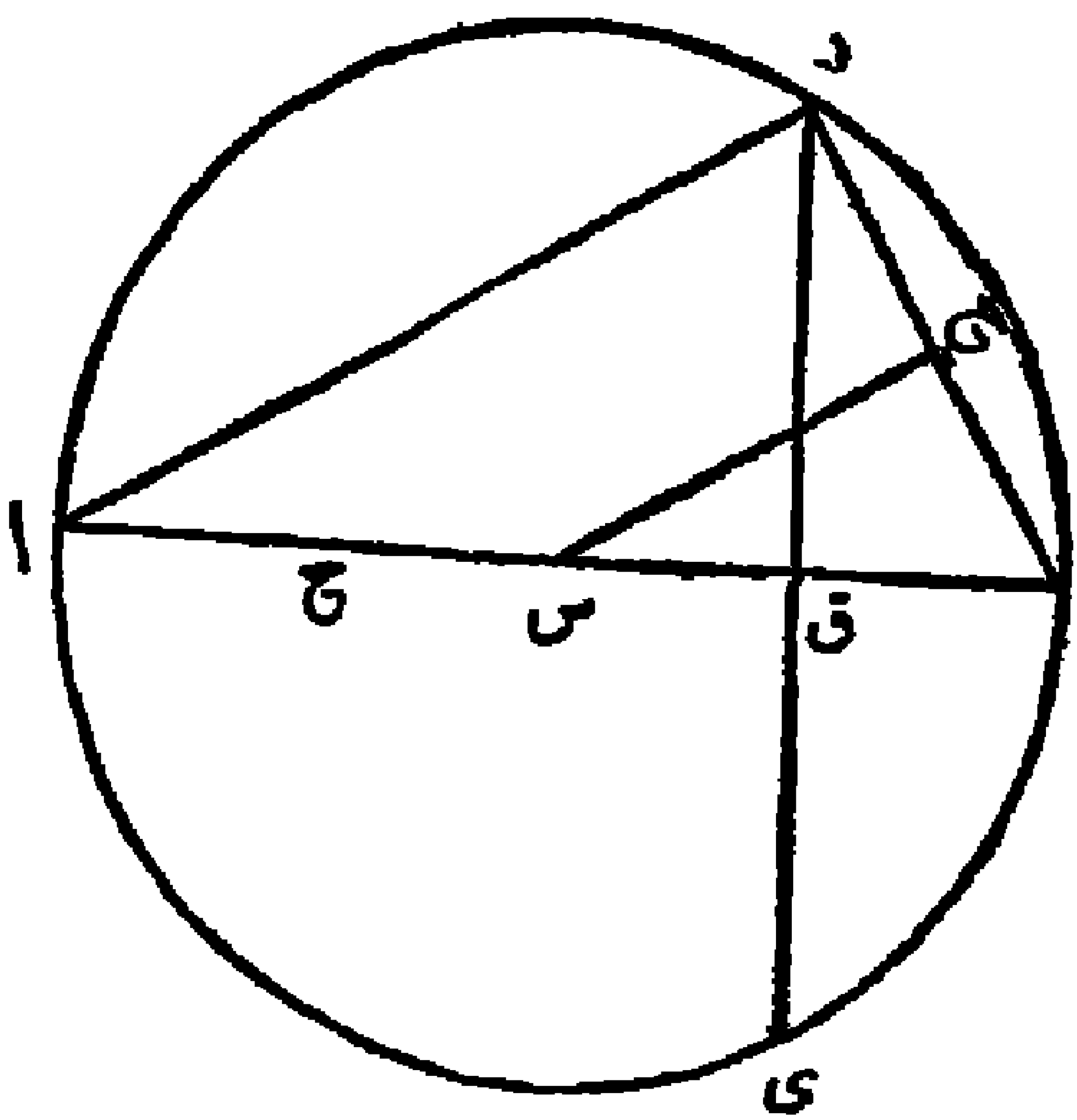
ولكون ا د ب مثلثاً ذا قائمة ود ق عموداً من القائمة على ا ب فالضلع ا د متناسب متوسط بين ا ب وا ق (ق ٨ ك ٦) وا $د^2$ = ا ب × ا ق (ق ١٧ ك ٦) او لكون ا ب = ٤ ا ح ا $د^2$ = ٤ ا ح × ا ق . ولكون ٤ س $غ^2$ = ا $د^2$ ٤ س $غ^2$ = ٤ ا ح × ا ق وس $غ^2$ = ا ح × ا ق فاذاً س غ هو متناسب متوسط بين ا ح وا ق اي بين ربع القطر والخط المركب من نصف القطر والعمود على مضاعف القوس ب د والامر واضح ان ب د هو متناسب متوسط بين ا ب وب ق (ق ٨ ك ٦) اي

بين القطر وفضلة نصف القطر والعمود على وتر قوس مضاعف القوس د ب

القضية التاسعة·ن

محيط الدائرة هو اطول من ثلاثة امثال قطرها بخطٍ اقصر من $\frac{10}{70}$ من القطر واطول من $\frac{10}{71}$ من القطر

ليكن ا ب د دائرة مركزها س وقطرها ا ب فالمحيط اطول من ا ب بخطٍ اقصر من $\frac{10}{70}$ او $\frac{1}{7}$ من ا ب واطول من $\frac{10}{71}$ من ا ب



ارسم في الدائرة ا د ب الخطّ المستقيم ب د حتى يعدل نصف القطر ب س (ق ١ ك ٤) ارسم د ق عمودًا على ب س واخرجهُ حتى يلاقي المحيط ايضا في ى وارسم س ج عمودًا على ب د. اخرج ب س الى ا. ونصِّف ا س في ح وارسم س د

فالامر واضح ان كل واحد من القوسَين ب د ب ى هو سُدس المحيط (فرع ق ١٤ ك ٤) فالقوس د ب ى ثُلث المحيط. فالخط س ج متناسب متوسط بين ا ح ربع القطر والخطّ ا ق (ق ٨ ك ١ مضافات). ولكون الضلعَين ب د د س متساويَين فالزاويتان د س ق د ب ق متساويتان. ود ق س د ق ب متساويتان ايضًا والضلع د ق مشترك بين المثلثين د ب ق د س ق فالقاعدة ب ق تعدل القاعدة س ق فقد تنصف س ب في ق فاذا فُرِض ان ا س او ب س = ١٠٠٠ فحينئذٍ ا ح = ٥٠٠ وس ق = ٥٠٠ وا ق = ١٥٠٠ وس ج متناسب متوسط بين ا ح وا ق اي س ج^2 = ا ح × ا ق (ق ١٧ ك ٦) = ٥٠٠ × ١٥٠٠ = ٧٥٠٠٠٠ وس ج = + ٨٦٦٫٠٢٥٤ لانَّ (٨٦٦٫٠٢٥٤)^2 اقل من ٧٥٠٠٠٠ وايضًا ا س + س ج = + ١٨٦٦٫٠٢٥٤

ولكون س ج عمودًا من المركز س على وتر سُدس المحيط فاذا فُرِض ف = العمود من س وتر $\frac{1}{12}$ من المحيط يكون ف متناسبًا متوسطًا بين ا ح وا س + س ج

(ق ٨ ك ١ مضافات) وف^{٢} = اح × (اس + س ج) = ٥٠٠ × (+١٨٦٦،٠٢٥٤) = +٩٣٣٠١٢،٧ وف = +٩٦٥،٩٢٥٨ واس + ف = +١٩٦٥،٩٢٥٨

ثم اذا فُرِض ر = العمود من س على وتر $\frac{١}{٢٤}$ من المحيط فحينئذٍ يكون ر متناسبًا متوسطًا بين اح واس + ف ور^{٢} = اح × (اس + ف) = ٥٠٠ × (+١٩٦٥،٩٢٥٨) = +٩٨٢٩٦٢،٩ ور = +٩٩١،٤٤٤٩ واس + ر = +١٩٩١،٤٤٤٩

ثم اذا فُرِض ص = العمود من س على وتر $\frac{١}{٤٨}$ من المحيط فحينئذٍ ص^{٢} = اح × (اس + ر) = ٥٠٠ × +١٩٩١،٤٤٤٩ = +٩٩٥٧٢٢،٤٥ وص = +٩٩٧،٨٥٨٩ واس + ص = +١٩٩٧،٨٥٨٩

اخيرًا اذا فُرِض ط = العمود من س على وتر $\frac{١}{٩٦}$ من المحيط فحينئذٍ ط^{٢} = اح × (اس + ص) = ٥٠٠ × (+١٩٩٧،٨٥٨٩) = +٩٩٨٩٢٩،٤٥ وط = +٩٩٩،٤٦٤٥٨. اي اذا انقسم نصف القطر الى ١٠٠٠ جزء فالعمود من المركز على وتر $\frac{١}{٩٦}$ من المحيط هو اطول من ٩٩٩،٤٦٤٥٨ من تلك الاجزآء

ولكن حسب القضية السابقة وتر $\frac{١}{٩٦}$ من المحيط هو متناسب متوسط بين المحيط وفضلة نصف القطر وص اي العمود من المركز على وتر $\frac{١}{٤٨}$ من المحيط. فمربع وتر $\frac{١}{٩٦}$ من المحيط = اب × (اس − ص) = ٢٠٠٠ × (−٢،١٤١١) = −٤٢٨٢،٢ والوتر ذاتهُ = −٦٥،٤٣٨٦ لانّ (٦٥،٤٣٨٦)^{٢} اكثر من ٤٢٨٢،٢ ووتر $\frac{١}{٩٦}$ من المحيط او ضلع شكل متساوي الاضلاع ذي ٩٦ ضلعًا في الدائرة اذا كان −٦٥،٤٣٨٦ يكون محيط ذلك الشكل (٦٥،٤٣٨٦) × ٩٦ = −٦٢٨٢،١٠٥٦

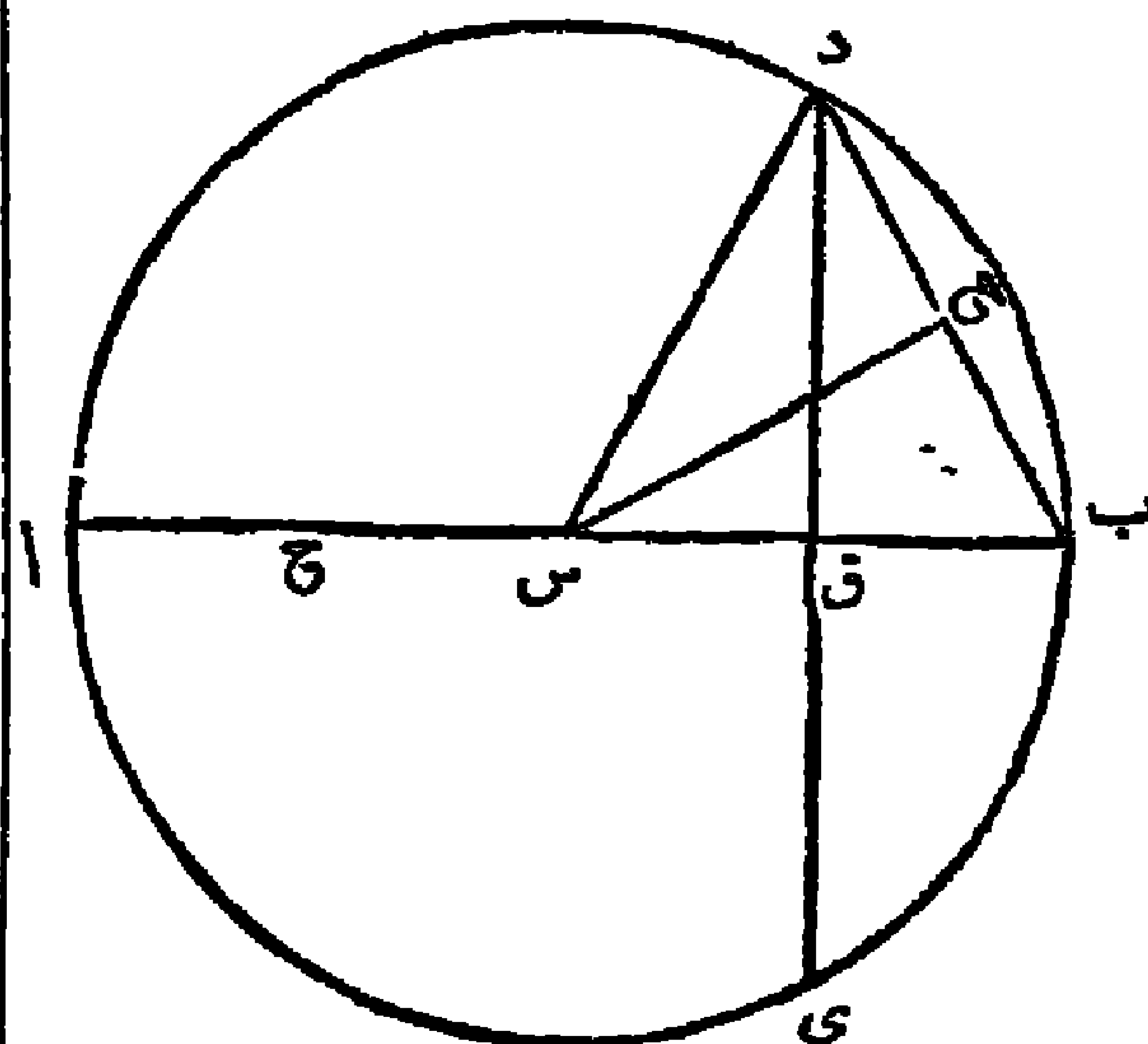
ليكن م محيط شكل يشبه المتقدم ذكرهُ محيط بالدائرة ثم (فرع ٢ ق ٢ ك ٥ مضافات) ط : اس :: −٦٢٨٢،١٠٥٦ : م ولكن ط = +٩٩٩،٤٦٤٥٨ فلنا +٩٩٩،٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: −٦٢٨٢،١٠٥٦ : م فاذا فُرِض مقدار اخر ن حتى تكون نسبة ٩٩٩،٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: −٦٢٨٢،١٠٥٦ : ن فاذًا (ق ٢٣ ك ٥) +٩٩٩،٤٦٤٥٨ : ٩٩٩،٤٦٤٥٨ :: ن : م ولكون الاول اكبر من الثاني فالثالث اكبر من الرابع اي ن > م فاذا استُعلم متناسب رابع لهذه

الاعداد ٩٩٩،٤٦٤٥٨ و١٠٠٠ و٦٣٨٣،١٠٥٦ اي — ٦٣٨٥،٤٦١ قلنا ٩٩٩،٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: ٦٣٨٣،١٠٥٦ : — ٦٣٨٥،٤٦١ وحسبما تقدم ٩٩٩،٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: — ٦٣٨٣،١٠٥٦ : ن فلنا ايضاً ٦٣٨٣،١٠٥٦ : — ٦٣٨٣،١٠٥٦ :: — ٦٣٨٥،٤٦١ : ن. ولان الاول اكبر من الثاني فالثالث اكبر من الرابع اي — ٦٣٨٥،٤٦١ > ن. وقد تبرهن ان ن > م فاذًا ٦٣٨٥،٤٦١ اكبر من م محيط الشكل المحيط بالدائرة ذي الستة والتسعين ضلعًا اي محيط ذلك الشكل هو اقلّ من ٦٣٨٥،٤٦١ ومحيط الدائرة اقل من محيط الشكل ذي الاضلاع الكثيرة المحيط بها فبالحري محيط الدائرة اقل من ٦٣٨٥،٤٦١ فاذا انقسم نصف القطر الى ١٠٠٠ قسم يكون المحيط اقل من ٦٣٨٥،٤٦١ من تلك الاقسام فبين المحيط والقطر تناسب اصغر (ق٨ ك٥) من تناسب ٦٣٨٥،٤٦١ الى ٢٠٠٠ او من تناسب ٣١٤٢،٧٣٠٥ الى ١٠٠٠ ولكن تناسب ٢٢ الى ٧ هو اعظم من تناسب ٣١٤٢،٧٣٠٥ الى ١٠٠٠ اي اذا انقسم القطر الى سبعة اقسام يكون المحيط اقل من ٢٢ قسمًا منها

بقي علينا ان نبرهن ان زيادة المحيط على القطر هي اكثر من $\frac{١٠}{٧١}$ من القطر

قد تبرهن سابقًا ان س ج^{٢} = ٧٥٠٠٠٠ وس ج = — ٨٦٦،٠٢٥٤٠ فاذًا ا س + س ج = — ١٨٦٦،٠٢٥٤٠. ليكن ف كما تقدم عمودًا من المركز على وتر $\frac{١}{١٢}$ من المحيط فلنا

ف^{٢} = ا ح × (ا س + س ج) = ٥٠٠ × (— ١٨٦٦،٠٢٥٤٠) = — ٩٣٣٠١٢،٧٢ وف = — ٩٦٥،٩٢٥٨٠ وا س + ف = — ١٩٦٥،٩٢٥٨٠



ثم ليكن ر العمود من المركز على وتر $\frac{١}{٢٤}$ من المحيط فلنا ر^{٢} = ا ح (ا س + ف) = ٥٠٠ × (— ١٩٦٥،٩٢٥٨٠) = — ٩٨٢٩٦٣،٩٣ ور = — ٩٩١،٤٤٤٩٥ وا س + ر = — ١٩٩١،٤٤٤٩٥

ليكن ص العمود من المركز

على وتر ١/٤٨ من المحيط فلنا ص٢ = اح × (اس + ر) = ٥٠٠ × (− ١٩٩١،٤٤٤٩٥) = − ٤٧٥، ٩٩٥٧٢٢) وص = − ٩٩٧،٨٥٨٩٥

ثم ان مربع وتر ١/٩٦ من المحيط = اب × (اس − ص) = ٢٠٠٠ × (+ ٢،١٤١٠٥ = + ١،٤٢٨٢٤ . والوتر ذاتهُ = + ٦٥،٤٣٧٧ لانَّ (٦٥،٤٣٧٧)٢ اقلّ من ١، ٤٢٨٢ . واذا كان وتر ١/٩٦ من المحيط + ٦٥،٤٣٧٧ فمحيط شكل ذي ٩٦ ضلعًا متساويًا في الدائرة = (+٦٥،٤٣٧٧) × ٩٦ = + ٦٢٨٢،٠١٩ ومحيط الدائرة اطول من محيط الشكل فيها فاذا انقسم نصف القطر الى ١٠٠٠ قسم يكون المحيط اكثر من ٦٢٨٢،٠١٩ من تلك الاقسام. واذا انقسم نصف القطر الى ٥٠٠ قسم يكون المحيط اكثر من ٣١٤١،٠٠٩ من تلك الاقسام ولكن تناسب ٣١٤١،٠٠٩ الى ١٠٠٠ هو اعظم من تناسب ١٠/٧١ + ٣ الى واحد فتناسب محيط الدائرة الى قطرها هو اعظم من تناسب ١٠/٧١ + ٣ الى واحد اي فضلة المحيط وثلاثة امثال القطر هي اكثر من ١٠/٧١ من القطر وقد تبرهن انها اقل من ١٠/٧٠ من القطر

فرعٌ اول. اذا فُرِض قطر دائرة نستعلم المحيط هكذا ٧ : ٢٢ :: القطر : كمية رابعة اكبر من المحيط و ١ : ٣ + ١٠/٧١ او ٧١ : ٢٢٣ :: القطر : كمية رابعة اصغر من المحيط

فرعٌ ثانٍ. ١/٧ − ١٠/٧١ = ١/٤٩٧ ففضلة الخطَّين المستعلَمين هي ١/٤٩٧ من القطر ففضلة المحيط واحدها اقل من ١/٤٩٧ من القطر

فرعٌ ثالث. نسبة ٧ : ٢٢ :: مربَّع نصف القطر : مساحة الدائرة تقريبًا. لانهُ قد تبرهن سابقًا (فرع اول ق ٥ ك ١ مضافات) ان نسبة قطر دائرة الى محيطها كمربع نصف القطر الى مساحتها ولكن نسبة القطر الى المحيط كنسبة ٢٢٠٧ تقريبًا فمربع نصف القطر الى المساحة كهذه النسبة المذكورة تقريبًا

تعليقة

كلما تعددت اضلاع الشكل في الدائرة والشكل المحيط بها قلَّت الفضلة بينهما وبين احدها والمحيط كما يُرى من هذا الجدول الذي فيهِ حُسِب نصف القطر واحدًا

عدد الاضلاع	محيط الشكل في الدائرة	محيط الشكل حول الدائرة
٦	٦،٠٠٠٠٠٠	— ٦،٨٢٢٠٣٣
١٢	+ ٦،٢١١٦٥٧	— ٦،٤٣٠٧٨١
٢٤	+ ٦،٢٦٥٢٥٧	— ٦،٣١٩٣٢٠
٤٨	+ ٦،٢٧٨٧٠٠	— ٦،٢٩٢١٧٣
٩٦	+ ٦،٢٨٢٠٦٣	— ٦،٢٨٥٤٣٠
١٩٢	+ ٦،٢٨٢٩٠٤	— ٦،٢٨٣٧٤٧
٣٨٤	+ ٦،٢٨٣١١٥	— ٦،٢٨٣٣٢٧
٧٦٨	+ ٦،٢٨٣١٦٧	— ٦،٢٨٣٢٢١
١٥٣٦	+ ٦،٢٨٣١٨٠	— ٦،٢٨٣١٩٥
٣٠٧٢	+ ٦،٢٨٣١٨٤	— ٦،٢٨٣١٨٨
٦١٤٤	+ ٦،٢٨٣١٨٥	— ٦،٢٨٣١٨٦

فنرى فصلة المحيطين اقل من واحد في المرتبة السادسة من الكسور العشرية اي اقل من ١/١٠٠٠٠٠٠ من نصف القطر فالخطا في معرفة محيط الدائرة هو اقل من ١/١٠٠٠٠٠٠ من نصف قطرها فاذا فرض ن = نصف القطر فالمحيط هو اكثر من ن × ٦،٢٨٣١٨٥ او من ٢ن × ٣،١٤١٥٩٢ واقل من ٢ن × ٣،١٤١٥٩٣ وفضلتهما انما هي ١/١٠٠٠٠٠٠ من نصف القطر

وهكذا ن² × ٣،١٤١٥٩٢ اقل مساحة الدائرة ون² × ٣،١٤١٥٩٣ اكثر من مساحة الدائرة وفضلتهما هي ١/١٠٠٠٠٠٠ من مربع نصف القطر. وعلى هذا الاسلوب يتقرب الى الصحيح اكثر مما تقدم ولكن الى الآن لم توجد نسبة القطر الى المحيط تماماً

اصول الهندسة

مضافات

الكتاب الثاني

في تقاطع السطوح

حدود

١ الخطّ المستقيم العموديّ على سطحٍ هو ما احدث زاوية قائمة مع كل خطٍّ مستقيم في ذلك السطح

٢ اذا تقاطع سطحان وكانت كل الخطوط المستقيمة في احدهما العموديّة على خطّ التقاطع عموديّةً ايضاً على السطح الآخر فالسطح الاول عموديّ على الثاني

٣ ميل خطّ مستقيم على سطح هو الزاوية الحادّة الحادثة بين ذلك الخطّ وخطٍّ آخر مستقيم مرسوم من ملتقى الخطّ الاول بالسطح الى ملتقى السطح وعموديٍّ عليهِ من اية نقطة كانت في الخط الاول

٤ الزاوية بين سطحين يتقاطعان هي الحادثة بين خطّين مستقيمين كل واحدٍ منهما في سطح من السطحين وكل واحد منهما عموديّ على خط تقاطعهما . ومن الزاويتين المتواليتين الحادثتين من ذلك فالحادّة هي ميل احد السطحين الآخر

٥ اذا عدلت الزاوية المذكورة الحادثة بين سطحين الزاويةَ الحادثة بين سطحين آخرين يقال ان ميل الاولين مثل ميل الآخرَين

٦ الخطّ المستقيم الموازي سطحاً هو الذي لا يلاقي السطح ولو أُخرج على استقامتهِ الى غير نهاية

٧ السطوح المتوازية هي التي لا تتلاقى ولو امتدَّت الى غير نهاية

٨ الزاوية المجسَّمة هي الحادثة من التقاء ثلاث زوايا بسيطة فاكثر ليست في سطحٍ واحدٍ

القضية الاولى . ن

لا يكون قسمٌ من خطٍ مستقيم في سطحٍ وقسم اخر منهُ فوق ذلك السطح

ان كان ممكنًا ليكن ا ب س خطًّا مستقيًا وليكن القسم ا ب منهُ في سطح والقسم ب س منهُ فوق السطح. فلكون ا ب في سطح فيمكن اخراجهُ في ذلك السطح (اولى المقتضيات ك١) فليُخرج الى د فيكون ا ب س ا ب د خطَّين مستقيمين لهما قسم مسترك ا ب وذلك غير ممكن (فرع حد ٢ ك١) فلا يكون ا ب س خطًّا مستقيمًا

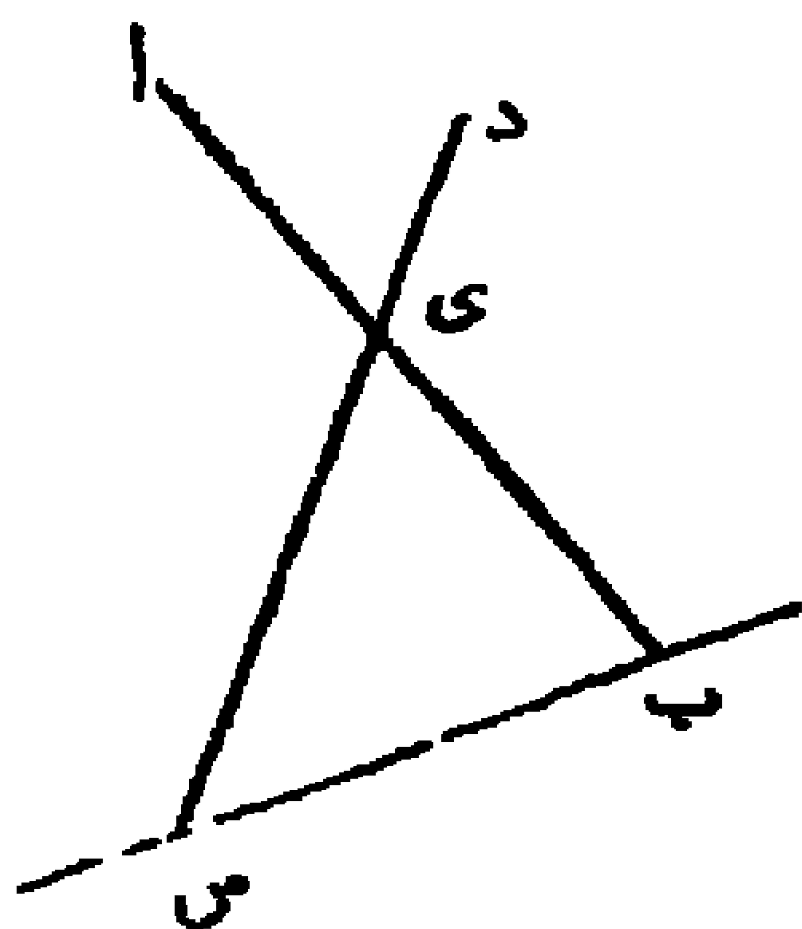


القضية الثانية . ن

اذا التقت ثلاثة خطوط مستقيمة في غير نقطة واحدة فهي في سطحٍ واحد

لتتلاقَ الخطوط الثلاثة المستقيمة ا ب ب س س د في النقط ى ب س فهي في سطحٍ واحدٍ

ليمرَّ سطحٌ بالخط المستقيم ى ب وليُدَر السطح على ب ى حتى يمرَّ بالنقطة س. فلكون ى وس في هذا السطح يكون الخطُّ ى س فيهِ ايضًا وقد فُرِض ان ى ب فيهِ فالخطوط الثلاثة ى ب ب س س ى هي في السطح الواحد وهي اقسام من ب ا ب س س د ولا يكون قسم من خطٍ في



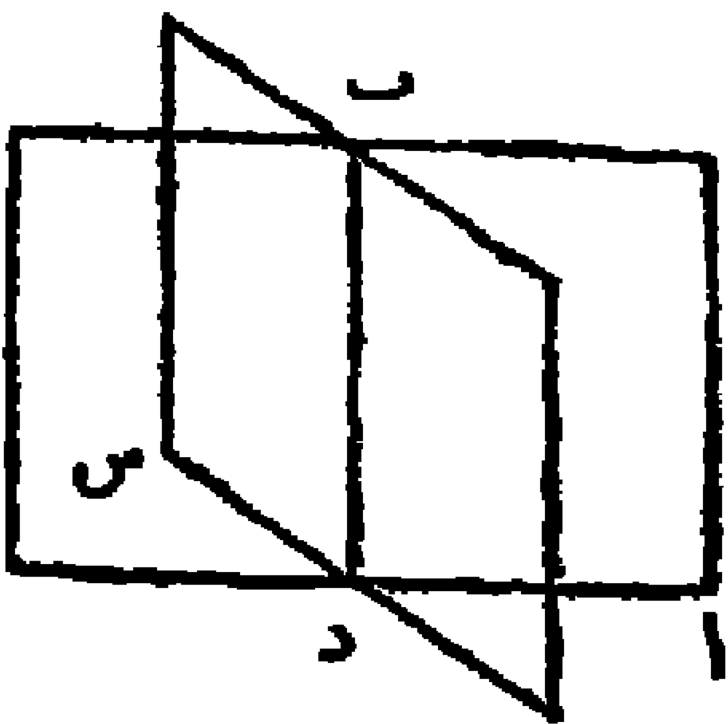
سطح وقسم اخر منهُ في غيرهِ (ق ا ك ٢ مضافات) فكل الخطوط الثلاثة في سطحٍ واحدٍ

فرع. كل خطَّين متقاطعين هما في سطحٍ واحدٍ. وكل ثلاث نُقَط كيفما فُرِضَت هي في سطحٍ واحدٍ

القضية الثالثة. ن

اذا تقاطع سطحان فموضع التقاطع هو خطٌّ مستقيم

ليتقاطع السطحان ا ب وب س ولتكن ب ود نقطتين في خطّ التقاطع. ارسم الخطّ المستقيم ب د. فلأنَّ النقطتين ب ود في السطح ا ب فالخط ب د هو في ا ب (حد ٥ ك ا) ولهذا السبب ايضًا هو في ب س فالخط المستقيم ب د مشترك بين السطحين ا ب وب س اي هو موضع تقاطعهما

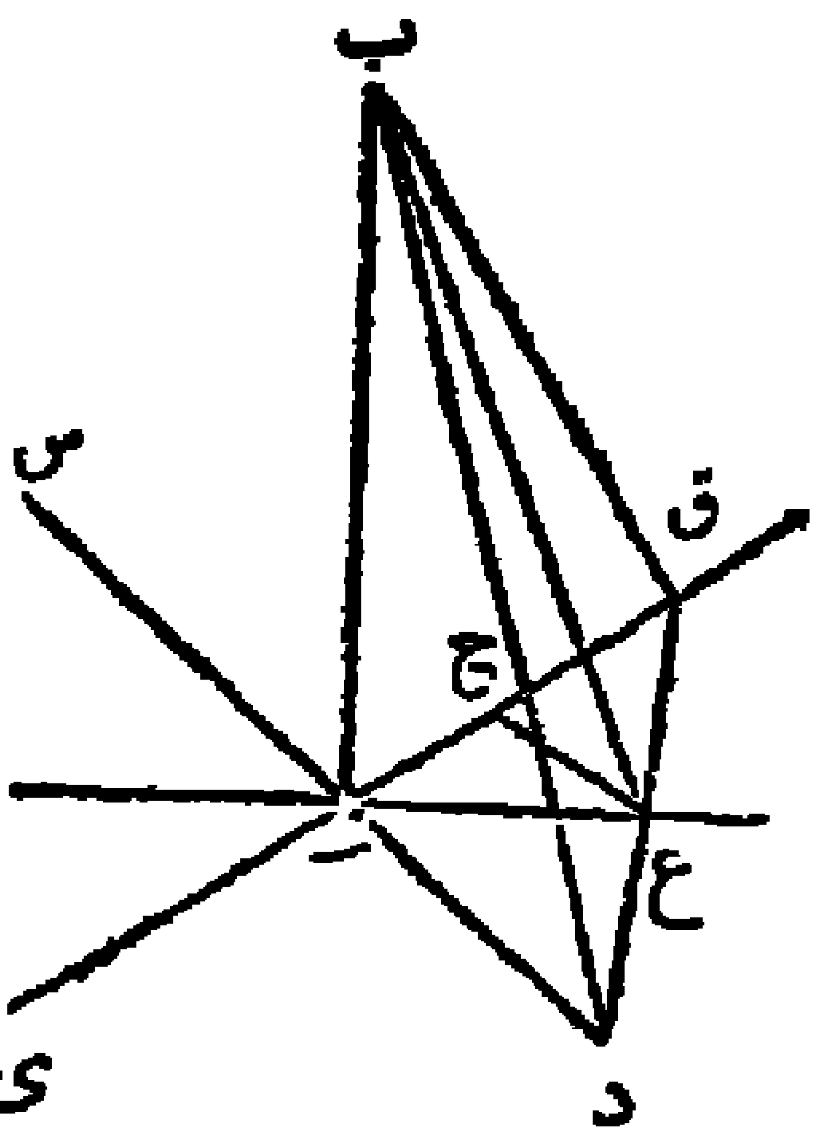


القضية الرابعة. ن

اذا كان خطٌّ مستقيم عمودًا على خطَّين مستقيمين على ملتقاهما فهو عمود على السطح الذي فيهِ الخطان

ليكن ا ب عمودًا على الخطَّين المستقيمين ى ق د س على نقطة التقائهما ا فهو عمود على السطح المارّ بالخطَّين ى ق د س

من ا ارسم اي خطٍّ شئت في السطح الذي فيهِ ى ق ود س مثل الخط ا ع. ولتكن ع نقطة في ذلك الخط. ارسم غ ح حتى يوازي ا د واجعل ح ق يعدل ح ا وارسم ق ع وليخرج حتى يلاقي س ا في د. ارسم ب د ب ع ب ق



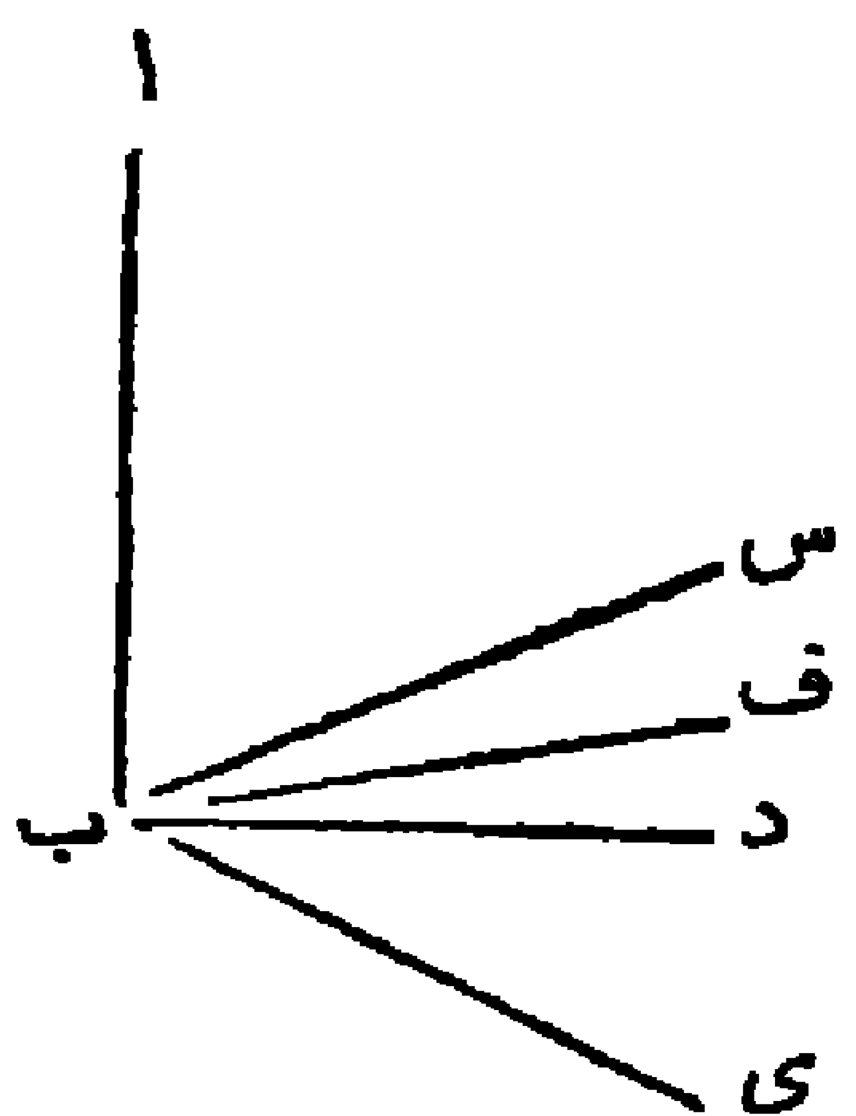
لانَّ غ ح يوازي ا د وح ق = ح ا فلذلك

ق غ=غ د فالخط ق د قد تنصَّف في غ. ولانَّ ب ا د قائمة ب د٢=ب ا٢+ا د٢ (ق٤٧ ك١) وب ق٢=ب ا٢+ا ق٢ وب د٢+ب ق٢=٢ب ا٢+ا د٢+ا ق٢. ولانَّ د ق قد تنصف في غ (ق ا ك٣) ا د٢+ا ق٢=٢ا غ٢+٢غ ق٢ فاذًا ب د٢+ب ق٢=٢ا ب٢+٢ا غ٢+٢غ ق٢ ولكن ب د٢+ب ق٢=٢ب غ٢+٢غ ق٢ (ق ا ك ا) فاذًا ٢ب غ٢+٢غ ق٢=٢ا ب٢+٢ا غ٢+٢غ ق٢. اطرح ٢غ ق٢ من الجانبين فيبقى ٢ب غ٢=٢ا ب٢+٢ا غ٢ او ب غ٢=ا ب٢+ا غ٢ فتكون ب ا غ قائمة (ق٤٨ ك١) وا غ هو في السطح الذي فيهِ ا د وا ق والخطّ العمودي على خطين في سطح ما هو عمودي على ذلك السطح (حدّ ا ك٢ مضافات) فالخط ا ب هو عمودٌ على سطح الخطين ا ق ا د

القضية الخامسة. ن

اذا تلاقت ثلاثة خطوط مستقيمة في نقطة واحدة وكان خطٌّ اخر مستقيم عمودًا على الثلاثة في تلك النقطة فالخطوط الثلاثة في سطح واحدٍ

ليكن ب س ب د ب ى ثلاثة خطوط مستقيمة متلاقية في النقطة ب وليكن ب ا عمودًا عليها في تلك النقطة فهذه الخطوط الثلثة هي في سطح واحدٍ



والاَّ فان كان ممكنًا ليكن ب د وب ى في سطح وب س فوقهُ وليمرَّ سطح في ا ب وب س وليكن موضع تقاطعهِ مع السطح الذي فيهِ ب د وب ى خطًّا مستقيمًا (ق٣ ك٢ مضافات) وليكن ب ف ذلك الخطّ فالخطوط الثلثة المستقيمة ا ب ب س ب ف هي في سطح واحدٍ اي الذي يمرُّ في ا ب وب س. ولكون ا ب عمودًا على كلٍ من الخطين المستقيمين ب د ب ي هو عمود على السطح المارّ فيهما (ق٤ ك٢ مضافات) وهو عمود على كل خطٍّ في ذلك السطح وب ف هو في السطح الذي يلاقيهِ فالزاوية

ا ب ف قائمة وقد فُرِض ان ا ب س قائمة فالزاوية ا ب ف = ا ث س وهما في سطحٍ واحدٍ وذلك لا يمكن. فالخطّ المستقيم ب س ليس فوق السطح الذي فيهِ ب د وب ى فالخطوط الثلثة المستقيمة ب س ب د ب ى في سطحٍ واحدٍ

القضية السادسة. ن

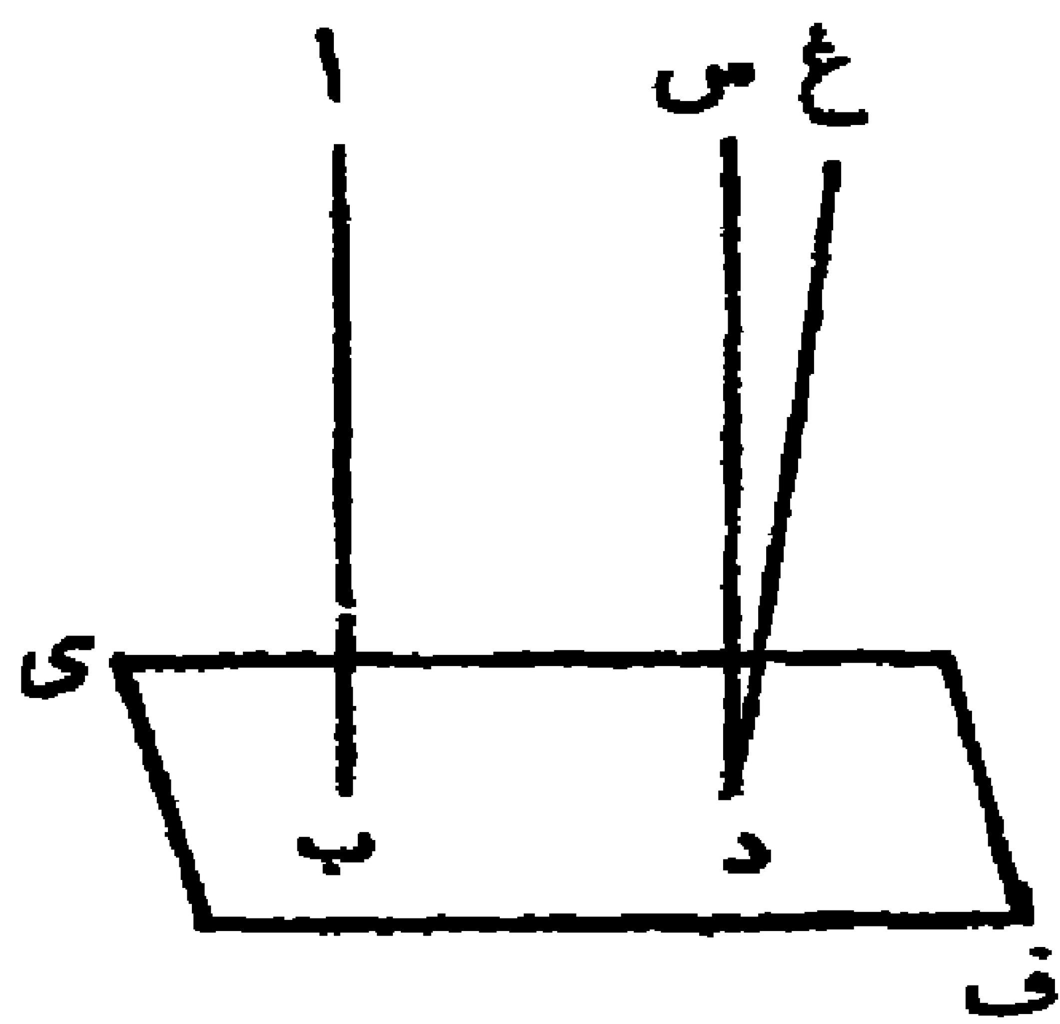
خطّان مستقيمان عمودان على سطحٍ واحدٍ هما متوازيان

ليكن الخطّان المستقيمان ا ب وس د عمودين على السطح ب ى د فهما متوازيان ليلاقيا السطح في النقطتين ب ود. ارسم د ى عمودًا على د ب في السطح ب د ى ولتكن ى نقطة ما فيهِ. ارسم ا ى ا د ى ب. فلكون ا ب ى قائمة ا ب٢ + ب ى٢ = ا ى٢ (ق٤٧ ك١) ولكون ب د ى قائمة ب ى٢ = ب د٢ + د ى٢ فاذًا ا ب٢ + ب د٢ + د ى٢ = ا ى٢ وا ب٢ + ب د٢ = ا د٢ فاذًا ا د٢ + د ى٢ = ا ى٢ فتكون ا د ى قائمة (ق٤٨ ك١) فالخط ى د هو عمود على الخطوط الثلاثة ب د د ا د س فهي في سطحٍ واحدٍ (ق٥ ك٢ مضافات) وا ب هو في السطح الذي فيهِ ب د ود ا لان كل ثلاثة خطوط متلاقية هي في سطحٍ واحدٍ (ق٢ ك٢ مضافات) فاذًا ا ب ب د د س في سطح واحد وكل واحد من الزاويتين ا ب د ب د س قائمة فالخطّ ا ب يوازي الخطّ س د (ق٢٨ ك١)

القضية السابعة. ن

اذا كان خطّان مستقيمان متوازيَين وكان احدهما عمودًا على سطح فالاخر ايضًا عمود على ذلك السطح .

ليكن ا ب وس د خطّين متوازيَين وليكن احدهما ا ب عمودًا على سطح ى ف



فيكون س د ايضاً عموداً عليهِ

وان لم يكن س د عموداً على السطح الذي ا ب عمود عليهِ فليكن د غ عموداً عليهِ فاذاً د غ يوازي ا ب (ق ٦ ك ٢ مضافات) وكلا د س د غ يوازي ا ب وقد رُسِما من نقطة واحدة وذالك غير ممكن (اولية ١١ ك ١)

القضية الثامنة . ن

خطَّان مستقيمان يوازيان خطاً ثالثاً مستقيماً هما متوازيان وان لم تكن في سطحٍ واحدٍ

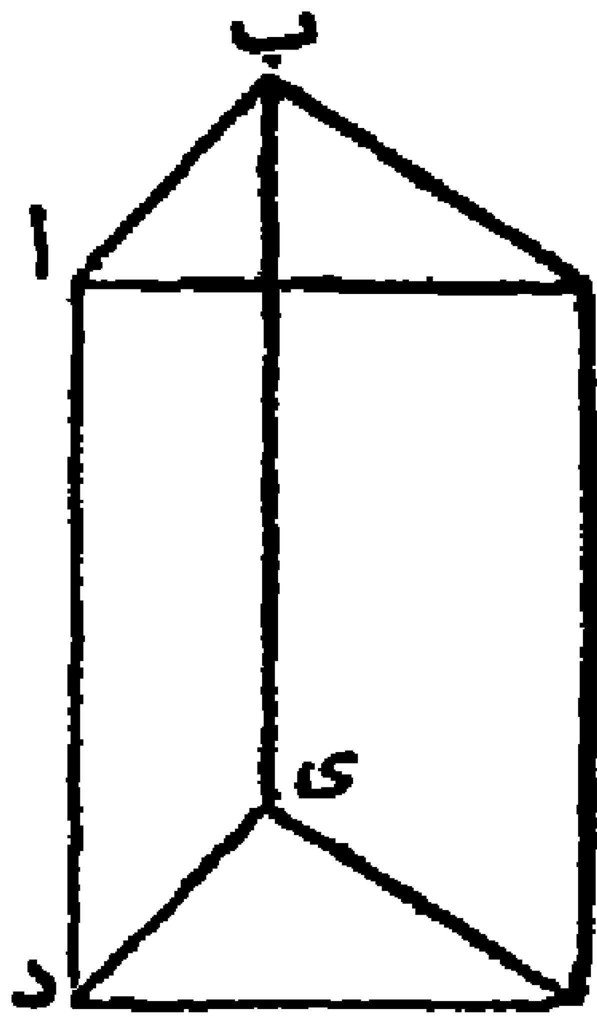
لنفرض ان الخطَّين المستقيمين ا ب وس د يوازيان الخطَّ المستقيم ى ف وهو ليس في سطحها فالخط ا ب يوازي الخط س د

في ى ف خذ أيّة نقطة شئت مثل غ ومنها ارسم الخطَّ المستقيم غ ح في السطح المارّ بالخطين ا ب ى ف وليكن غ ح عموداً على ى ف غ ك عموداً على ى ف في السطح الذي يمرّ بالخطين ى ف س د. ولكون ى ف عموداً على ح غ وك غ فهو عمود على السطح المارّ بهما ح غ ك (ق ٤ ك ٢ مضافات) وى ف يوازى ا ب فاذاً ا ب هو عمود على السطح ح غ ك (ق ٧ ك ٢ مضافات) ولهذا السبب س د عمود على السطح ح غ ك فكلا ا ب وس د عمود على سطح واحد فهما متوازيان (ق ٦ ك ٢ مضافات)

القضية التاسعة . ن

اذا تلاقى خطَّان مستقيمان ووازيا خطَّين اخرين مستقيمين متلاقيين وليسا في سطح الاولَين فالزاوية الحادثة بين الاولين تعدل الحادثة بين الاخرَين

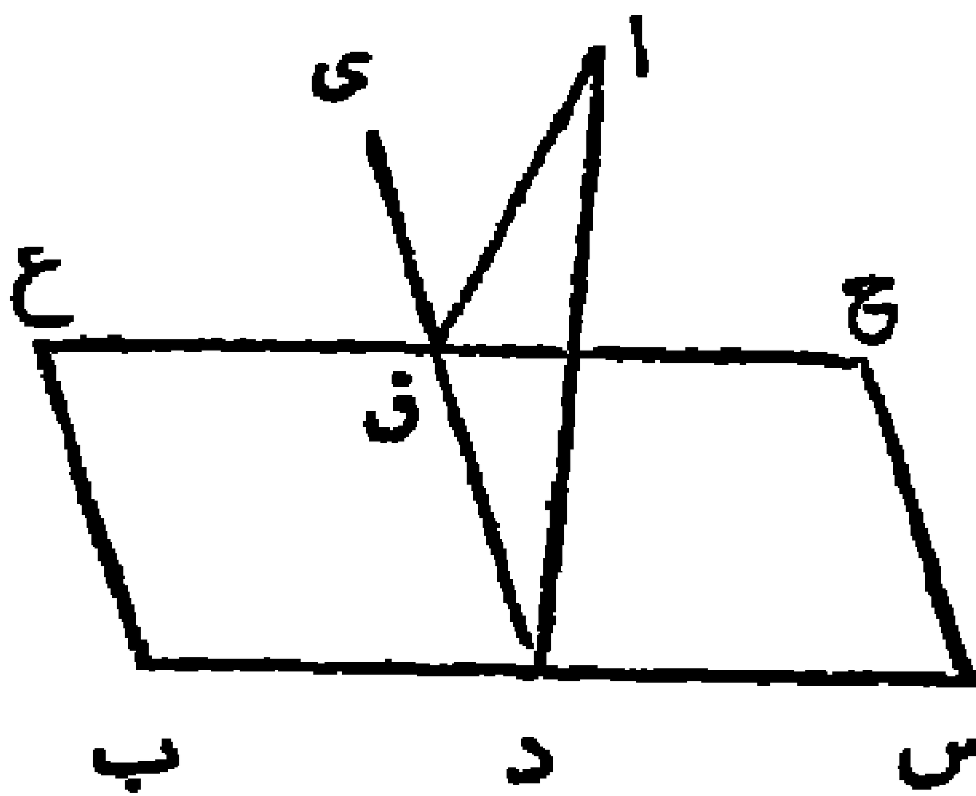
ليكن ا ب س ب خطّين مستقيمين وليتلاقيا في ب وليوازيا خطّين اخرين مستقيمين د ى ف ى الملتقيين في ى وليسا في سطح الاولين فالزاوية ا ب س تعدل الزاوية د ى ف. اقطع الاقسام المتساوية ب ا ب س ى د ى ف وارسم ا د ب ى س ف ا س د ف. فلكون ب ا = ى د ويوازيهِ فالخطّ ا د = ب ى ويوازيهِ (ق ٣٣ ك ١) ولهذا السبب س ف = ب ي ويوازيهِ فاذًا ا د = س ف ويوازيهِ (ق ٨ ك ٢ مضافات) وا س = د ف ويوازيهِ (ق ٣٣ ك ١) فلكون ا ب وب س يعدلان د ى وى ف والقاعدة ا س = القاعدة د ف فالزاوية ا ب س = الزاوية د ى ف (ق ٨ ك ١)



القضية العاشرة ع

علينا ان نرسم عمودًا على سطحٍ من نقطةٍ مفروضة فوقهُ

لتكن ا النقطة المفروضة وب ح السطح المعروض. علينا ان نرسم عمودًا على ب ح من النقطة ا



ارسم في السطح ايّ خطّ مستقيم شئت مثل ب س ومن ا ارسم ا د عمودًا على ب س (ق ١٢ ك ١) فاذا كان ا د عمودًا على السطح ب ح ايضًا فقد تمّ العمل. والاَّ فمن النقطة د ارسم الخطّ المستقيم د ى في السطح ب ح واجعلهُ عمودًا على ب س. ومن ا ارسم ا ق عمودًا على د ى. وفي ق ارسم غ ق ح حتى يوازي ب س (ق ٣١ ك ١)

فلكون ب س عمودًا على د ا وعلى د ى فهو عمود على السطح المارّ بهما (ق ٤ ك ٢ مضافات) وغ ح يوازي ب س فهو ايضًا عمود على ذلك السطح (ق ٧ ك ٢ مضافات) وهو عمود على كل خطّ مستقيم في ذلك السطح (حدّ ١ ك ٢ مضافات) ويلاقيهِ ا ق الذي هو في السطح المذكور اي المارّ بالخطين ا د ود ى فاذًا ا ق عمود على غ ح ود ى على موضع التقائهما فهو عمود على سطحهما (ق ٤ ك ٢ مضافات) وذلك السطح هو ب ح فقد رُسم ا ق عمودًا على السطح ب ح من النقطة المفروضة

فرع. لو فُرِض ان يُرسَم عمود على سطح من نقطة فيهِ مثل س فعيّنْ نقطة فوقهُ مثل ا وارسم ا ق عمودًا على السطح ومن س ارسم خطًّا حتى يوازي ا ق فيكون عمودًا على السطح (ق ٧ ك ٣ مضافات)

القضية الحادية عشرة. ن

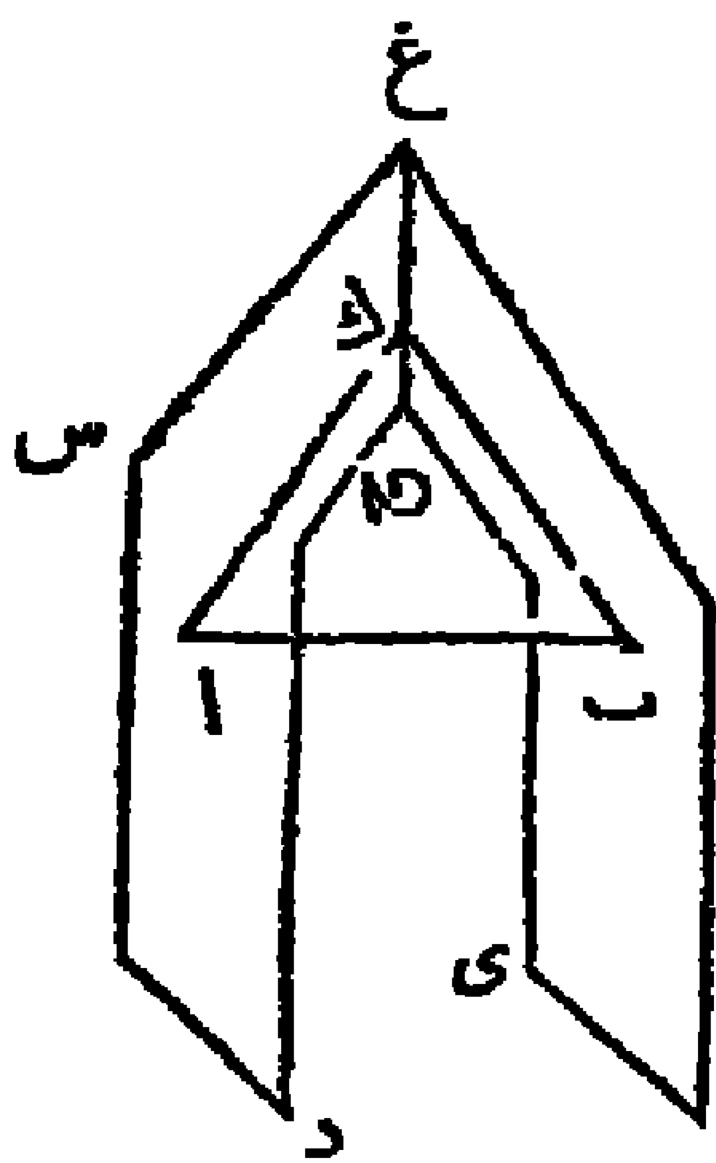
من نقطة واحدة في سطح لا يكون خطَّان مستقيمان عمودَين على ذلك السطح على جانبٍ واحدٍ منهُ. ومن نقطة فوقهُ لا يكون اكثر من خطٍ واحد عمودًا عليهِ

ان كان ممكنًا ليكن ا س ا ب عمودَين على سطح مفروض على نقطة واحدة منهُ هي ا وعلى جانب واحد منهُ وليمرّ سطح بهذين الخطَّين ب ا س ا فمحل تقاطع هذا السطح بالسطح المفروض هو خطٌ مستقيم مارٌّ بالنقطة ا (ق ٣ ك ٢ مضافات) ليكن د ا ى محل التقاطع فالخطوط المستقيمة ب ا س ا د ا ى هي في سطحٍ واحد. ولكون س ا عمودًا على السطح المفروض فهو عمود على كل خطٍ مستقيم يلاقيهِ في ذلك السطح فالزاوية س ا ى قائمة ولهذا السبب ايضًا ب ا ى قائمة وهما في سطحٍ واحدٍ وذاك غير ممكن. ومن نقطة مفروضة فوق السطح لا يكون الا خطٌ واحدٌ عمودًا على السطح والاَّ لكانا متوازيين (ق ٦ ك ٦ مضافات) وذاك محال

القضية الثانية عشرة. ن

اذا كان خطٌّ مستقيمٌ عمودًا على سطوح فتلك السطوح متوازية

ليكن الخطُّ المستقيم ا ب عمودًا على السطحين س د ى ف فهما متوازيان

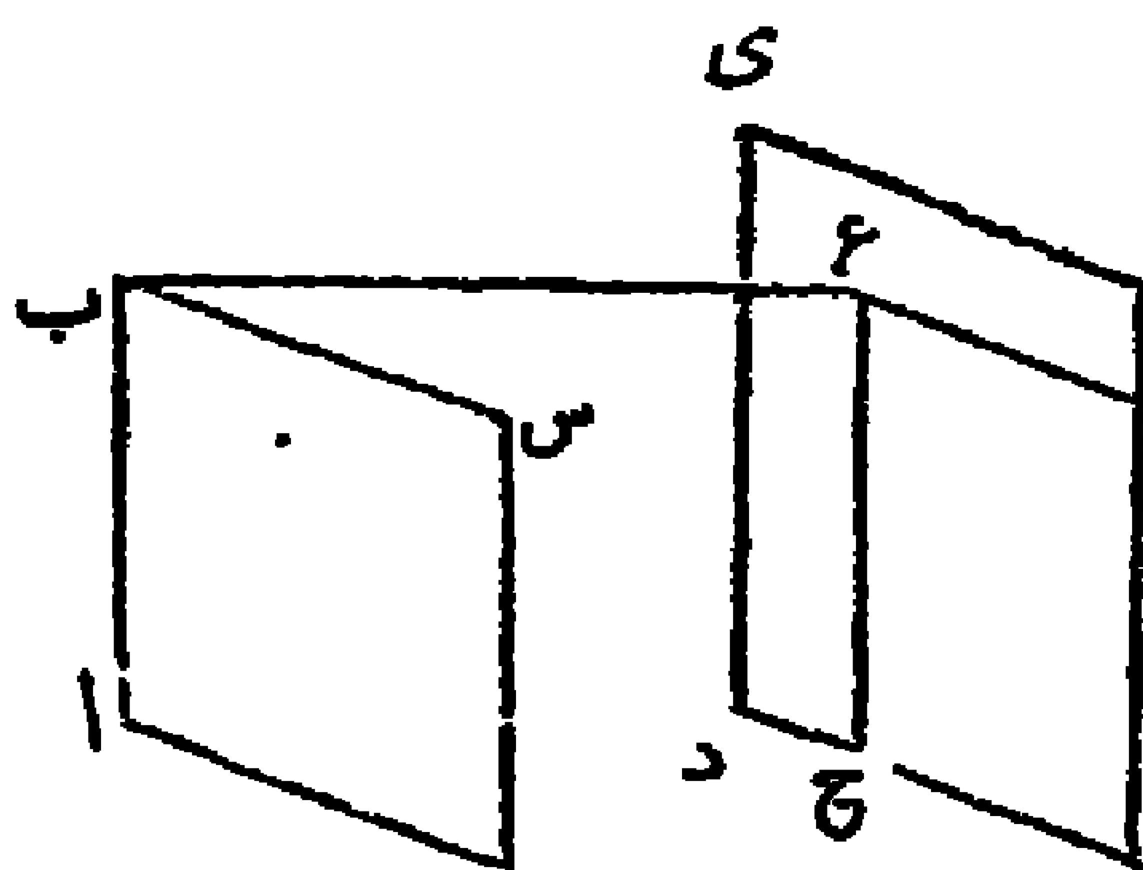


والا فلابد من التقائهما اذا أُخرجا ويكون محل تقاطعهما خطًّا مستقيمًا غ ح. خذ في غ ح اية نقطةٍ شئت مثل ك وارسم ا ك ب ك. فلكون ا ب عمودًا على السطح ى ف فهو عمود على كل خطٍ مستقيم يلاقيهِ في ذلك السطح (حد ا ك ٢ مضافات) فهو عمود على ب ك وك ب ا قائمة. ولهذا السبب ايضًا ب ا ك قائمة ففي المثلث ك ا ب قائمتان وذاك غير ممكن (ق ١٧ ك ١) فالسطحان لا يتلاقيان ولو أُخرجا فهما متوازيان (حد ٧ ك ٢ مضافات)

القضية الثالثة عشرة. ن

اذا كان خطَّان مستقيمان ملتقيان موازيين لخطَّين مستقيمين اخرين اللذين يلتقيان ايضًا وليسا في سطح الاولين فالسطح المارّ بالاوَّلين يوازي المارّ بالاخرَين

ليكن ا ب ب س خطين مستقيمين وليتلاقيا في ب وليوازيا خطين اخرين مستقيمين ليسا في سطحهما د ى ف ى اللذين يتلاقيان في ى. فالسطح المارّ بالاوَّلين يوازي المارّ بالاخرين



من ب ارسم ب غ عمودًا على السطح المارّ بالخطَّين د ى ى ف (ق ١٠ ك ٢ مضافات) وليلاقهِ في ع ومن غ ارسم غ ح حتى يوازي د ى (ق ٣١ ك ١) وغ ك حتى يوازي ف ى. فلكون ب ع عمودًا على سطح د ى ى ف فهو عمود على كل خطٍ يلاقيهِ في ذلك السطح (حد ا ك ٢ مضافات) فتكون كل واحدة من الزاويتين ك ع ب ح غ ب قائمة. ولكون ب ا يوازي ع ح (ق ٨ ك ٢ مضافات) فالزاويتان ح غ ب ا ب غ معًا تعدلان قائمتين وح ح ب قائمة فتكون ا ب غ ايضًا قائمة وغ ب عمود على ب ا ولهذا السبب ايضًا هو عمود على ب س. فهو عمود

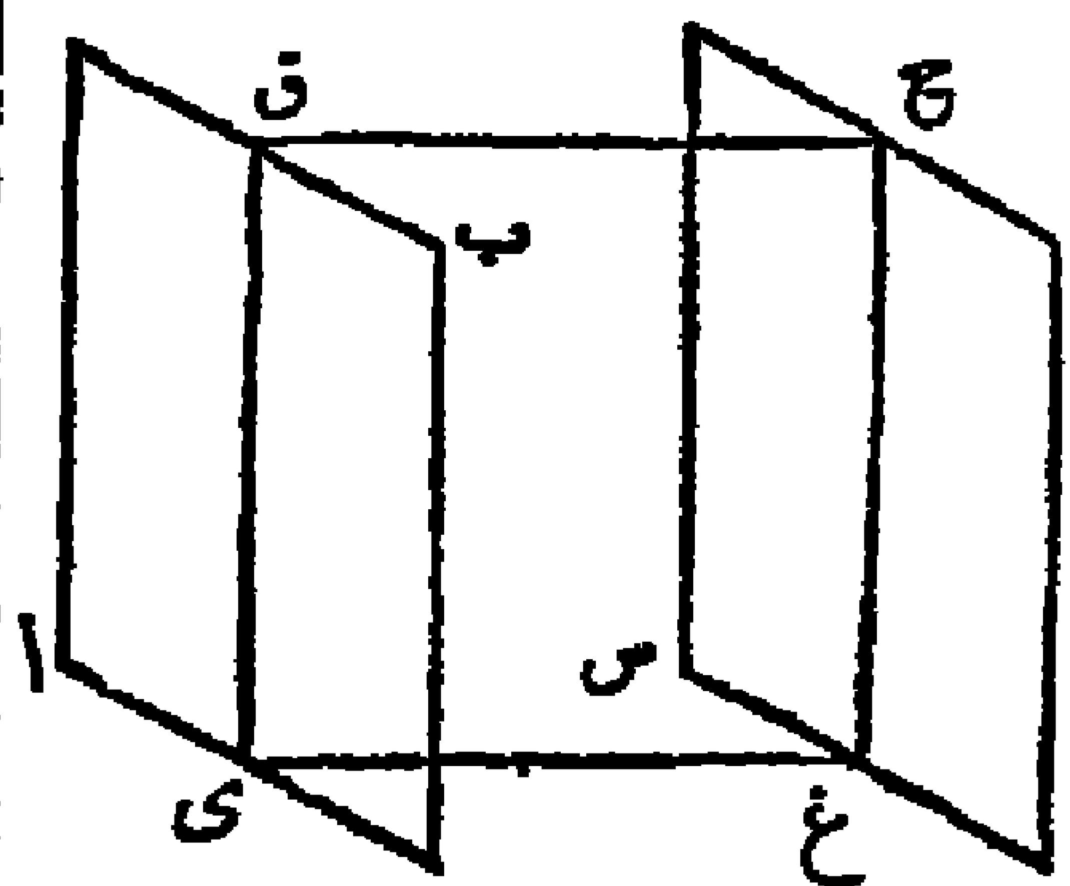
على السطح المارّ بهما وقد رُسم عمودًا على سطح د ى ى ف فهو عمود على السطحين فهما متوازيان (ق ١٢ ك ٣ مضافات)

فرع. اذا لاقى خطٌ مستقيم سطحين متوازيين وكان عمودًا على احدهما فهو عمود على الثاني ايضاً

القضية الرابعة عشرة. ن

اذا قطع سطحٌ سطحين متوازيين فخطّا التقاطع متوازيان

ليكن ا ب وس د سطحين متوازيين وليقطعهما السطح ى ق غ ح فخطّا التقاطع ى ق غ ح متوازيان

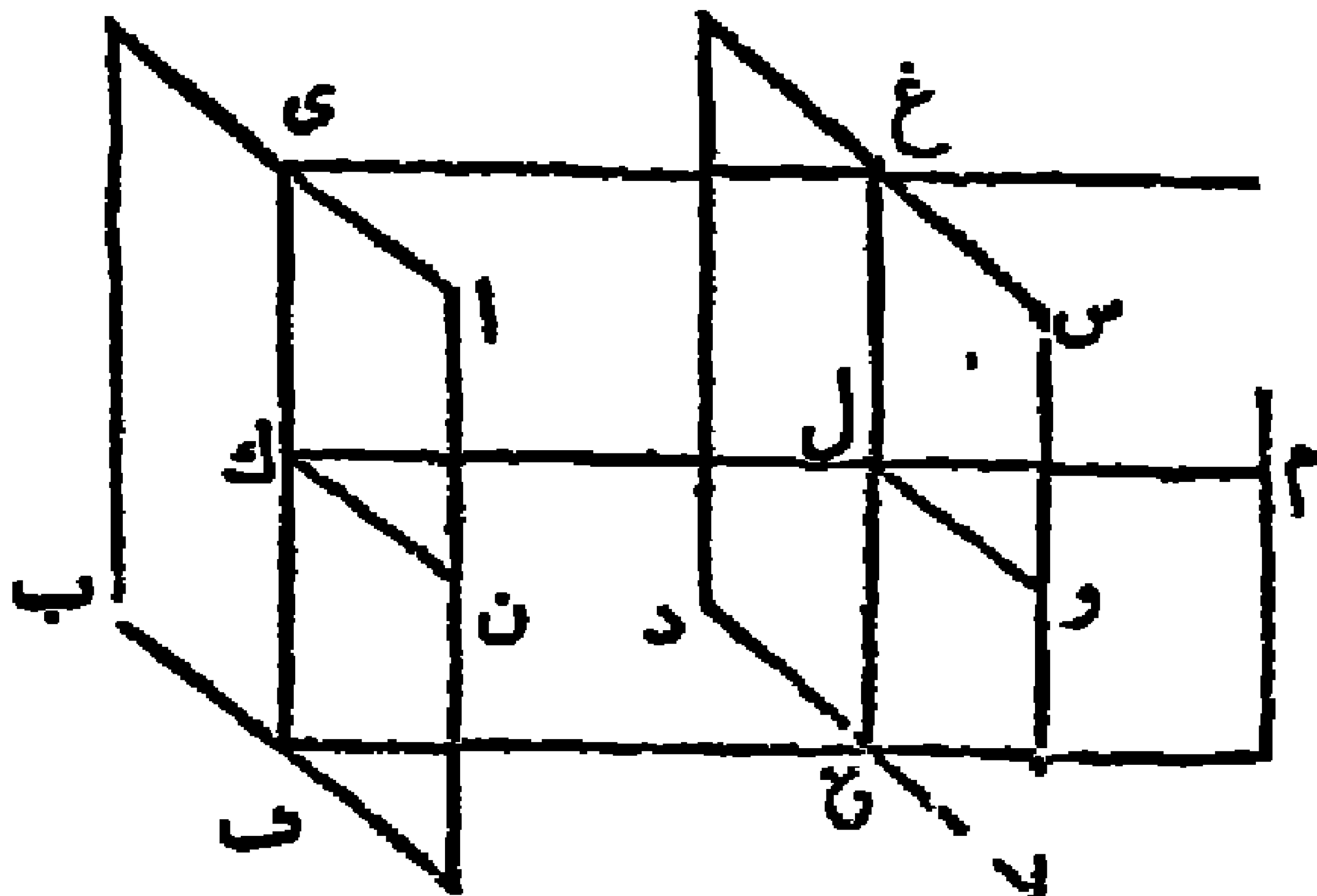


لانّ الخطّ ى ق في السطح ا ب والخطّ غ ح في السطح س د وكل واحد يبقى في سطحه مهما أُخرج والسطحان لا يلتقيان لانهما متوازيان فالخطان لا يتلاقيان ولو أُخرجا فهما متوازيان (حد ٣٠ ك ١)

القضية الخامسة عشرة. ن

اذا قطع سطحٌ سطحين متوازيين فلهما ميلٌ واحد على ذلك السطح

ليكن ا ب وس د سطحين متوازيين وليقطعهما السطح ى ح فميل ا ب على ى ح هو مثل ميل س د على ى ح



ليكن الخطّان المستقيمان ى ف وغ ح موضعَي التقاطع. من ايّة نقطة شئتَ في ى ف مثل ك ارسم الخط ك م في السطح ى ح عمودًا على ى ف وليلاقِ غ ح في ل وارسم ك ن عمودًا على ى ف في السطح ا ب وليمرّ سطح بالخطّين المستقيمين ك ن

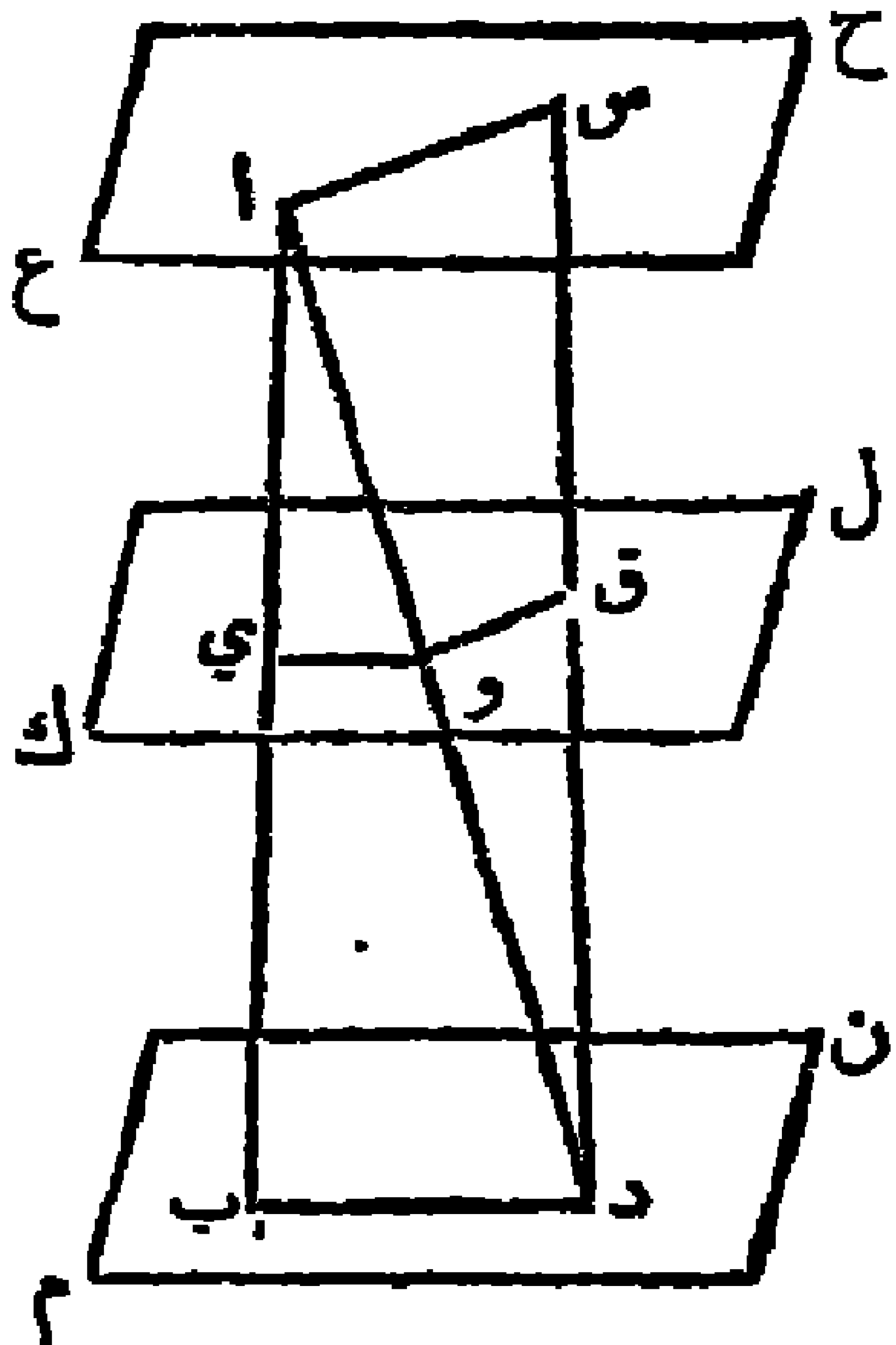
ك م حتى يقطع السطح س د في الخط ل و. فلكون السطح ى ح يلاقي السطحين المتوازيين ا ب س د في الخطين ى ف غ ح فهذان الخطان متوازيان (ق١٤ ك٢ مضافات) وى ق انما هو عمود على السطح المارّ بالخطين ك ن ك م (ق٤ ك٢ مضافات) لانهُ عمود على ك ن وك م فالخط غ ح ايضاً عمود على ذلك السطح (ق٧ ك٢ مضافات) فهو عمود على الخطين ل م ل و اللذين يلاقيانهِ في ذلك السطح. ولانّ ل م ل و عمودان على ل غ محل تقاطع السطحين س د وى ح فالزاوية و ل م هي ميل السطح س د على السطح ى ح (حد٤ ك٢ مضافات) وهكذا ايضاً م ك ن هي ميل السطح ا ب على السطح ى ح. ون ك يوازي و ل فالزاوية الداخلة ن ك م تعدل الخارجة م ل و (ق٢٩ ك١) فميل السطح ا ب على ى ح يعدل ميل السطح س د على ى ح

القضية السادسة عشرة. ن

سطوح متوازية اذا قطعت خطين مستقيمين تقطعهما على نسبة واحدة

ليكن غ ح ك ل م ن سطوحاً متوازية ولتقطع الخطين المستقيمين ا ب س د في النقط ا ى ب س ق د فنسبة ا ى:

ى ب :: س ق : ق د

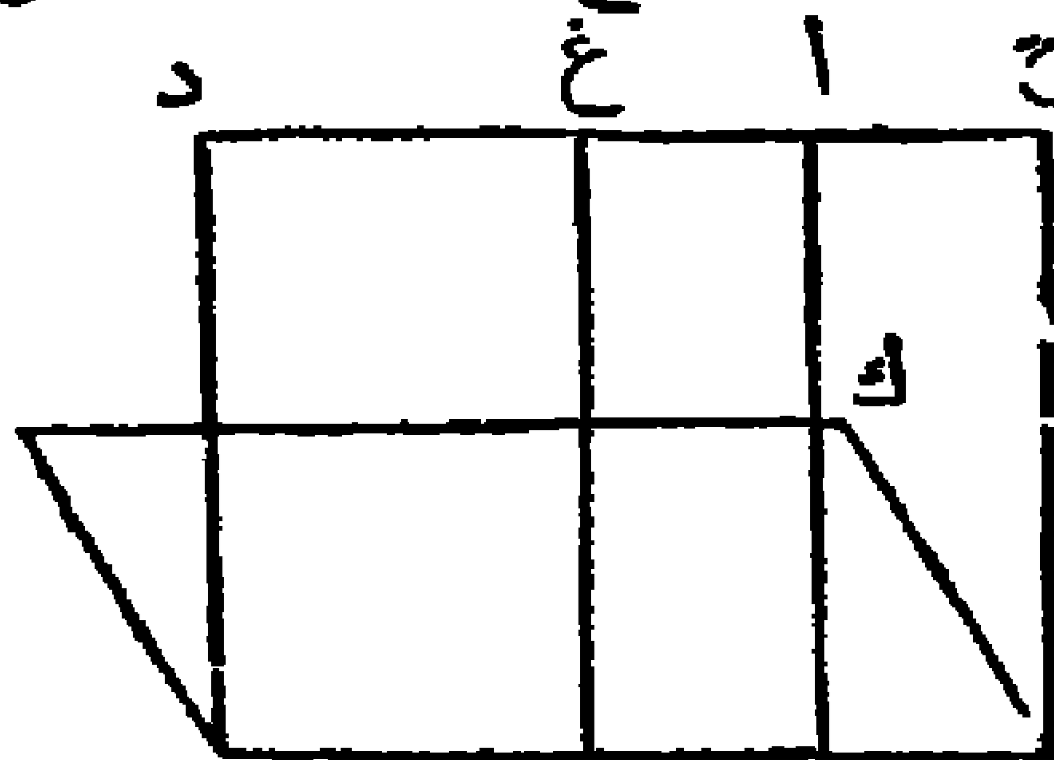


ارسم ا س ب د ا د. واما ا د فليلاقِ السطح ك ل في و. ارسم ى و و ق. فلانّ السطحين المتوازيين ك ل م ن قد قطعهما السطح ى ب د و فخطا التقاطع ى و ب د متوازيان (ق١٤ ك٢ مضافات) وهكذا ايضاً يبرهن ان ا س و ق متوازيان. ولكون ى و يوازي ب د ضلعاً من المثلث ا ب د فنسبة ا ى : ى ب :: ا و : و د (ق٢ ك٦) ولانّ ق و يوازي ا س ضلعاً من المثلث ا د س فنسبة ا و : و د :: س ق : ق د فبالمساواة (ق١١ ك٥) ا ى : ى ب :: س ق : ق د

القضية السابعة عشرة. ن

اذا كان خطٌ مستقيمٌ عمودًا على سطحٍ فكل سطحٍ مارّ بذلك الخط هو عمود على السطح الاول

ليكن الخطُّ المستقيم ا ب عمودًا على السطح س ك فكل سطح يمرُّ بالخط ا ب هو عمود على السطح س ك

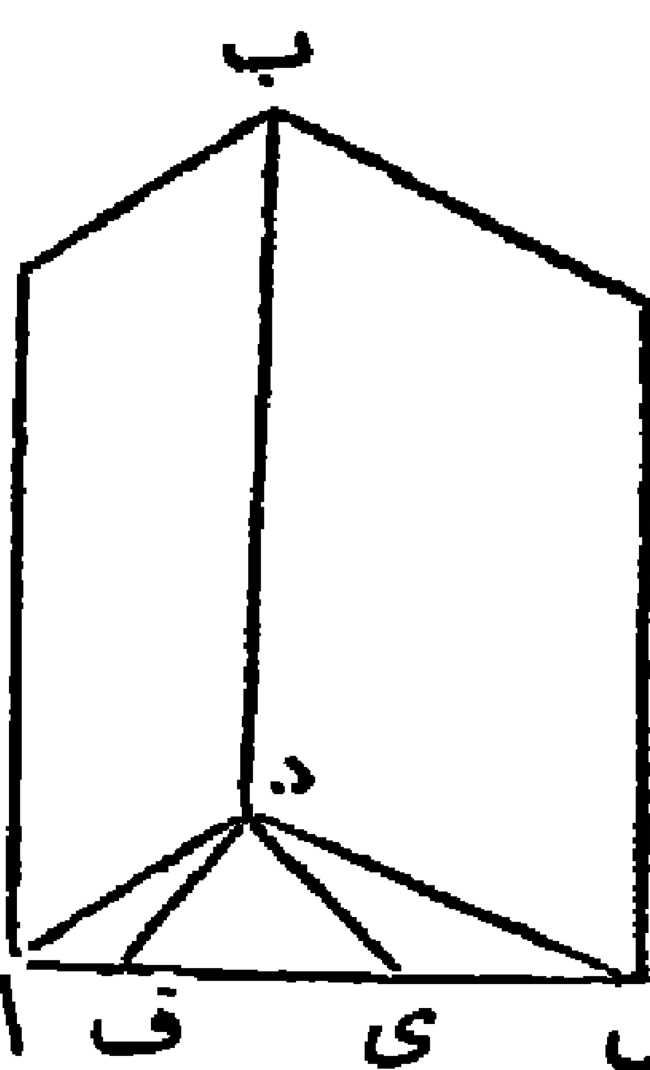


ليمرّ سطحٌ مثل د ى في الخطّ ا ب وليكن الخطّ س ى محل تقاطعهِ بالسطح س ك. في س ى خذ اية نقطة شئت مثل ف وفي السطح د ى ارسم ف غ عمودًا على س ى. ولكون ا ب عمودًا على السطح س ك فهو عمود على كل خطٌ مستقيم يلاقيهِ في ذلك السطح (حد ا ك ٢ مضافات) فهو عمود على س ى وا ب ف قائمة وغ ف ب ايضًا قائمة فاذًا ا ب يوازي ع ف (ق ٢٨ ك ١) وا ب عمود على السطح س ك فالخط غ ف ايضًا عمود على ذلك السطح (ق ٧ ك ٢ مضافات) وا ب وغ ف في السطح د ى فالسطح د ى عمود على السطح س ك (حد ٢ ك ٢ مضافات) وهكذا يبرهن ان كل السطوح المارّة بالخط ا ب عمودية على س ك

القضية الثامنة عشرة. ن

اذا تقاطع سطحان وكانا عموديين على سطح ثالث فخطُّ تقاطعهما هو ايضًا عمود على ذلك السطح

ليكن ا ب وب س سطحين وليتقاطعا في الخط ب د وليكونا عموديين على السطح ا د س فالخط ب د هو ايضًا عمود على ا د س



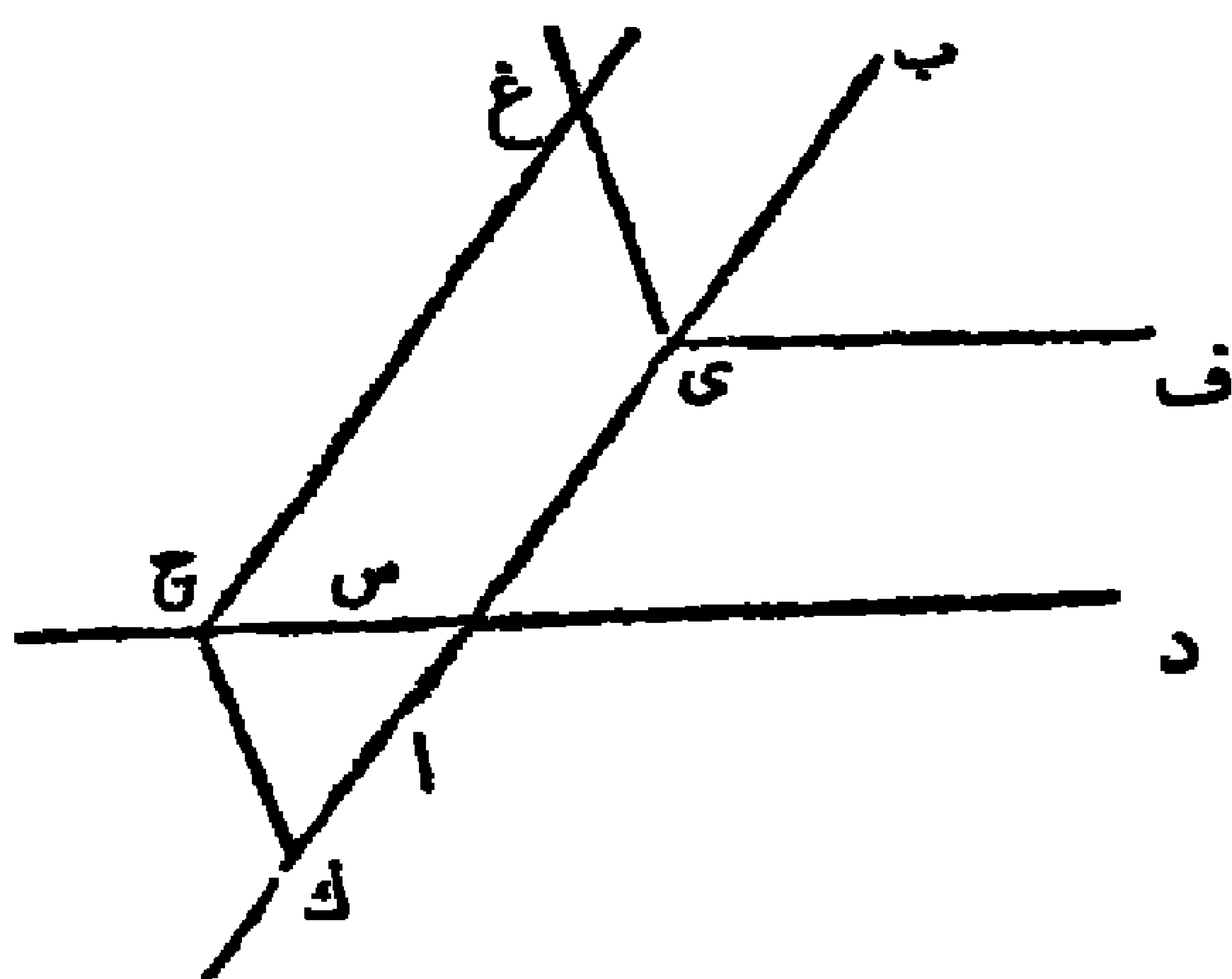
من د في السطح ا د س ارسم د ى عمودًا على ا د ود ف عمودًا على د س. فلكون د ى عمودًا على د ا خطّ تقاطع السطحين ا ب ا د س وا ب عمودي على ا د س فالخط د ى عمود على السطح ا ب (حد ٢ ك ٢ مضافات) فهو ايضًا عمود على الخط ب د الذي في ذلك

السطح (حد ١ ك ٢ مضافات) وهكذا ايضًا يبرهن ان د ف عمود على د ب فالخط د ب عمود على د ى ود ف فهو عمود على سطحهما اي على ا د س (ق ٤ ك ٢ مضافات)

القضية التاسعة عشرة. ع

علينا ان نرسم خطًّا عموديًّا على خطَّين مستقيمين مفروضين وضعًا وليسا في سطحٍ واحدٍ

ليكن ا ب وس د الخطين ولا يكونا في سطحٍ واحدٍ. علينا ان نرسم عمودًا عليهما



في ا ب خذ نقطة ى ومن ى ارسم ى ف حتى يوازي س د وليكن ى غ عمودًا على السطح المارّ بالخطَّين ى ب ى ف (ق ١٠ ك ٢ مضافات) وليمرّ السطح غ ك بالخطين ا ب وغ ى وليلاقِ س د في ح ومن ح ارسم ح ك عمودًا على ا ب فالخط ح ك هو المطلوب. من ح ارسم ح غ حتى يوازى ا ب

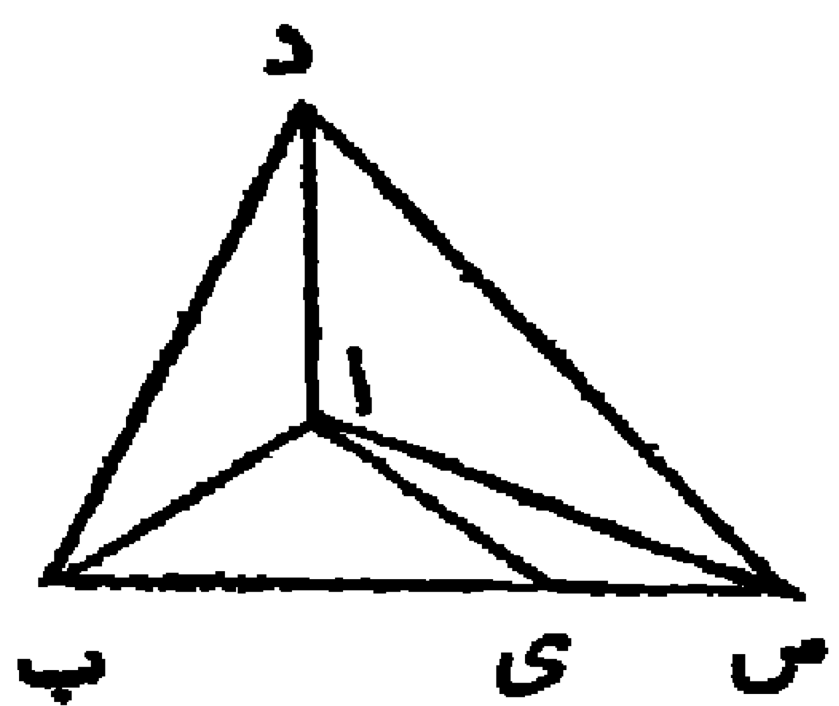
فلكون ح ك وغ ى عمودَين على ا ب وهما في سطحٍ واحدٍ فهما متوازيان. ولان ح غ ح د يوازيان ى ب وى ف فالسطح غ ح د يوازي السطح ب ى ف (ق ١٢ ك ٢ مضافات) فالخط غ ى العمودي على ب ى ف هو عمود على السطح غ ح د ايضًا (فرع ق ١٢ ك ٢ مضافات) وح ك يوازي غ ى فهو عمود على السطح غ ح د (ق ٧ ك ٢ مضافات) فهو عمود على ح د الواقع في ذلك السطح (حد ١ ك ٢ مضافات) وقد رُسِم ح ك عمودًا على ا ب فهو عمود على الخطَّين المفروضين

القضية العشرون. ن

اذا احاطت ثلاث زوايا بسيطة بزاوية مجسَّمة فكل اثنتين منها معًا اكبر من الثالثة

لتقع الزاوية المجسّمة ا بين الزوايا الثلاث البسيطة ب ا س ب ا د س ا د

فكل اثنتين منها معًا اكبر من الثالثة



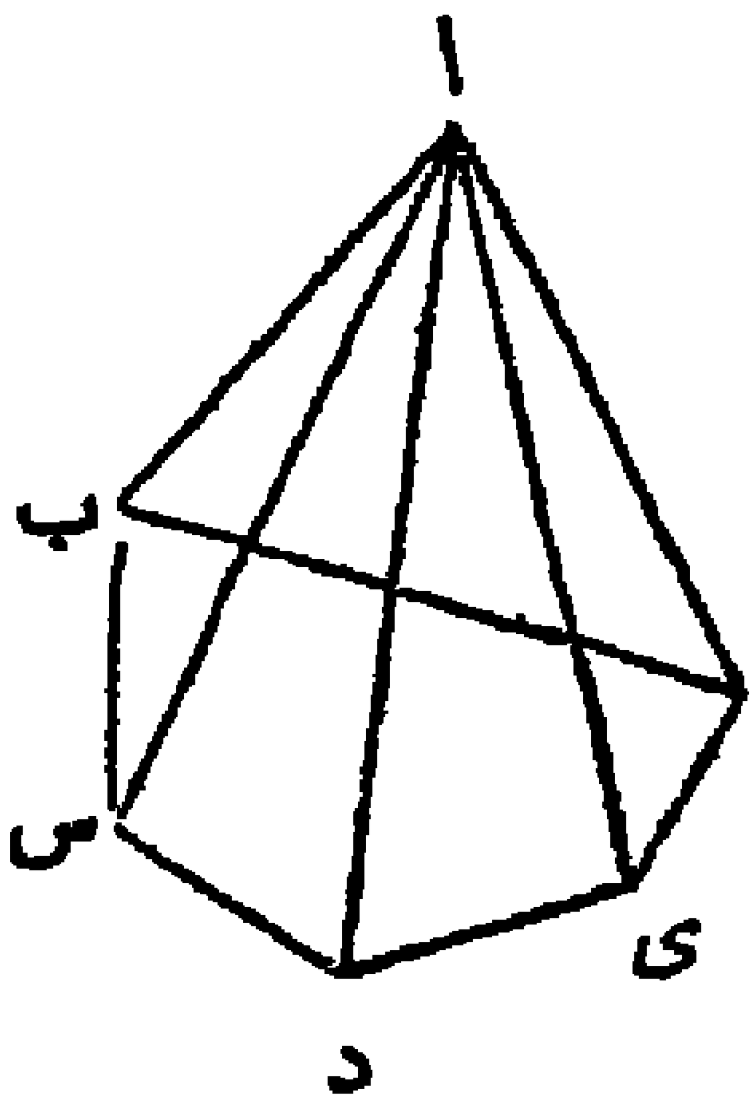
فان كانت هذه الزوايا الثلاث متساوية فالامر واضح ان اثنتين منها معًا اكبر من الثالثة. ولبن لم تكن متساوية فلتكن ب ا س الزاوية التي ليست باصغر من احدى الاخريين والتي هي اكبر من احداهما اي من د ا ب. وعند النقطة ا في الخط المستقيم ا ب وفي السطح المارّ بالخطّين ب ا ا س اجعل الزاوية ب ا ى تعدل الزاوية د ا ب (ق٢٣ ك١) واجعل ا ى=ا د وفي النقطة ى ارسم الخط ب ى س حتى يقطع ا ب وا س في ب وس وارسم ب د ود س

فلكون د ا=ا ى وا ب مشتركًا بين المثلثين ب ا د ب ا ى والزاوية ب ا د= ب ا ى فالقاعدة ب د تعدل القاعدة ب ى (ق٤ ك١) ولانّ ب د ود س معًا اطول من ب س (ق٢٠ ك١) وقد تبرهن ان احدهما ب د=ب ى الذي هو جزء من ب س فالاخر د س هو اطول من الباقي ى س. ولانّ د ا=ا ى وا س مشترك بين المثلثين والقاعدة د س اطول من القاعدة ى س فالزاوية د ا س هي اكبر من الزاوية ى ا س (ق٢٥ ك١) وقد جعلت الزاوية د ا ب=ب ا ى فالزاويتان د ا ب د ا س معًا اكبر من ب ا ى ى ا س او من ب ا س. وقد فُرِض ان ب ا س ليست اصغر من احدى الزاويتين ب ا د د ا س فتكون ب ا س مع احدى الاخريين اكبر من الثالثة

القضية الحادية والعشرون. ن

الزوايا البسيطة المحيطة بزاوية مجسّمة هي معًا اصغر من اربع زوايا قائمة.

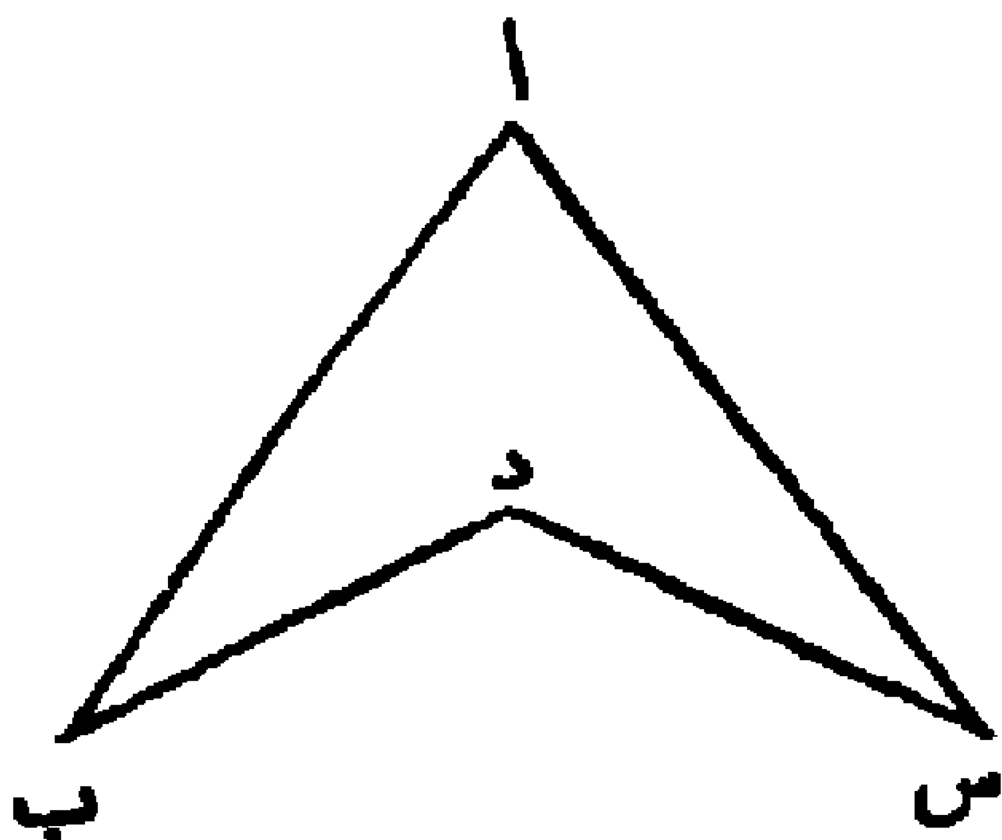
لتكن ا زاوية مجسّمة ولتُحِطْ بها زوايا بسيطة ب ا س س ا د د ا ى ى ا ف



ف ا ب فهي معًا اصغر من اربع زوايا قائمة

لتُقطَع السطوح المحيطة بالزاوية المجسَّمة ا بسطحٍ آخر وليكن محل التقاطع الشكل ذا الاضلاع المستقيمة ب س د ى ف. فالزاوية المجسَّمة عند ب تحيط بها ثلاث زوايا بسيطة س ب ا ا ب ف ف ب س وكل اثنتين منها اكبر من الثالثة (ق ٢٠ ك ٢ مضافات) فالزاويتان س ب ا ا ب ف معًا اكبر من ف ب س. ولهذا السبب ايضًا الزاويتان البسيطتان عند كل واحدة من النقط س د ى ف وهي التي عند قواعد المثلثات المتلاقية في ا هما اكبر من الثالثة عند تلك النقط. فجميع الزوايا عند قواعد المثلثات هي معًا اكبر من جميع زوايا الشكل. وجميع زوايا المثلثات معًا تعدل من الزوايا القائمة مضاعف عدة المثلثات (ق ٣٢ ك ١) او مضاعف اضلاع الشكل ب س د ى ف وجميع زوايا الشكل مع اربع زوايا قائمة تعدل من الزوايا القائمة مضاعف عدّة اضلاع الشكل (فرع اول ق ٣٢ ك ١) فجميع زوايا المثلثات تعدل جميع زوايا الشكل مع اربع زوايا قائمة. ولكن جميع الزوايا عند قواعد المثلثات اكبر من جميع زوايا الشكل كما قد تبرهن فالزوايا الباقية من المثلثات اي التي عند مجتمع المثلثات المحيطة بالزاوية المجسَّمة ا هي اصغر من اربع زوايا قائمة

تعليقة. اذا كانت احدى زوايا الشكل ب س د ى ف خارجةً كالزاوية عند د لا تصحُّ هذه القضية لانَّ الزوايا المجسَّمات عند القاعدة غير محاطة كلها بالزوايا البسيطة التي اثنتان منها في السطوح المثلثة المجتمعة عند ا والثالثة زاوية داخلية من الشكل المذكور. فلا يقال ان مجتمع الزوايا عند قواعد المثلثات هو ضرورةً اكبر من مجتمع زوايا الشكل ب س د ى ف



اصول الهندسة

مضافات

الكتاب الثالث

في مقايسة الاجسام

حدود

١ الجسم هو ما كان لهُ طول وعرض وعمق

٢ والاجسام المتشابهة هي التي تحيط بها عدَّةٌ واحدةٌ من سطوح متشابهة شكلاً ووضعاً لها ميلٌ واحدٌ بعضها على بعض

٣ الهَرَم جسم يحيط بهِ سطوح متلاقية في نقطة واحدة وتلك السطوح في بين هذه النقطة وسطحٍ اخر

٤ المشور ويقال لهُ الموشور جسم يحيط بهِ سطوحٌ منها سطحان متقابلان متساويان متشابهان ومتوازيان والبقية ذات اضلاع متوازية

٥ المتوازي السطوح هو جسم يحيط بهِ ستَّة سطوح كل واحد منها ذو اربعة اضلاع وكل اثنين منها متقابلان

٦ المكعَّب جسم يحيط بهِ ستُّ مربَّعات متساوية

٧ الكُرَة جسمٌ يُرسَم بدوران نصف دائرة على قطر ثابت

٨ مِحْوَر الكُرَة ويقال لهُ الجُزْعُ او الجَزْع هو الخط الثابت الذي دار عليهِ نصف الدائرة

٩ مركز الكرة هو مركز نصف الدائرة الذي رُسِمَت الكرة بدورانهِ

١٠ قطر الكرة هو خط مستقيم يمرُّ بمركزها وينتهي طرفاهُ في سطحها

١١ المخروط هو جسمٌ يُرسَم بدوران مثلث ذي قائمة على احد ضلعيهِ المحيطين بالقائمة

١٢ محْوَر المخروط او جزعهُ هو الضلع الثابت من المثلث الذي رُسم المخروط بدورانهِ

١٣ قاعدة المخروط هي الدائرة المرسومة بالضلع الدائر الذي يلي القائمة من المثلث الذى بدورانهِ رُسِم المخروط

١٤ الاسطوانة جسمٌ موسوم (بدوران) شكل ذي اضلاع متوازية وزوايا قائمة على احد اضلاعهِ

١٥ سهم الاسطوانة او محورها هو الضلع الثابت من الشكل الذي رُسِمَت الاسطوانة بدورانهِ

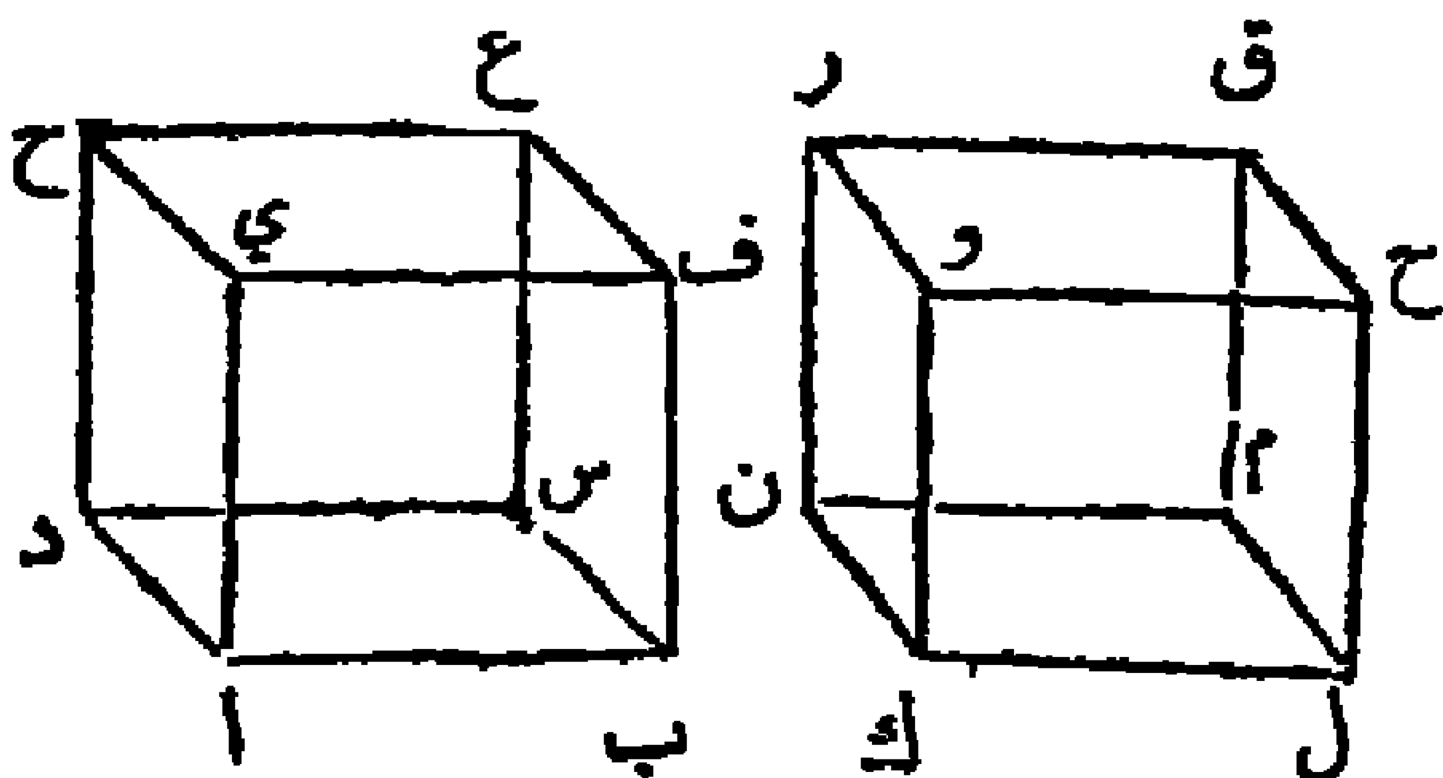
١٦ قاعدتا الاسطوانة هما الدائرتان الحادثتان من دوران الضلعَين المتقابلَين من الشكل الذي بدورانهِ رُسِمَت الاسطوانة

١٧ المخاريط المتشابهة والاساطين المتشابهة هي التي تكون سهامها واقطار قواعدها متناسبة

القضية الاولى . ن

اذا أُحيط جسمان بعدَّة متماثلة من السطوح المتساوية المتشابهة شكلاً ووضعًا وكان ميل السطحين المتواليين في الجسم الواحد مثل ميل نظيرها في الاخر فالجسمان متساويان ومتشابهان

ليكن اغ وك ق جسمين محاطين بعدة متماثلة من السطوح المتساوية المتشابهة شكلاً ووضعًا اي السطح اس يشبه السطح ك م ويعدلهُ واف يشبه ك ج ويعدلهُ وهكذا في البقية وليكن ميل اف على اس مثل ميل ك ج على ك م



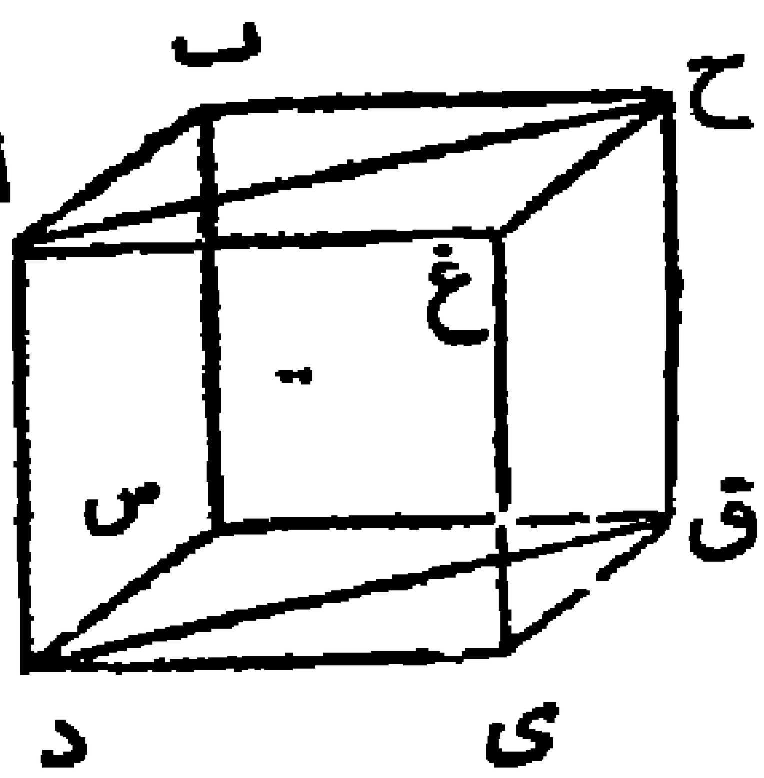
وهكذا في البقية فالجسم ك ق يعدل الجسم اغ ويشبههُ

لبوضع الجسم ك ق حتى تطبق قاعدتهُ ك م على ا س قاعدة الجسم اغ اي حتى تقع ن على د وك على ا وم على س ول على ب اذ القاعدتان متساويتان ومتشابهتان (اولية تامة ك ١). فلكون السطح ك م يطابق السطح ا س وبالمفروض ميل ك ر على ك م مثل ميل اح على ا س فالسطح ك ر يطابق السطح اح لانهما متساويان ومتشابهان (اولية تامة ك ١) وضلعاهما المتساويان ك ن واد متطابقان. وهكذا يبرهن في بقية سطوح الجسمين ان كل واحد يطابق نظيرهُ فالجسمان متطابقان كليًّا فهما متساويان ومتشابهان

القضية الثانية. ن

اذا أُحيط جسمٌ بستَّة سطوح كل اثنين منها متوازيان فالسطوح المتقابلة هي اشكال متوازية الاضلاع متشابهة ومتساوية

ليكن س د ع ح جسمًا احاط بهِ السطوح المتوازية ا س غ ق وب غ س ى وق ب ى ا فالسطوح المتقابلة هي متوازية الاضلاع متشابهة ومتساوية



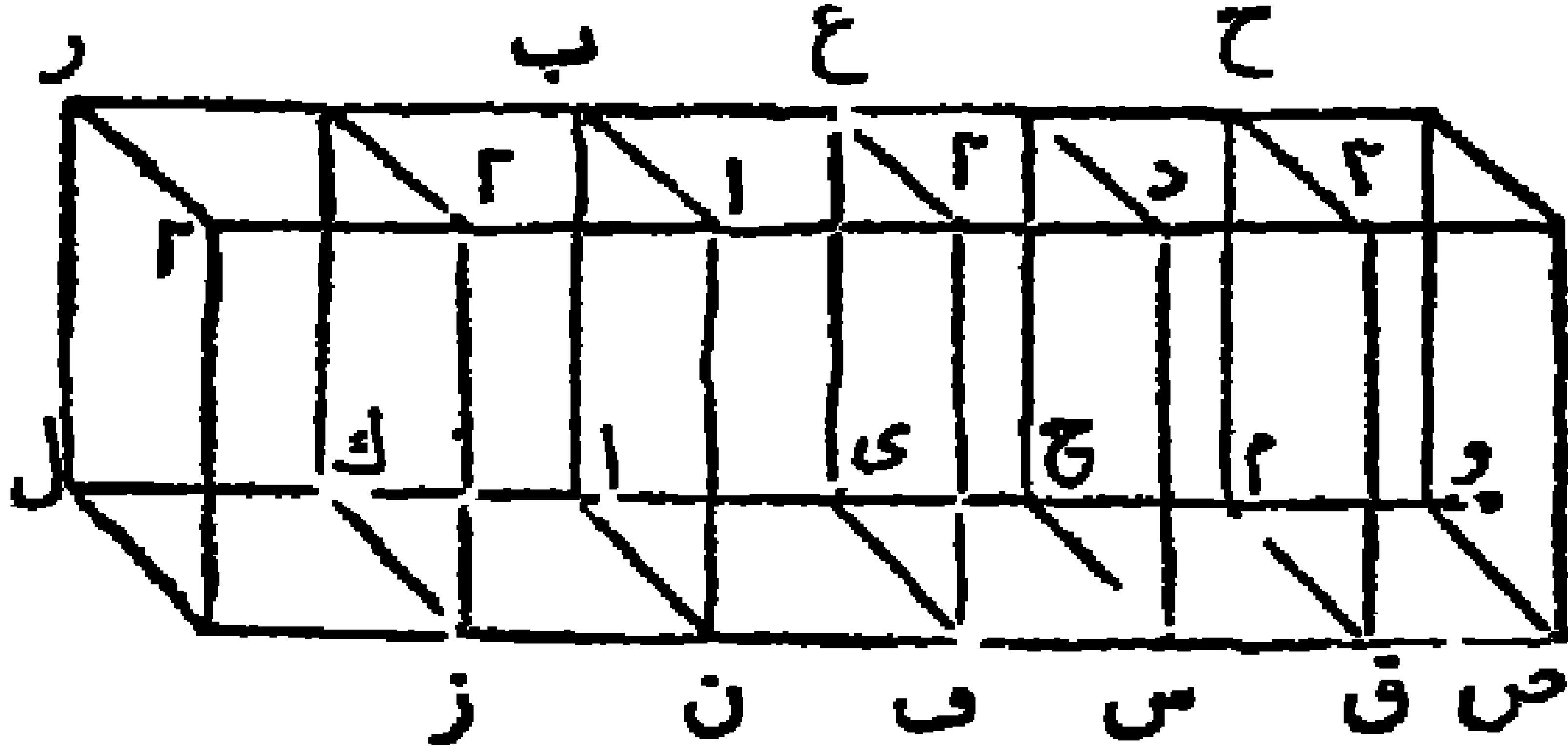
لانَّ السطح ا س يقطع السطحين المتوازيين ب ع وس ى فخطَّا التقاطع ا ب ود س متوازيان (ق ١٤ ك ٢ مضافات) ولانَّ السطح ا س يقطع السطحين المتوازيين ب ق وا ى فخطَّا التقاطع ب س وا د متوازيان وا ب يوازي س د كما تقدم فالشكل ا ب س د متوازي الاضلاع وهكذا يبرهن في بقيَّة السطوح انها متوازية الاضلاع. ارسم اح ود ق. فلكون ا ب يوازي د س وب ح يوازي س ق فالخطان المتلاقيان ا ب ب ح يوازيان المتلاقيين د س س ق. فالزاوية ا ب ح = د س ق (ق ٩ ك ٢ مضافات) ولكون ا ب ب ح يعدلان د س س ق والزاوية ا ب ح = د س ق فالقاعدة اح = د ق (ق ٤ ك ١) والمثلث ا ب ح = المثلث د س ق. ولهذا الـ... ا ع ح ... فالشكل ب ع = س ى وهكذا يبرهن ان ا س =

ا ...

القضية الثالثة · ن

جسم متوازي السطوح اذا قُطع بسطحٍ يوازي سطحين متوازيين من سطوحهِ ينقسم الى جسمين نسبة بعضهما الى بعضٍ كنسبة قاعدتيهما بعضهما الى بعض

ليكن ا ب س د جسمًا متوازي السطوح وليقطعهُ السطح ف ع الموازي السطحين المتقابلين ن ب ح د فينقسم الجسم الى جسمين ن ب ف ع وغ ف ح د حتى تكون نسبة ن ب ف غ الى غ ف ح د كنسبة القاعدة ا ى ف ن الى القاعدة ى ح س ف



اخرج ا ح الى الجهتين وخذ ح م و م و حتى يعدلا ى ح وخذ ا ك ك ل حتى يعدلا ا ى وتمّ الاشكال المتوازية الاضلاع ل ز ك ن ح ق م ص والاجسام ل ٢ ك ١ ح ٢ م ت. الخطوط ل ك ك ا ا ى متساوية والخطوط ك ز ا ن ى ف متساوية وهي تحدث زوايا متساوية مع ل ك ك ا و ا ى فالاشكال المتوازية الاضلاع ل ز ك ن ا ف متساوية ومتشابهة (ق ٣٦ ك ا وحد ا ك ٦) وهكذا الاشكال ك ر ك ب ا غ وايضًا الاشكال ل ٢ ك ٢ ا ١ (ق ٢ ك ٣ مضافات) لانها سطوح متقابلة. وهكذا يبرهن ان الاشكال ى س ح ق م ص متساوية (ق ٣٦ ك ا حد ا ك ٦) وايضًا الاشكال ح غ ح ج ج و وايضًا ح د م ٢ ت و (ق ٢ ك ٣ مضافات) فثلاثة سطوح من الجسم ل ٢ تعدل وتشبه ثلثة سطوح من الجسم ك ١ وثلاثة سطوح من الجسم ٢ ١ والثلاثة التي تقابلها في الاجسام الثلاثة هي متساوية ومتشابهة (ق ٢ ك ٣ مضافات) فالاجسام ل ٢ ك ا ٢ ١ تحيط بها سطوح متساوية ومتشابهة. ولكون السطوح ل ٢ ك ٢ ا ١ متوازية ويقطعها السطح ر ٢ يكون ميل ل ٢ على ر ٢ مثل ميل ك ٢ على ٢ ب او ميل ا ١ على ب ٢ (ق ١٥ ك ٢ مضافات) وهكذا يقال في بقية السطوح المتوالية. فالاجسام

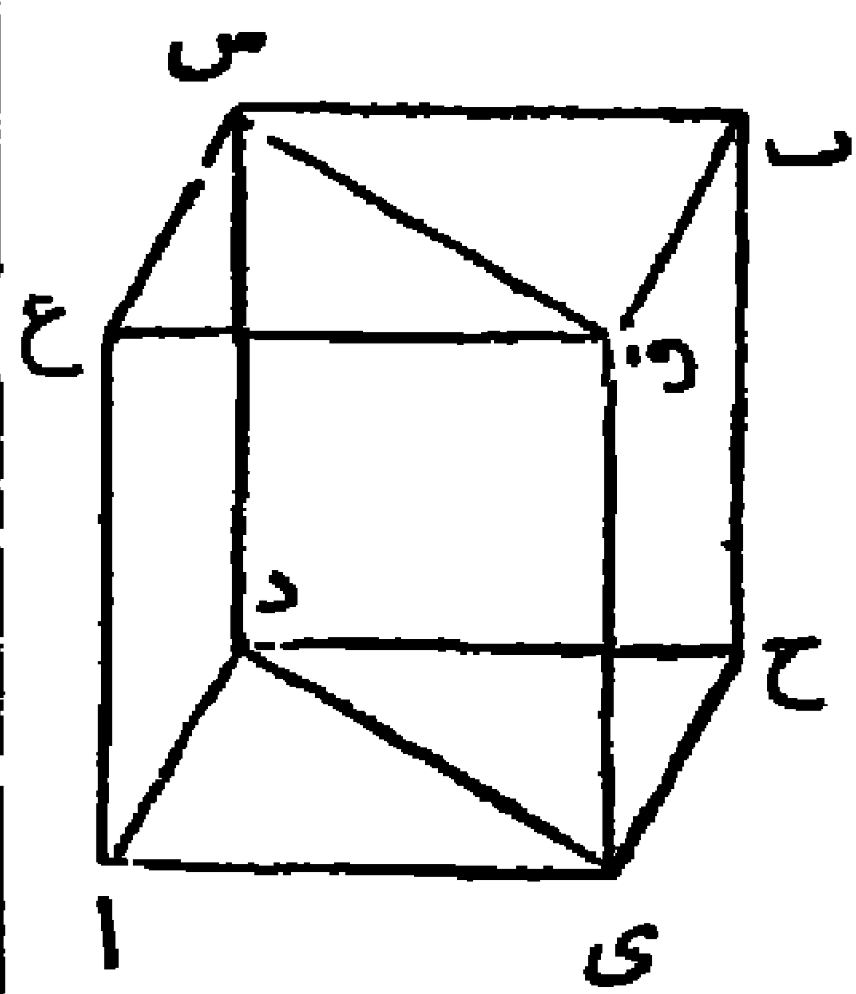
ل ٢ ك ١ ١ ١ ٢ هي متساوية (ق ١ ك٢ مضافات). وهكذا يبرهن ان الاجسام ى د ح ٢ م ت متساوية فكما تتكرر ا ف في ل ف هكذا يتكرر الجسم ١ ٢ في الجسم ل ٢ وكذلك كما تتكرر ف ح في ف و هكذا يتكرر الجسم ى د في الجسم ى ت واذا كانت القاعدة ل ف تعدل القاعدة ف و فالجسم ل ٢ يعدل الجسم ى ق (ق ١ ك٢ مضافات) وان كانت اكبر فاكبر وان كانت اصغر فاصغر فالقاعدة ا ف : القاعدة ف ح :: الجسم ١ ٢ : الجسم ى د (حد ٥ ك ٥)

فرع. لانّ الشكل المتوازي الاضلاع ا ف : ف ح :: ن ف : ف س (ق ١ ك٦) فالجسم ١ ٢ : الجسم ى د :: ن ف : ف س

القضية الرابعة ن

جسمٌ متوازي السطوح اذا قطعهُ سطحٌ مارٌّ بقطرَي السطحين المتقابلَين ينقسم الى موشورَين متساويَين

ليكن ا ب جسمًا متوازي السطوح وليُقطَع بالسطح س ق ى د المارّ بقطرَي السطحين المتقابلَين غ ب واح فانهُ ينقسم الى موشورَين متساويَين. لانّ س د يوازي غ ا وق ى يوازي ع ا وهو ليس في سطحهِ فالخطان س د ق ى متوازيان (ق٨ ك٢ مضافات) فالقطران س ق د ى هما في سطح س د وق ى فهما متوازيان (ق١٤ ك٢ مضافات) والمثلث س ب ق = س غ ق (ق٢٤ ك١) ودح ى = د ا ى والشكل س ا يعدل الشكل المقابل لهُ ب ى (ق ٢ ك٢ مضافات) وغ ى = س ح فالسطوح المحيطة بالموشورَين س ا ى س ب ى متساوية ومتشابهة كل واحد بنظيرهِ وهي على ميل واحد بعضها على بعض لان السطح ا س يوازي السطح ى ب وا ق يوازي س ح ويقطعها السطح س ى (ق ٥ ك٢ مضافات) فالموشور س ا ى = س ب ى (ق ١ ك٢ مضافات)

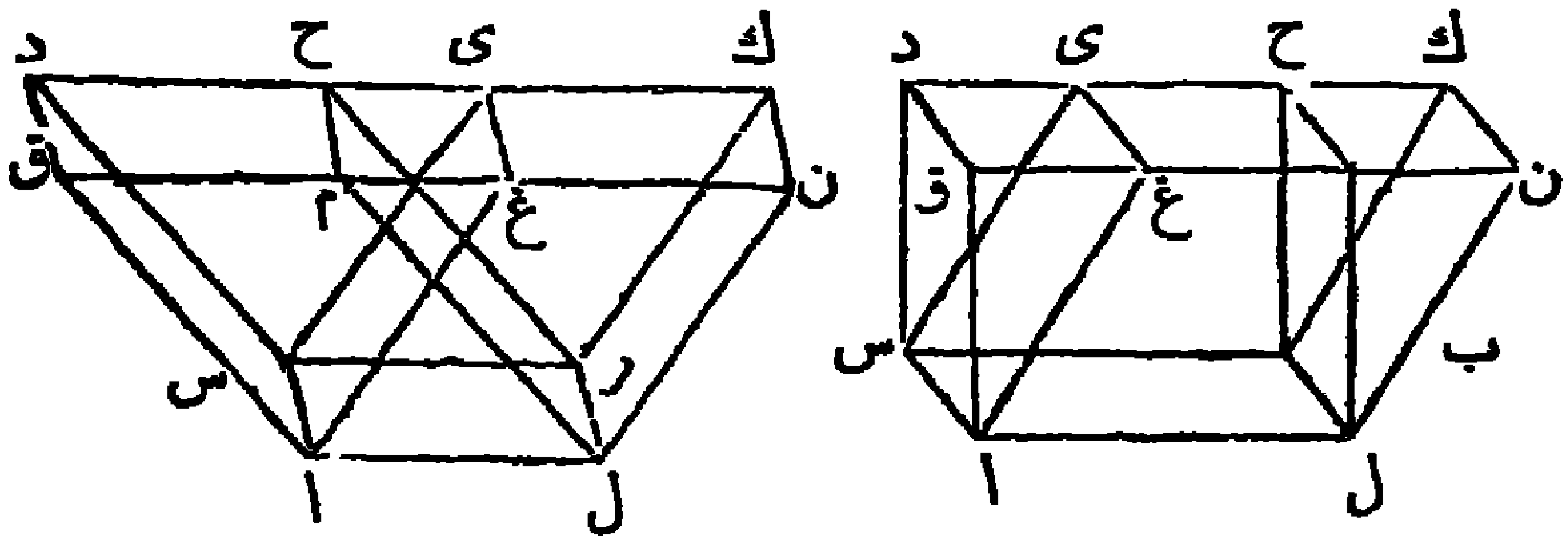


تنبيه. في القضايا الآتية يراد بالخطوط الواقعة اضلاع الاشكال الواقعة بين قاعدة الجسم والسطح الذي يقابلها

القضية الخامسة . ن

الاجسامُ متوازية السطوح على قاعدة واحدة وعلى علوٍّ واحدٍ هي متساوية اذا انتهت خطوطها الواقفة الى خطٍّ مستقيم واحد في السطح الذي يقابل القاعدة

ليكن اح اك جسمين على قاعدة واحدة ا ب وعلى علو واحد وخطوطها



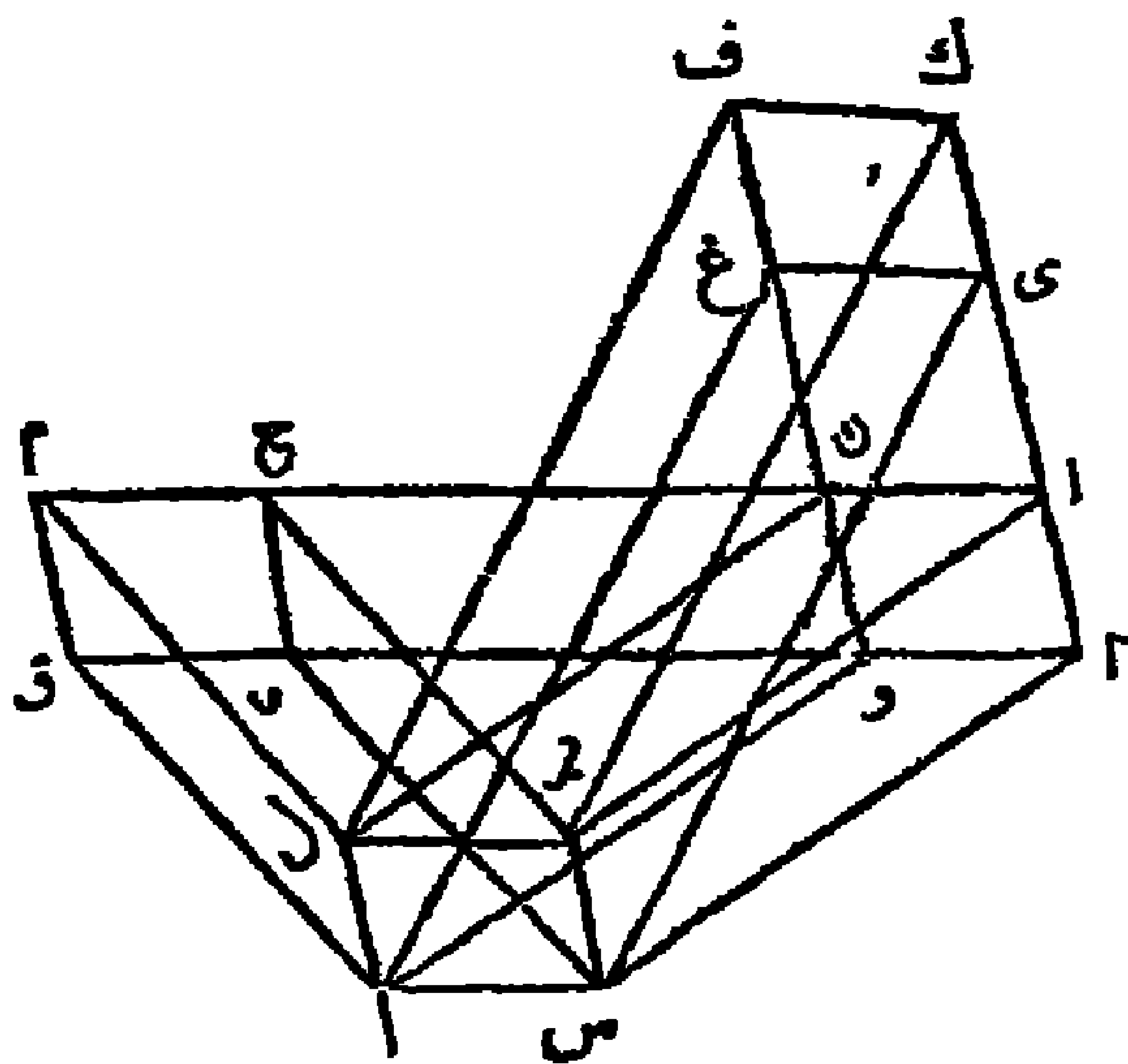
الواقفة ا ق ا غ ل م ل ن منتهية الى خط واحد ق ن والخطوط س د س ى ب ح ب ك منتهية الى خط واحد د ك فالجسمان متساويان

لانَّ س ح س ك متوازيا الاضلاع فالضلع س ب يعدل كل واحد من الضلعين المتقابلين د ح وى ك (ق٣٤ ك١) د ح = ى ك فان اضيف اليها الجزء المشترك ح ى او طُرِح منها فالمجتمع او الباقي د ى = المجتمع او الباقي ك ح والمثلث س د ى = ب ح ك (ق٣٨ ك١) والشكل د غ = الشكل ح ن (ق٣٦ ك١) ولهذا السبب ا ق غ = ل م ن وس ق = ب م (ق٣ ك٣ م) وس غ = ب ن لانها سطوح متقابلة فالسطوح المحيطة بالموشور د ا غ اما تعدل وتشبه السطوح المحيطة بالموشور ح ل ن كل واحد يعدل ويشبه نظيرهُ والسطوح المتوالية هي على ميل واحدٍ بعضها على بعض (ق١٥ ك٢ م) فالموشوران د ا غ ح ل ن متساويان (ق١ ك٣ م) فان طرح الموشور ل ن ح من الجسم الذي قاعدتهُ الشكل ا ب وق د ك ن السطح المقابل لها وطرح منهُ ايضًا الموشور ا غ د فالجسم الباقي اي المتوازي السطوح اح يعدل الباقي ا ك

القضية السادسة . ن

اجسام متوازية السطوح على قاعدة واحدة وعلى علوٍّ واحد هي متساوية وان لم تنتهِ خطوطها الواقفة في خطٍّ واحدٍ في السطح المقابل القاعدة

ليكن الجسمان المتوازيا السطوح س م وس ف على قاعدة واحدة ا ب وعلى علوٍّ واحدٍ وخطوطهما الواقفة ا ق اغ ل م ل ف س د س ى ب ح ب ك غير منتهية الى خطٍّ واحد كما في القضية السابقة فالجسمان س م س ف متساويان



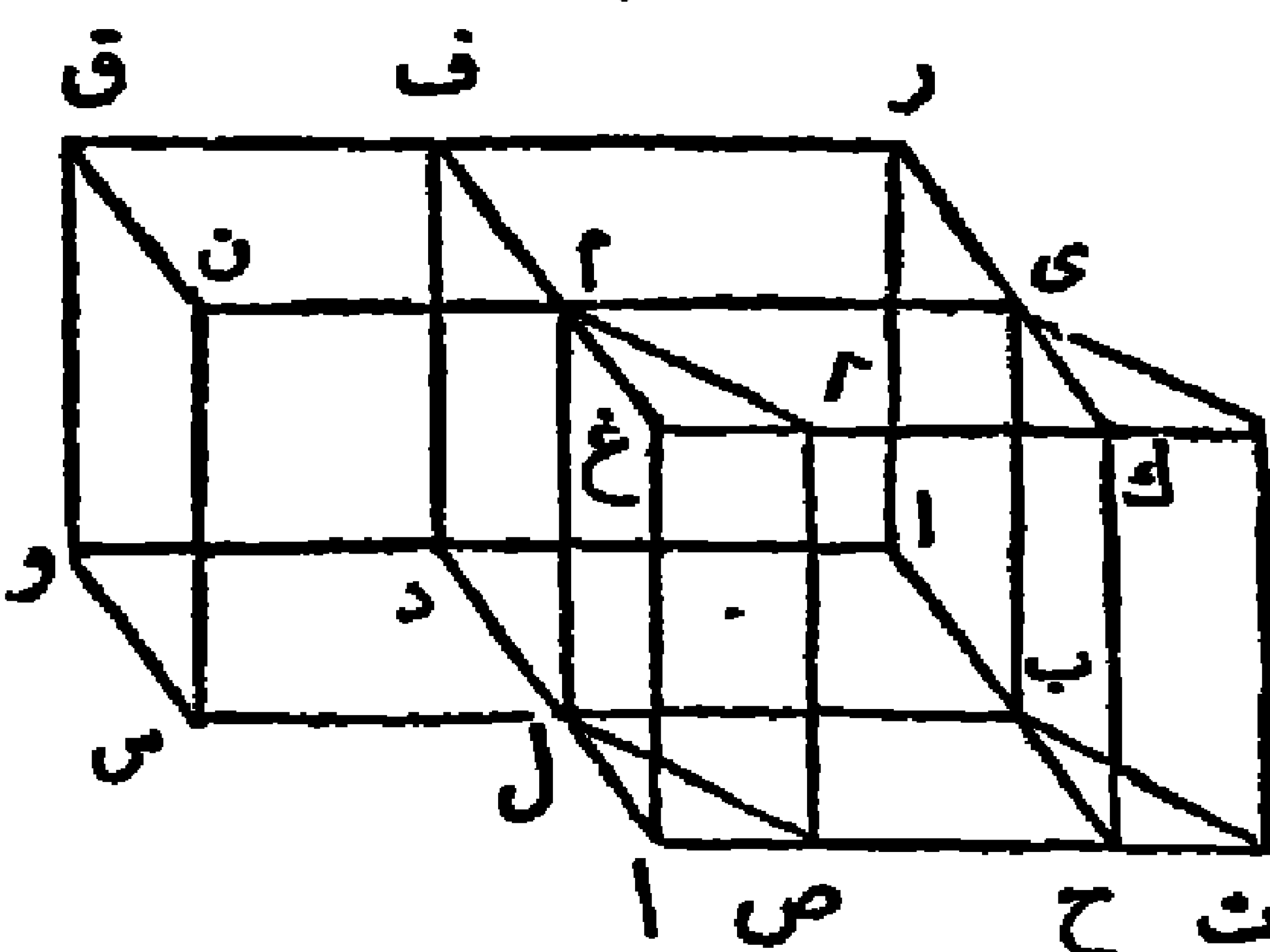
لانهما على علوٍّ واحدٍ

فالسطح ح ق والسطح ك غ في سطح واحد واذا اخرج السطح ح ق والسطح ك غ تتقاطع اضلاعهما . فليخرجا وليتقاطعا في ا ن ٢ و . فالجسم س ف = س ن (ق ٥ ك ٢ مضافات) والجسم س ق = س ن (ق ٥ ك ٢ مضافات) فالجسم س ف = س م (اولية ١ ك ١)

القضية السابعة . ن

اجسام متوازية السطوح على قواعد متساوية وعلى علوٍّ واحدٍ هي متساوية

ليكن الجسمان المتوازيا السطوح س ف وا ى على علوٍّ واحد وعلى قاعدتين متساويتين ح ل وس د فهما متساويان



ليوضع الجسمان حتى تكون القاعدتان في سطح واحدٍ . فلكونهما على علوٍّ واحد يكون السطحان المقابلان القاعدتين

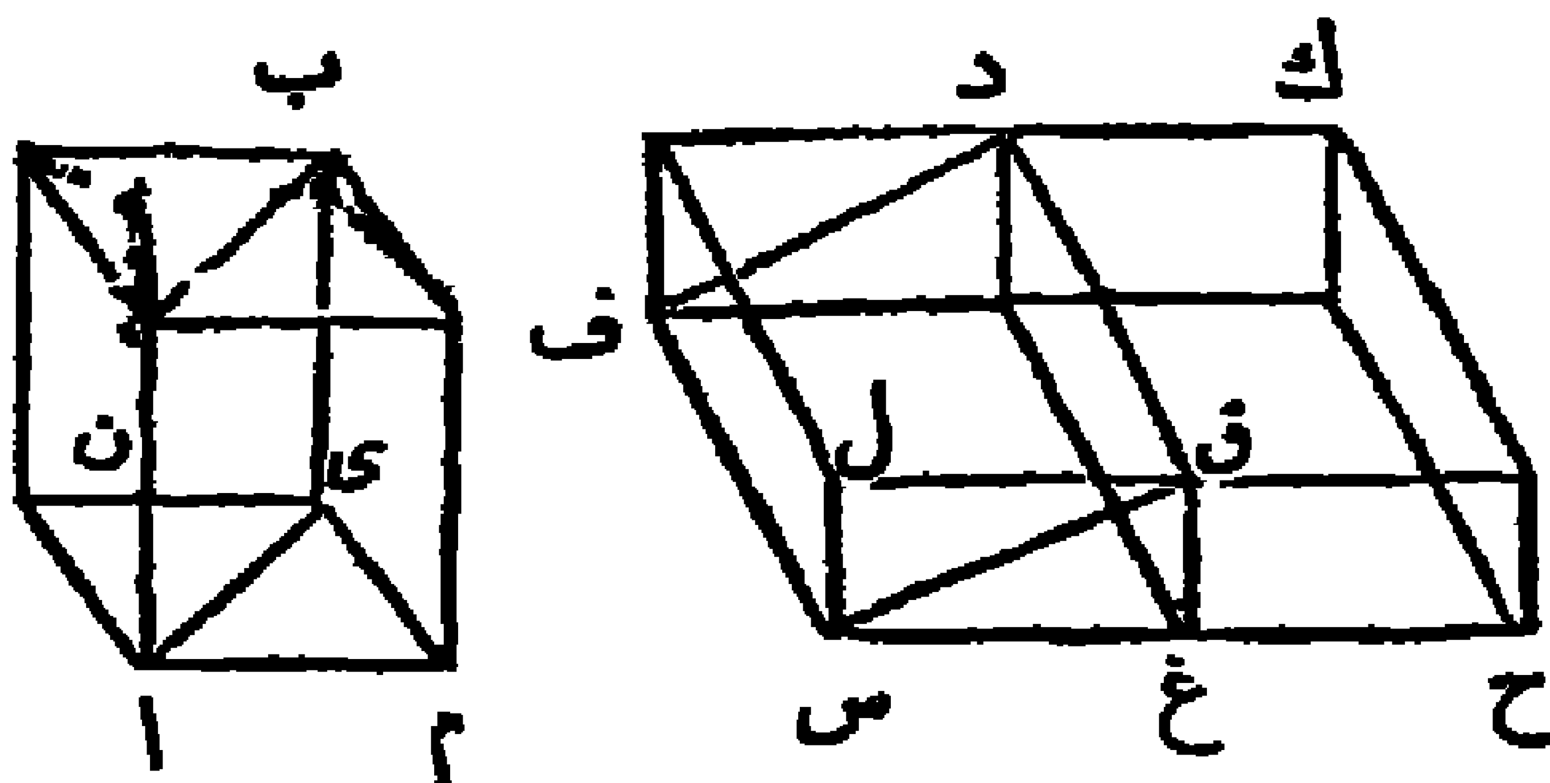
ن ف غ ى ايضاً في سطح واحدٍ ولنُخرج السطوح حتى يصطنع السطحان م ر وب د وتم الجسم ل ر فهو يعدل الجسم س ف (ق١ ك٣ م) وهو ايضاً يعدل ا ى فالجسم ا ى يعدل الجسم س ف (اولية ١ ك١)



القضية الثامنة. ن

اجسام متوازية السطوح اذا كانت على علوٍ واحد تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض

ليكن ا ب وس د جسمين متوازيي السطوح وعلى علو واحدٍ فنسبة ا ب : س د :: القاعدة ا ى : القاعدة س ق



ارسم الشكل المتوازي الاضلاع ق ح على الخط المستقيم ق غ حتى يعدل القاعدة ا ى (فرع ق٥٤ ك١) والزاوية ق غ ح فلتعدل ل س غ وتمّ الجسم المتوازي السطوح غ ك على القاعدة ق ح فيكون ق د واحداً من خطوطهِ الواقفة فيكون الجسمان س د وغ ك على علو واحد والجسم ا ب يعدل الجسم غ ك (ق٧ ك٣ م) ونسبة ح ق : ق س :: الجسم ح د : الجسم د س (ق٢ ك٣ م) والقاعدة ح ق = ا ى والجسم غ ك = ا ب فنسبة ا ب : س د :: ا ى : س ق

فرع اول. يتضح من هذه القضية ان المواشير على قواعد مثلثة الاضلاع وعلى علو واحد تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض

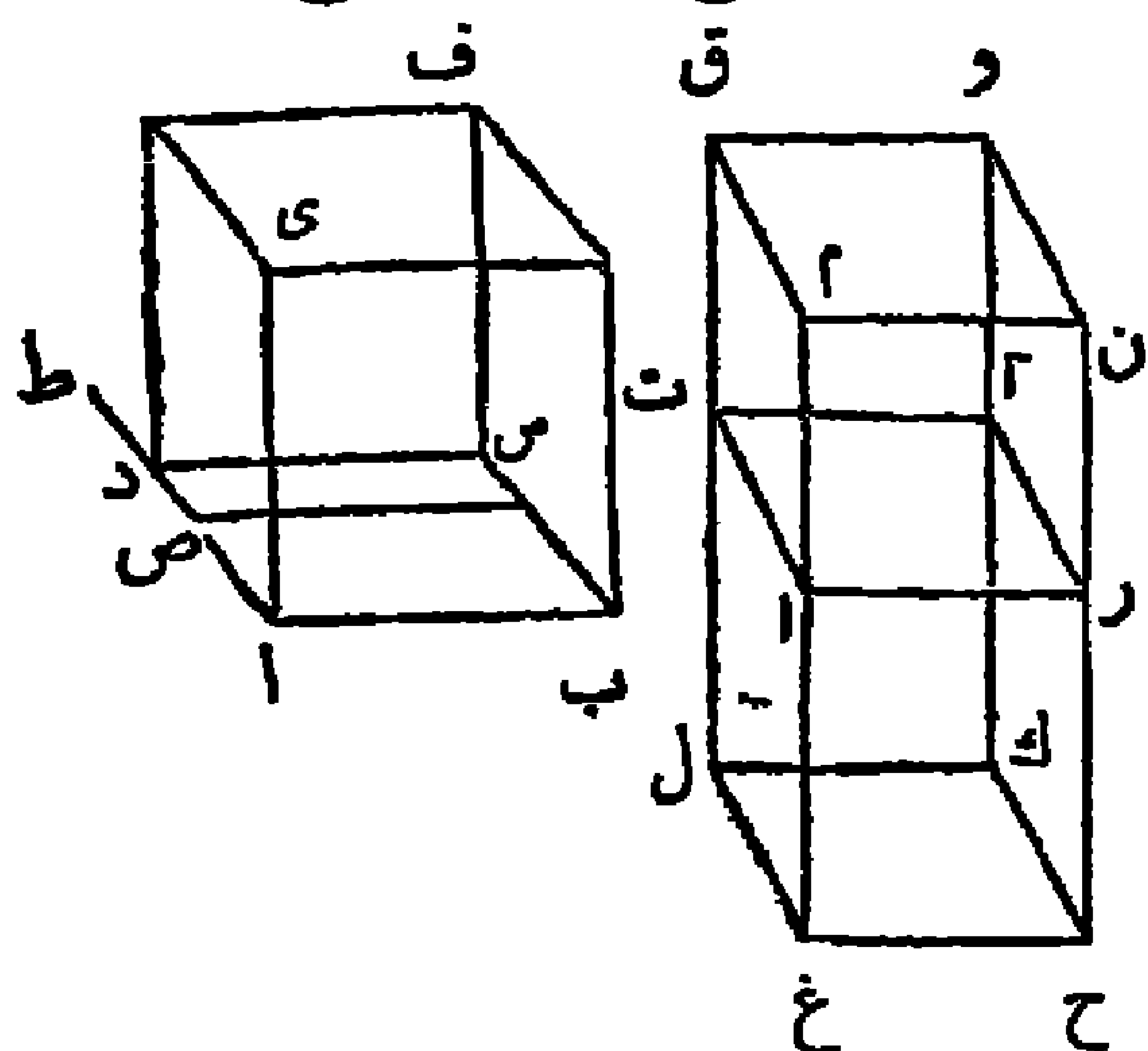
فرع ثانٍ. اذا كان جسم متوازي السطوح وموشور على علو واحد فنسبة احدهما الى الاخر كنسبة قاعدة الواحد الى قاعدة الاخر



القضية التاسعة. ن

اجسام متوازية السطوح تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة مسطح علو الواحد في مساحة قاعدتهِ الى مسطح علو الاخر في مساحة قاعدتهِ

ليكن اف وغ و جسمين متوازيي السطوح. فنسبة اف : غ و :: اس × س ف : غ ك × ك و



من غ م احد الخطوط الواقفة للجسم غ و اقطع غ ا حتى يعدل س ف او اى من الجسم اف وليمرَّ بالنقطة ا سطح يوازي غ ك مثل السطح ا ت ٢ ر فالجسم غ ٢ متوازي السطوح (حد ٥ ك ٣ م) وعلوهُ هو علو اف. ونسبة الجسم اف : الجسم غ و هي مركبة من نسبة اف : غ ٢ ونسبة غ ٢ : غ و (حد ١٠ ك ٥) ونسبة اف : غ ٢ هي كنسبة القاعدة اس : القاعدة غ ك (ق ٨ ك ٣ م) لانهما على علو واحد ونسبة الجسم غ ٢ : الجسم غ و هي كنسبة غ ا : غ م (ق ٣ ك ٣) فالنسبة المركبة من نسبة اف : غ ٢ ومن نسبة غ ٢ : غ و هي مثل المركبة من نسبة القاعدة اس : القاعدة غ ك والعلو اى : العلو غ م (ق و ك ٥) ولكن نسبة اف : غ و هي المركبة من اف : غ ٢ وغ ٢ : غ و فنسبة اف : غ و هي المركبة من نسبة القاعدة اس : القاعدة غ ك والعلو اى : العلو غ م فنسبة اف : غ و :: اس × س ف : غ ك × ك و

فرع اول. يمكن استعلام خطَّين مستقيمين نسبة احدهما الى الاخر كنسبة الجسم اف الى الجسم غ و. ليوضع الشكل المتوازي الاضلاع ب ص على اب وليفرض ان ب ص = غ ك وزاوية من زواياهُ تعدل ب ا د (ق ٤٤ ك ١) واص : اط :: اى : غ م (ق ١٢ ك ٦) فتكون نسبة اد : اط :: الجسم اف : غ و. لانَّ نسبة اد : اط مركبة (حد ١٠ ك ٥) من نسبة اد : اص ونسبة اص : اط ولكن نسبة اد : اص هي مثل نسبة الشكل اس : الشكل ب ص او غ ك (ق ١ ك ٦) ونسبة اص : اط هي مثل نسبة اى : غ م فنسبة اد : اط مركبة من نسبة اس : غ ك

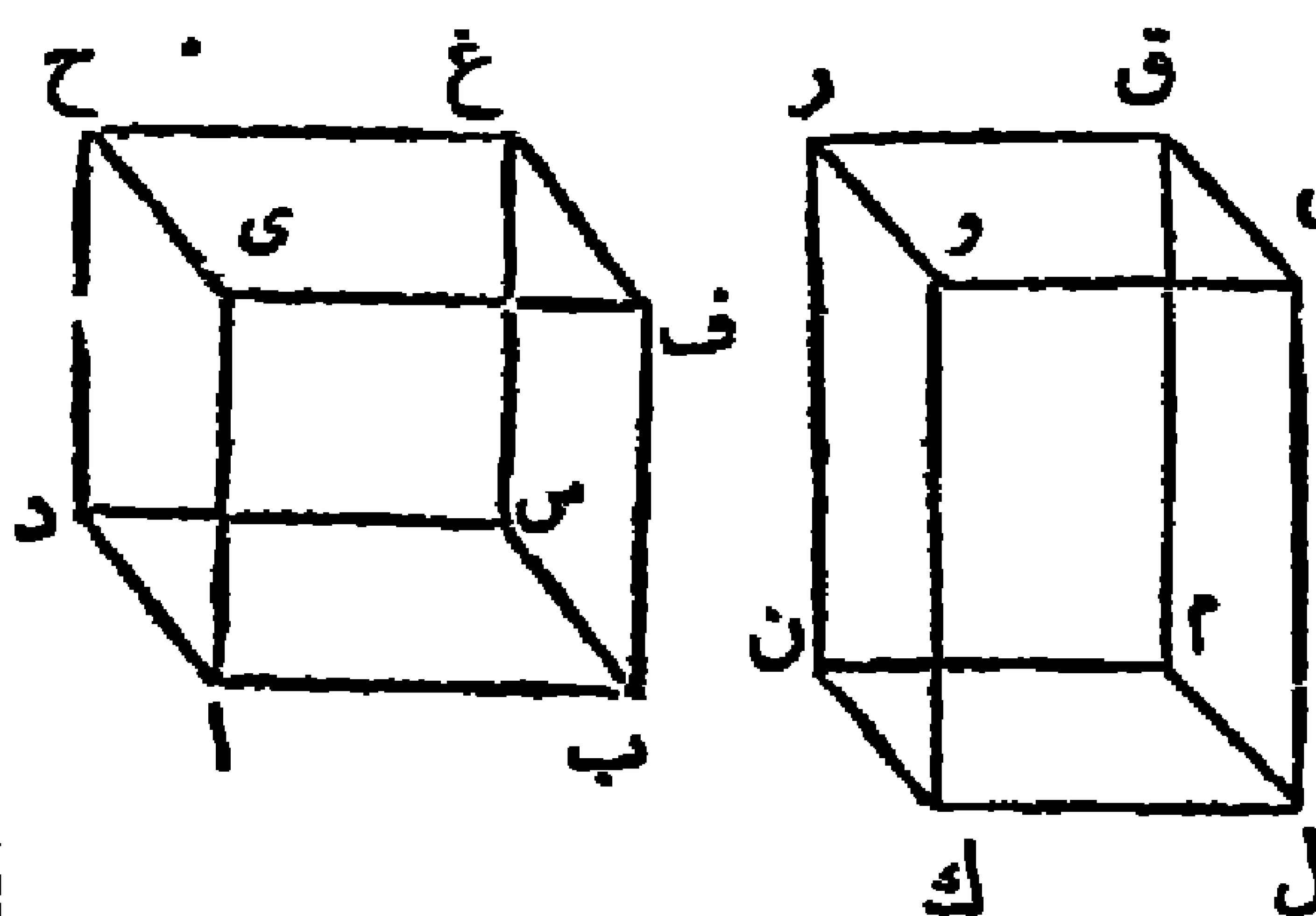
ونسبة ا ى : غ م (ق ٥ ك٥) ونسبة الجسم ا ف الى الجسم غ و هي مركبة من ذات هذه النسب فنسبة ا ف : غ و :: ا د : ا ط

فرع ثانٍ . نسبة المواشير بعضها الى بعض كالنسب المركبة من قواعدها في علوها (فرع ٢ ق ٨ ك٣ م)

القضية العاشرة . ن

اجسام متوازية السطوح هي متساوية اذا كانت قواعدها وعلوها متناسبة بالتكافؤ . والاجسام المتوازية السطوح المتساوية تكون قواعدها وعلوها متناسبة بالتكافؤ

لتكن نسبة ا س : ك م :: ك و : ا ى فالجسم ا غ = الجسم ك ق لانهُ بتحويل هذه النسبة لنا ا س × ا ى = ك م × ك و وا س × ا ى = ا غ (ق ٩ ك٣ م) وك م × ك و = ك ق



ثم اذا فُرِض ان ا س × ا ى = ك م × ك و لنا ا س : ك م :: ك و : ا ى

فرع . في المواشير المتساوية تكون قواعدها وعلوها متناسبة بالتكافؤ وبالقلب اذا كانت العلو والقواعد متناسبة بالتكافؤ تكون المواشير متساوية

القضية الحادية عشرة . ن

اجسام متشابهة متوازية السطوح تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة كعوب اضلاعها المتشابهة بعضها الى بعض

ليكن اغ وك ق جسمين متوازيي السطوح وا ب وك ل الضلعين المتشابهين فنسبة اغ : ك ق :: ا ب^{٣} : ك ل^{٣} لكون الجسمين متشابهين يكون اح وك ر سطحين متشابهين وا ف وك ط كذلك (حد ٣ ك ٣ م)

ونسبة ا ب : ك ل وا ى : ك و وا د : ك ن متساوية (حد ١ ك ٦) ونسبة اغ : ك ق هي مركبة من نسبة ا س : ك م وا ى : ك و ونسبة ا س : ك م هي مركبة من ا ب : ك ل وا د : ك ن فنسبة اغ : ك ق مركبة من النسب الثلاث اي نسبة ا ب : ك ل وا د : ك ن وا ى : ك و وقد تبرهن ان هذه النسب الثلاث متساوية اذًا ا ب^{٣} : ك ل^{٣} :: اغ : ك ق (حد ١٢ ك ٥)

فرع اول. اذا فرض ا ب : ك ل :: ك ل : م وك ل : م :: م : ن فتكون نسبة ا ب : ن :: اغ : ك ق. لانّ ا ب : ن = ا ب^{٣} : ك ل^{٣} (حد ١٢ ك ٥) اي اغ : ك ق

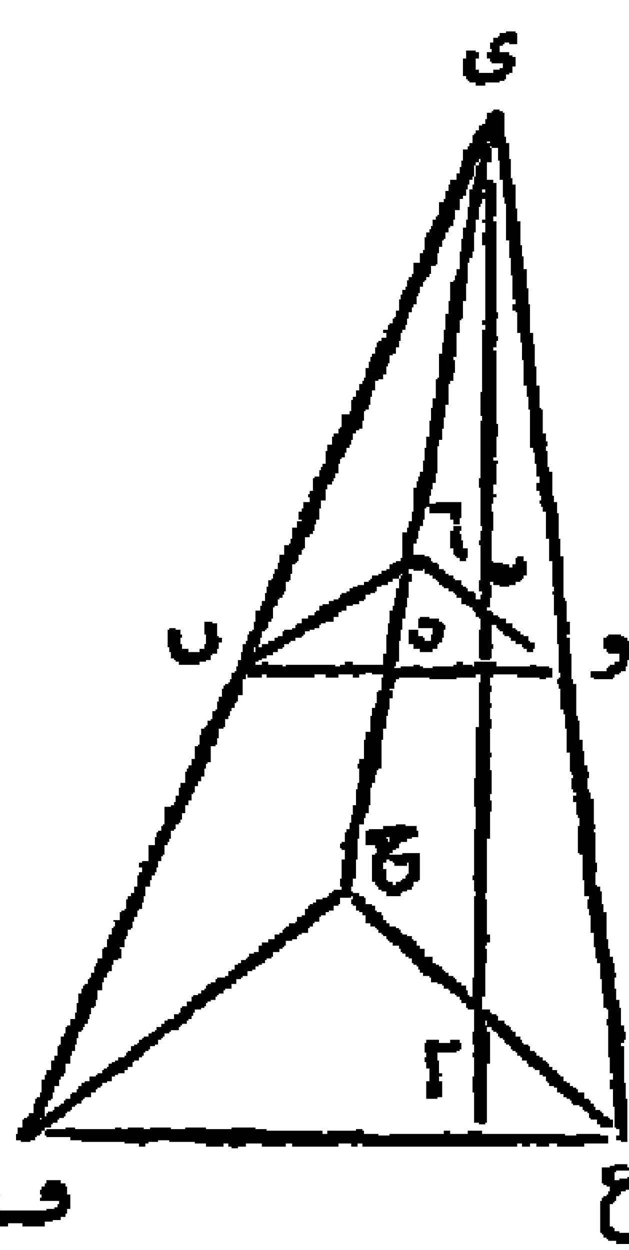
فرع ثانٍ. لكون الاجسام المكعّبة متشابهة يكون المكعّب على ا ب : المكعّب على ك ل :: اغ : ا ق فنسبة اجسام متوازية السطوح بعضها الى بعض كنسبة كعوب اضلاعها المتشابهة بعضها الى بعض

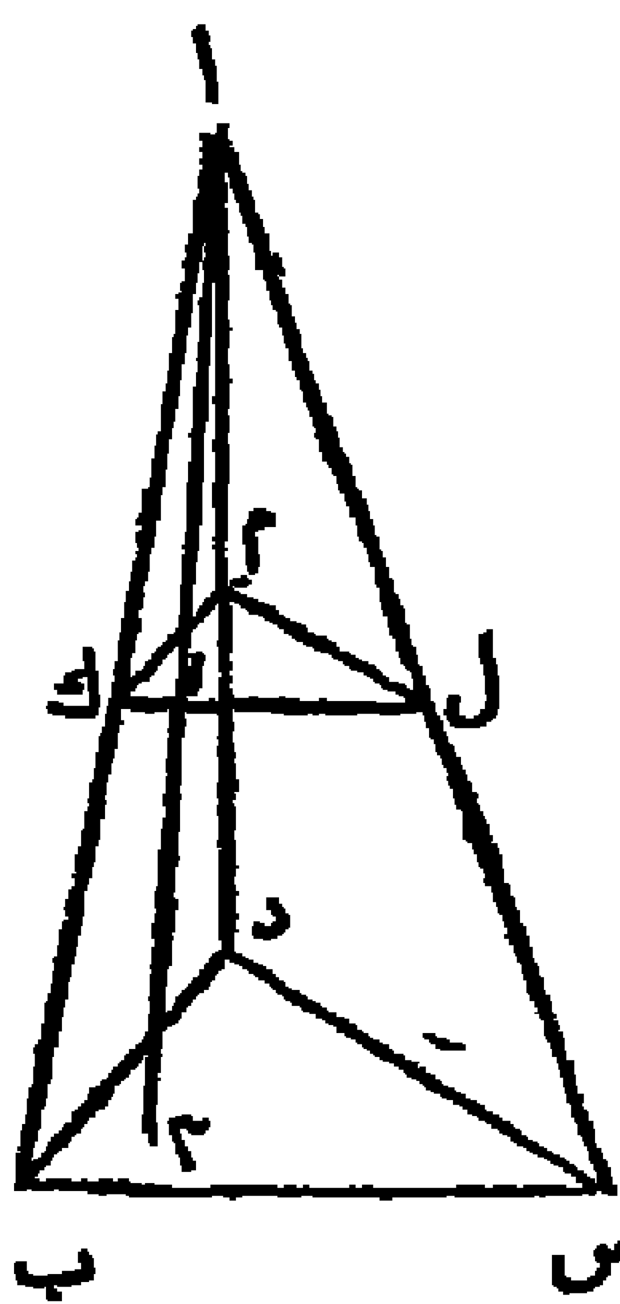
فرع ثالث. وهكذا يبرهن ايضًا ان الموشورات المتشابهة هي ككعوب اضلاعها المتشابهة.

القضية الثانية عشرة. ن

هَرَمانِ مثلّثا الاضلاع على قاعدتين متساويتَين وعلى علوٍّ واحد اذا قُطِع كل واحد منهما بسطحٍ يوازي قاعدتهُ وعلى بعدٍ واحد من القاعدتين يكون موضعا التقاطع متساويَين

ليكن ا ب س د ى ف غ ح هرمين مثلثَي الاضلاع على قاعدتين متساويتين د ب س ح ف غ وعلى علو واحد اي العمود ا ٢ والعمود ى ٢ من ا وى على القاعدتين وليُقطَع احدهما بالسطح ل م والآخر بالسطح ن و على بعد واحد من





القاعدتين اي طول العمودين ا ٢ و ه ٢. فوضعا التقاطع اي المثلثان ك ل م ن و٦ متساويان

السطحان ب د س ك م ل متوازيان ويلاقيهما السطح ا ب د فالخطان ب د ك م متوازيان (ق١٤ ك٢ م) وهكذا يبرهن ان د س و م ل متوازيان وب د د س يوازيان ك م م ل وليست في سطح واحد فالزاوية ب د س تعدل الزاوية ك م ل (ق٩ ك٢ م) وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان بقية زوايا المثلثين متساوية كل واحدة لنظيرها فالمثلثان متشابهان وهكذا ايضًا في المثلثين ف ع ح ن و٦ فهما متشابهان لانّ الخطّين المستقيمين ا ا ٢ ا ك ب يلاقيان السطحين المتوازيَين ك م ل ب د س فيُقطعا على نسبة واحدة (ق١٦ ك٢ م) ونسبة ٢ ا : ا ا :. ب ك : ك ا وا ٢ : ا ا :: ا ب : ا ك (ق١٨ ك٥) وهكذا ايضًا ى ٢. ى ه ى ف : ى ن فتكون نسبة ا ب : ا ك :: ى ف : ى ن لانّ ا ٢ = ى ٢ وا ا = ى ه ولان المثلثين ا ب س ا ك ل متشابهان ا ب : ا ك :: ب س. ك ل وايضًا

ى ف : ى ن :: ف غ : ن و فلما

ب س : ك ل :: ف غ : ن و

واذا كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبة تكون الاشكال المرسومة عليها متناسبة ايضًا (ق٢٢ ك٦) فالمثلث ب س د : المثلث ك ل م. المثلث ف غ ح : المثلث ن و ٦. ولكن قد فرض ان ب س د ف ع ح متساويان فاذًا ك ل م ن و ٦ متساويان ايضًا (ق١ ك٥)

فرع اول. كل موضع يُقطَع فيهِ هرمٌ مثلَّثُ الاضلاع على موازاة قاعدتهِ هو مثلثٌ يشبه قاعدة الهرم وهكذا يبرهن ان الشكل الحادث من قطع كل هرم على موازاة قاعدتهِ هو شكل شبيه بقاعدة الهرم

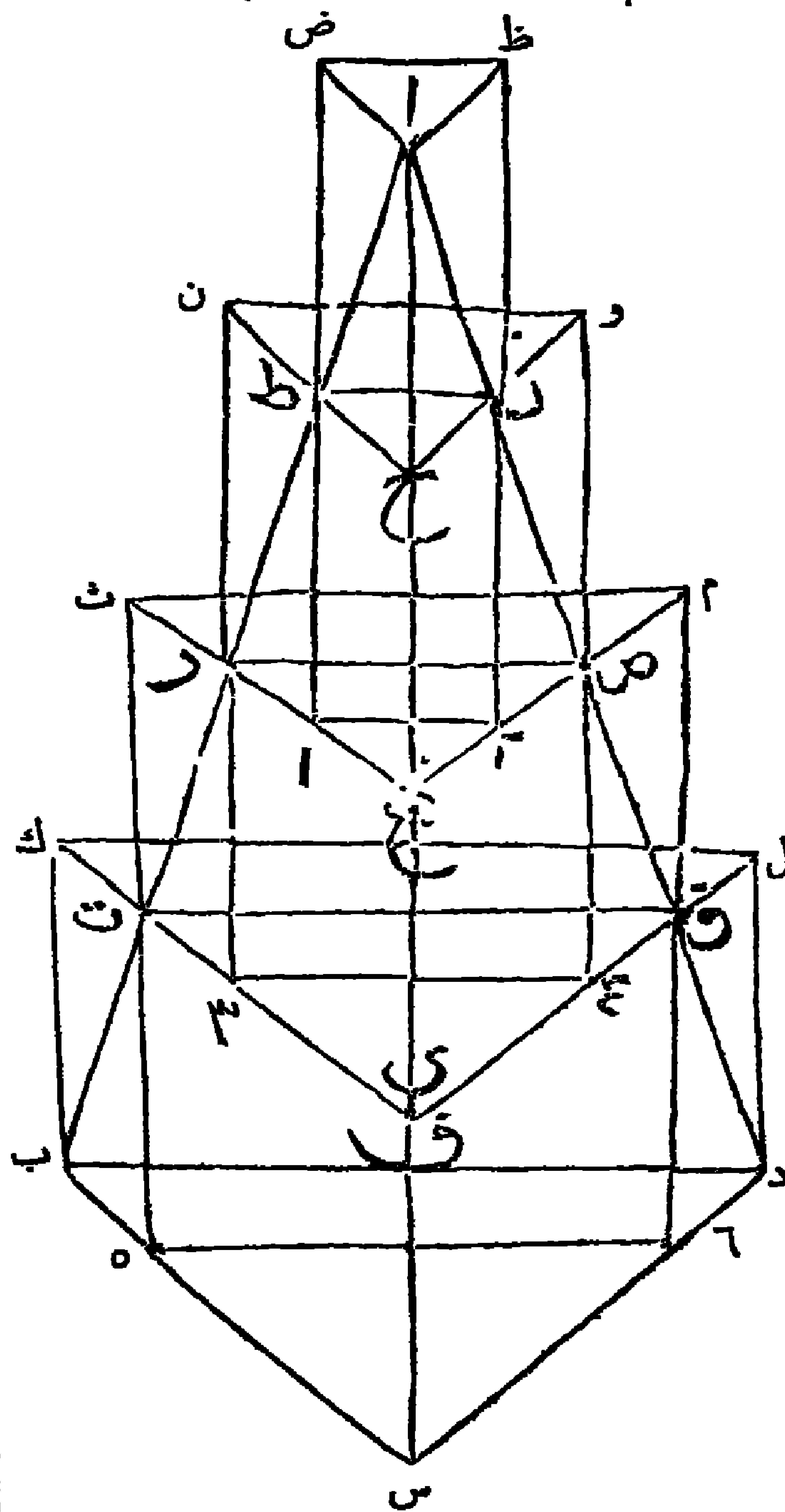
فرعٌ ثانٍ. اهرام كثيرة الاضلاع وهي على علو واحد وعلى قواعد متساوية تكون

الاشكال الحادثة من قطعها على بعدٍ واحد من القواعد متساوية

القضية الثالثة عشرة . ن

يمكن ان تُرسَم عدَّة مواشير على علوٍ واحدٍ محيطة بهرم حتى يكون مجتمع المواشير اعظم من الهرم بمقدار جسم اصغر من جسم مفروض

ليكن ا ب س د هرمًا وز الجسم المفروض فقد يمكن ان يُرسَم عدة مواشير محيطة بالهرم ا ب س د مجتمعها اعظم من ا ب س د بمقدار جسم اصغر من ز لنفرض ان ز يعدل موشورًا على قاعدة الهرم ب س د وعلوهُ ى س العمود على القاعدة ب س د . فان ضُرِب س ى في م مثلًا يكون الحاصل اكبر من ا س . اقسم س ا الى اقسام متساوية عددها يماثل الاحاد في م ولتكن تلك الاقسام س ف ف غ غ ح وح ا فيكون كل واحد منها اقل من س ى . ثم ليمر في النقط ف وغ وح سطوح توازي القاعدة وتصنع مع اضلاع الهرم السطوح

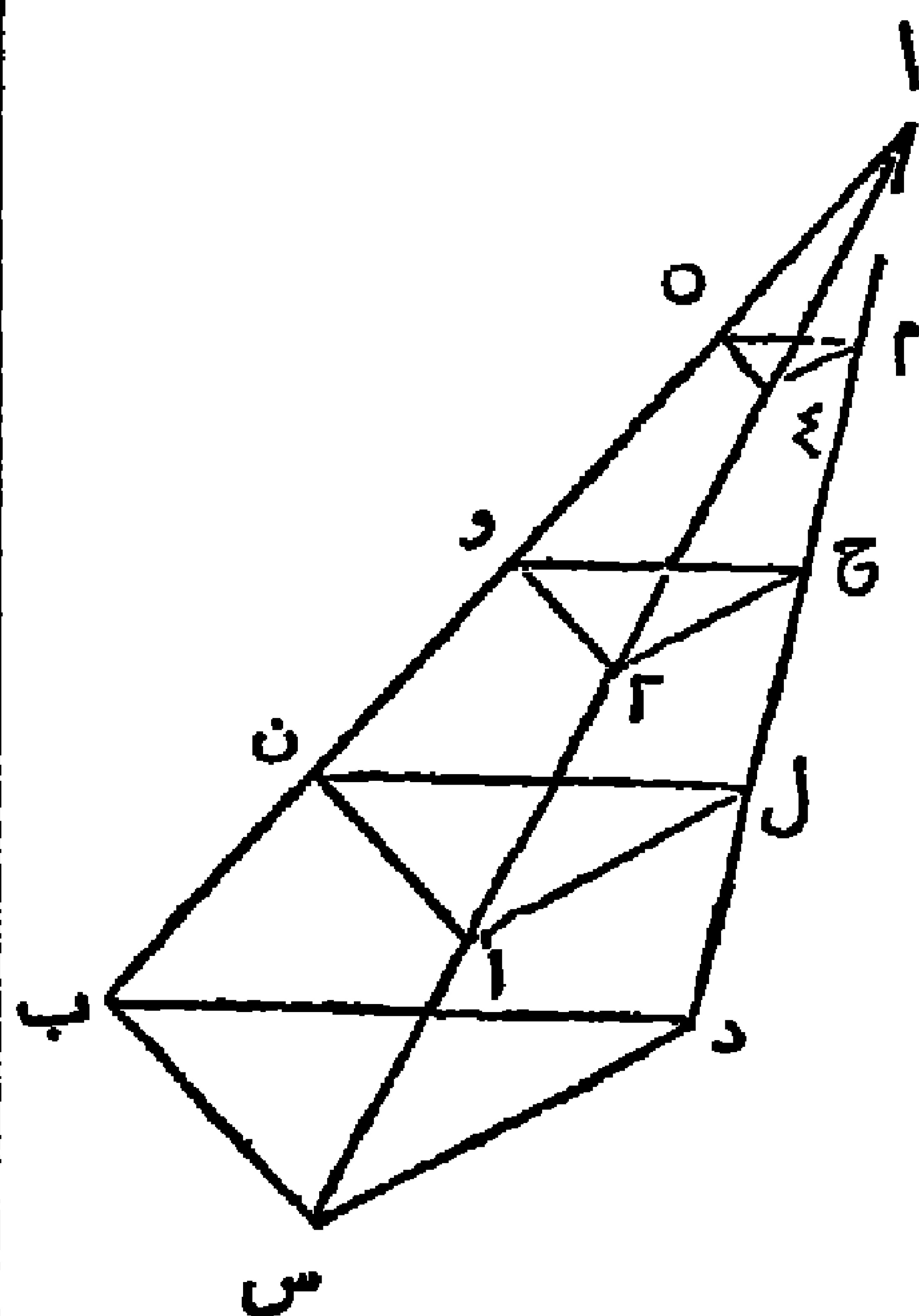


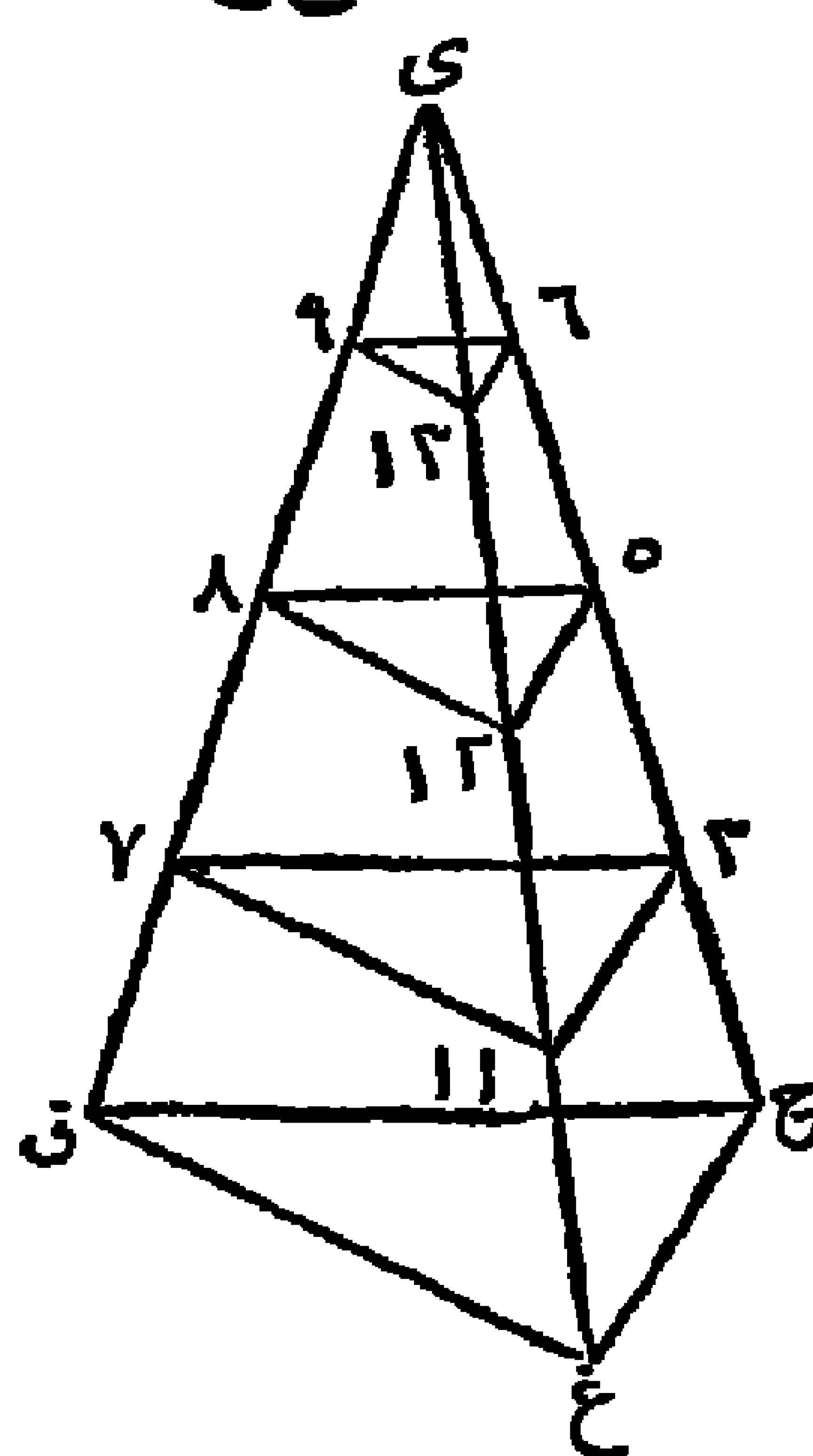
ف ث ق وغ ر ص وح ط ذ فهي متشابهة بعضها لبعض وللقاعدة ب س د (ق ١٢ ك ٢ فرع ١ م) ثم ارسم من ب الخط ب ك حتى يوازي س ف ويلاقي ف ث بعد اخراجهِ في ك وهكذا د ل حتى يلاقي ف ق في ل وارسم ك ل فيكون ك ب س د ل ف موشوراً (حد ٤ ك ٢ م) وعلى هذا القياس اصنع المواشير ث م ور و وط ظ. ثم اخرج ث ث الى ٥ وم ق الى ٦ وارسم الخط ٥ ٦ فيكون ٥ س ٦ ق ف ث موشوراً يعدل الموشور ث م (ق ٨ ك ٢ فرع ١ م) وعلى هذا القياس اصنع المواشير ٢ ص = ر و و ١ ذ = ط ظ فمجتمع المواشير الداخلية ٥ ق و٢ ص و١ ذ = مجتمع ث م ور و وط ظ اي مجتمع الخارجية الا ب ل فيكون ب ل فضلة المواشير الداخلية والخارجية وب ل انما هو اصغر من الموشور على القاعدة ب س د وعلى علو س ى الذي يعدل الجسم المفروض ز. ففضلة المواشير الخارجية والداخلية هي اصغر من الجسم المفروض ز وهذه الفضلة انما هي اعظم من فضلة المواشير الخارجية والهرم ا ب س د لانَّ الهرم اعظم من مجتمع المواشير الداخليَّة فبالاحرى تكون فضلة المواشير الخارجيَّة والهرم اصغر من الجسم المفروض ز

القضية الرابعة عشرة ·ن

اهرامٌ على قواعد متساوية وعلى علوٍّ واحدٍ هي متساوية

ليكن ا ب س د ى ق غ ح هرمَين على قاعدتين متساويتين ب س د ق غ ح وعلى علو واحد اي العمود من الراسَين ا وى على القاعدتين فالهرمان متساويان والاَّ





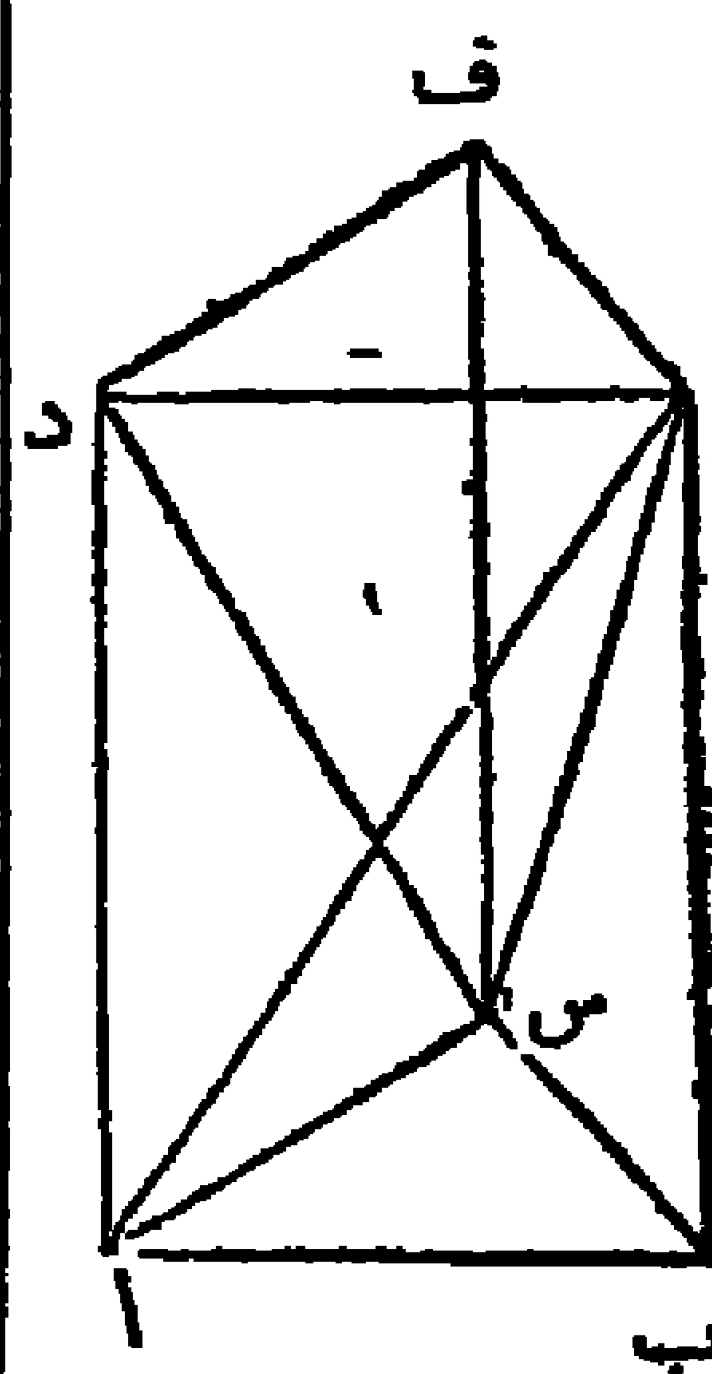
فليكن ى ق غ ح اعظم من ا ب س د بمقدار جسم ز. فيمكن ان ترسَم عدَّة مواشير على

علو واحدٍ محيطة بالهرم ا ب س د حتى يكون مجتمعها اعظم من الهرم بمقدار جسم اصغر من ز (ق ١٢ ك ٢ م) ولتكن قواعد هذه المواشير المثلثات ب س د ا ن ل ٢ و ج ٤ ٥ م. اقسم ى ح الى اقسام متساوية تماثل اقسام ا د وهي ى ٦ ٦ ٥ ٢ ٣ ح ولتمرّ بهذه النقط سطوح توازي القاعدة ق غ ح وهي ٣ ١١ ٧ ٠ ١٢ ٨ ٦ ١٣ ٩. فالقطع ن ا ل يعدل القطع ٧ ١١ ٢ (ق ١٢ ك ٢ م) و و ٢ ج = ٨ ١٢ ٠ و ٥ ٤ م = ٩ ١٣ ٦ والمواشير المبنية على هذه الاقطاع المتساوية هي متساوية (فرع اول ق ٨ ك ٢ م) اي الموشور على القاعدة ب س د وبين السطحين ب س د ن ا ل يعدل الموشور على القاعدة ق غ ح وبين السطحين ق غ ح ٧ ١١ ٢ وهكذا في البقية لانها على علو واحد. فمجتمع المواشير المحيطة بالهرم ا ب س د يعدل مجتمع المواشير المحيطة بالهرم ى ق غ ح وفضلة ا ب س د والمواشير المحيطة به هي اقل من ز. فتكون فضلة هذه المواشير والهرم ى ق غ ح اقل من ز. وقد فُرِض ان فضلة الهرمين تعدل ز. فالهرم ى ق غ ح هو اعظم من الهرم ا ب س د بمقدار اعظم من فضلة المواشير المحيطة بالهرم ى ق غ ح والهرم ا ب س د. فالهرم ى ق غ ح اعظم من مجتمع المواشير المحيطة به وذاك غير ممكن. فلا يكون الهرمان غير متساويين اي هما متساويان

القضية الخامسة عشرة. ن

كل موشور مثلث القاعدة ينقسم الى ثلثة اهرام متساوية مثلثة القاعدة

لنفرض موشورًا قاعدتهُ المثلث ا ب س وليكن د ى ف المثلث المقابل القاعدة



فالموشور ا ب س د ى ف قابل الانقسام الى ثلاثة اهرام متساوية مثلثة القواعد. ارسم ا ى وس د وس ى فيكون ا ب ى د متوازي الاضلاع وقطرهُ ا ى فالمثلث ا د ى = ا ب ى (ق ٣٤ ك ١) فالهرم الذي قاعدتهُ ا د ى يعدل الذي قاعدتهُ ى ب ا وراساهما في س (ق ١٤ ك ٣ م) والهرم ا ب س ى = د ى ف س (ق ١٤ ك ٣ م) فالاهرام الثلاثة ا د ى س ا ب ى س د ف ى س هي متساوية ومجتمعها هو الموشور المفروض؛

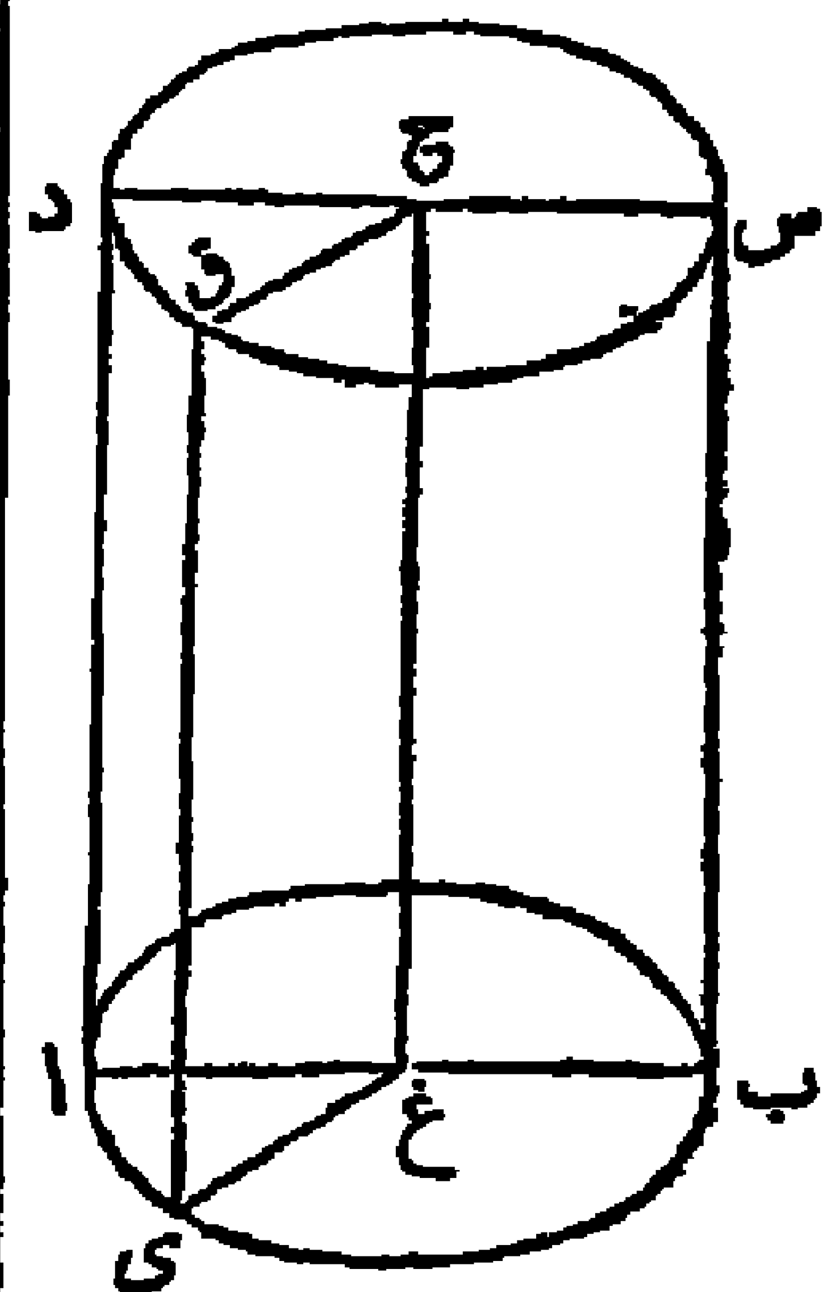
فرعٌ اول. كل هرم هو ثُلث موشور على قاعدة تعدل قاعدتهُ وعلى علوٍّ يعدل علوهُ لانهُ ولئن كانت قاعدتهُ غير مثلثة يمكنها ان تُقسَم الى مواشير لها قواعد مثلثة

فرعٌ ثانٍ. نسبة اهرام على علو واحد بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض (ق٨ ك٢ فرع١ م)

القضية السادسة عشرة. ن

اذا فُرِضَت نقطةٌ في محيط قاعدة اسطوانة ورُسِم منها خطٌّ مستقيم عمودًا على سطح القاعدة يكون الخطُّ كلهُ في سطح الاسطوانة

لتكن ا ب س د اسطوانة محيط قاعدتها ا ى ب ولتكن د ق س الدائرة التي تقابل القاعدة وليكن غ ح محورها. ولتُفرَض في محيط القاعدة النقطة ى وليُرسَم منها الخط المستقيم ى ق عمودًا على سطح الدائرة ا ى ب. فالخط ى ق كلهُ في سطح الاسطوانة. ليلاقِ الخطُّ ى ق السطح المقابل بقاعدة د ق س في النقطة ق. ارسم ى غ وق ح. وليكن ا غ ح د الشكل القائم الزوايا الذي بدورانهِ رُسِمَت الاسطوانة (حدّ ١٤ ك٣ م)

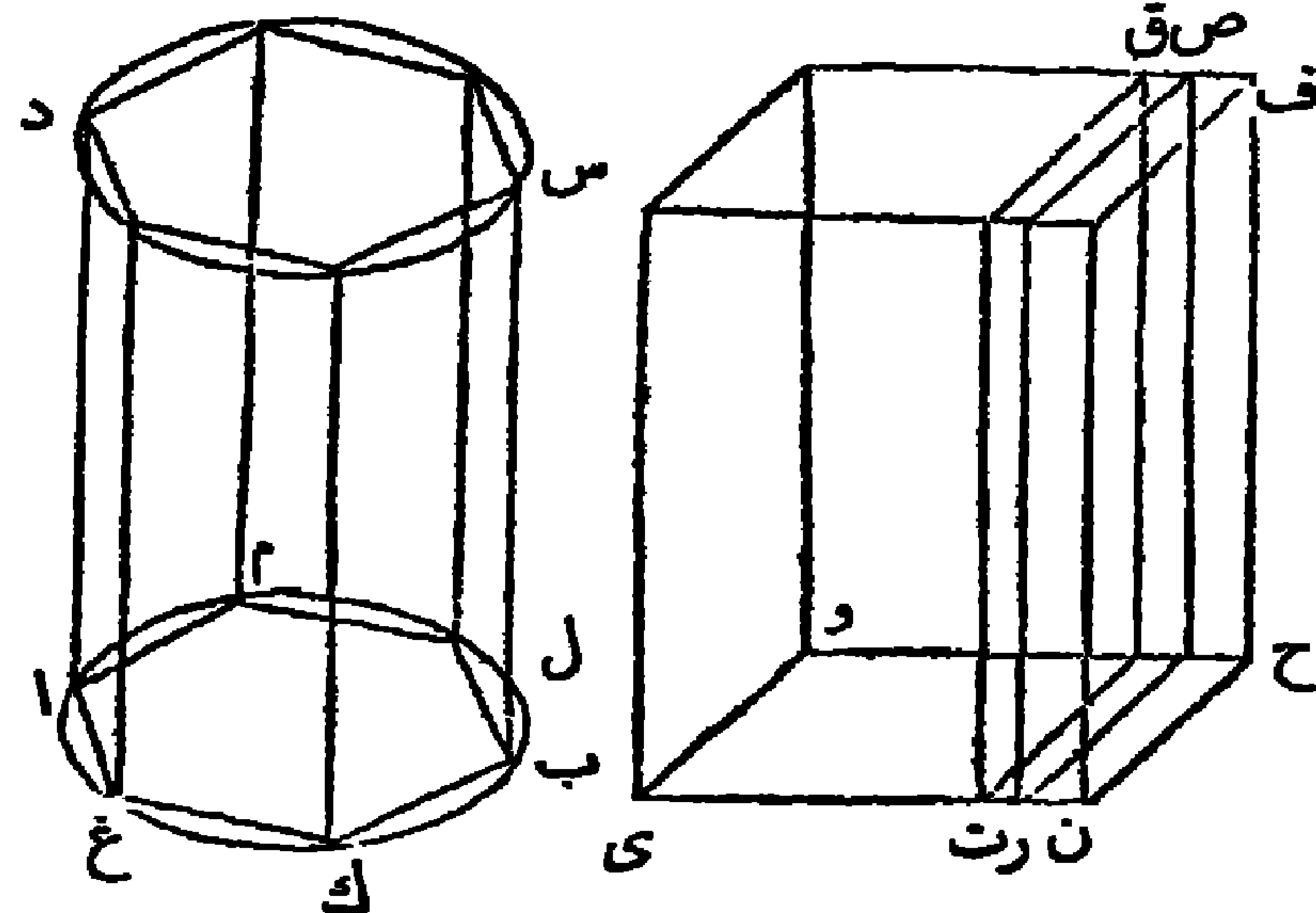


لكون الخطّ غ ح عمودًا على غ ا الذي بدورانهِ رُسِمَت الدائرة ا ى ب فهو عمودٌ على جميع الخطوط المستقيمة في سطح تلك الدائرة التي تلاقيهِ في غ. فهو عمود على سطح الدائرة ا ى ب. والخط ى ق هو عمود على ذلك السطح فالخطُّ ى ق يوازي غ ح (ق٦ ك٣ م) وهما في سطحٍ واحدٍ. والسطح المارّ بالخطين ى ق غ ح يقطع السطحين المتوازيين د ق س ا ى ب في الخطَّين المستقيمين ى غ ق ح فهما متوازيان (ق١٤ ك٣ م) فالشكل ى ق ح غ متوازي الاضلاع والزاوية ى غ ح منهُ قائمة فالشكل قائم الزوايا ويعدل القائم الزوايا ا ح لان ي غ = ا غ. فاذا دار الشكل ا ح حتى يوافق الخطُّ ا غ الخطَّ ى غ فالشكلان ا ح ى ح يتوافقان والخطُّ ا د يوافق الخط ى ق ولكن ا د هو في سطح الاسطوانة فيكون ى ق ايضًا في سطح الاسطوانة

القضية السابعة عشرة . ن

اسطوانة وجسم متوازي السطوح على قاعدتين متساويتين وعلى علوّ واحد هما متساويان

لتكن ا ب س د اسطوانة وليكن ى ف جسمًا متوازي السطوح والقاعدة ا غ ب فلتعدل القاعدة ى ح وليكن علو الجسمين واحدًا فالاسطوانة ا ب س د تعدل الجسم ى ف والّا فلتكن الاسطوانة اصغر

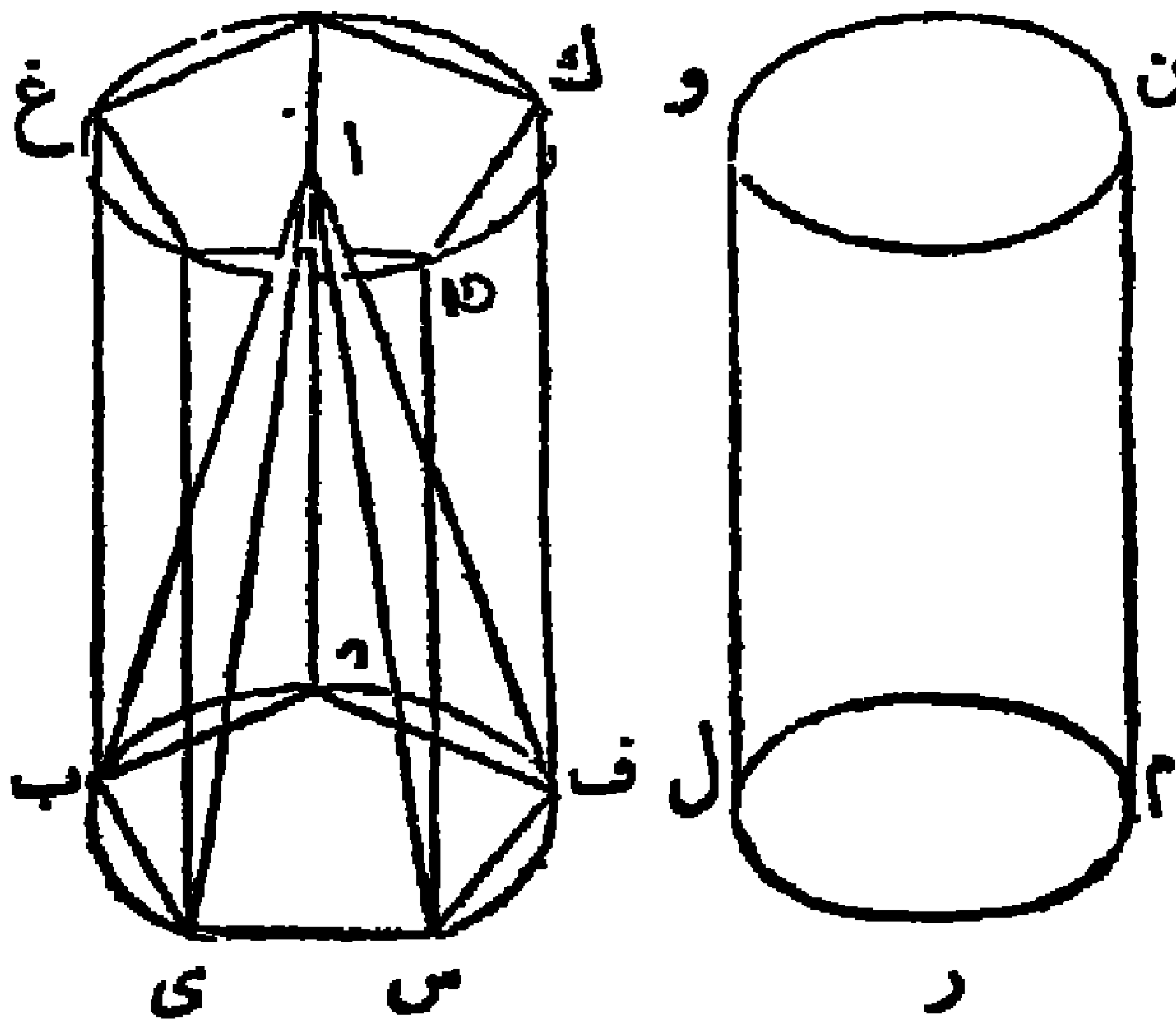


من الجسم ى ف . وليُفصَل من ى ف جزءٌ ى ق يعدل الاسطوانة ا ب س د . وذلك بواسطة سطح ت ق الذي يوازي ن ف ثم ارسم في دائرة ا غ ب شكلاً كثير الاضلاع ا غ ك ب ل م ويكون الفرق بينهُ وبين الدائرة اقل من الشكل ت ح (ق٤ ك١ فرع ١ م) وافصل من ى ح جزءًا و ر = ا غ ك ب ل م . فتقع النقطة ر بين ت و ن ثم ارسم على ا غ ك ب ل م موشورًا ا غ ب س د على علو الاسطوانة فيكون اصغر منها (ق١٦ ك١٢ م) ثم ليمرّ السطح ر ص في النقطة ر وليوازِ ن ف فيقطع من ى ف الجسم ى ص = الموشور ا غ ب س د (ق٨ ك٢ فرع ٢ م) لانهما متساويان في القاعدة والعلوّ والموشور هو اصغر من الاسطوانة وفُرِض ان الاسطوانة = ى ق اذًا ى ص هو اصغر من ى ق وذاك محال فلا يمكن ان تكون الاسطوانة اصغر من ى ف . وعلى هذا الاسلوب يبرهن انها ليست اكبر من ى ف

القضية الثامنة عشرة . ن

اذا كانت اسطوانة ومخروط على قاعدة واحدة وعلى علوٍّ واحدٍ فالمخروط ثُلث الاسطوانة

ليكن المخروط ا ب س د والاسطوانة ب ف ك غ على قاعدة واحدة هي الدائرة ب س د وعلى علوٍّ واحدٍ هو العمود من ا على سطح القاعدة ب س د فالمخروط ا ب س د انما هو ثلث الاسطوانة ب ف ك غ



والاَّ فليكن المخروط ا ب س د ثلث اسطوانة اخرى ل م ن و علوها مثل علو الاسطوانة ب ف ك غ ولكن القاعدة ل ر م ليست مثل القاعدة ب س ف واولاً لتكن ب س د اكبر من ل ر م

ثم لانَّ الدائرة ب س د اكبر من الدائرة ل ر م فيمكن ان يُرسَم في ب س د شكلٌ كثير الاضلاع فضلتها اصغر من فضلة ب س د ول ر م (ق ٤ ك ١ م) ليكن ب ى س ف د ذلك الشكل وليُبنَ عليهِ الهرم ا ب ى س ف د والموشور ب س ف ك ح غ

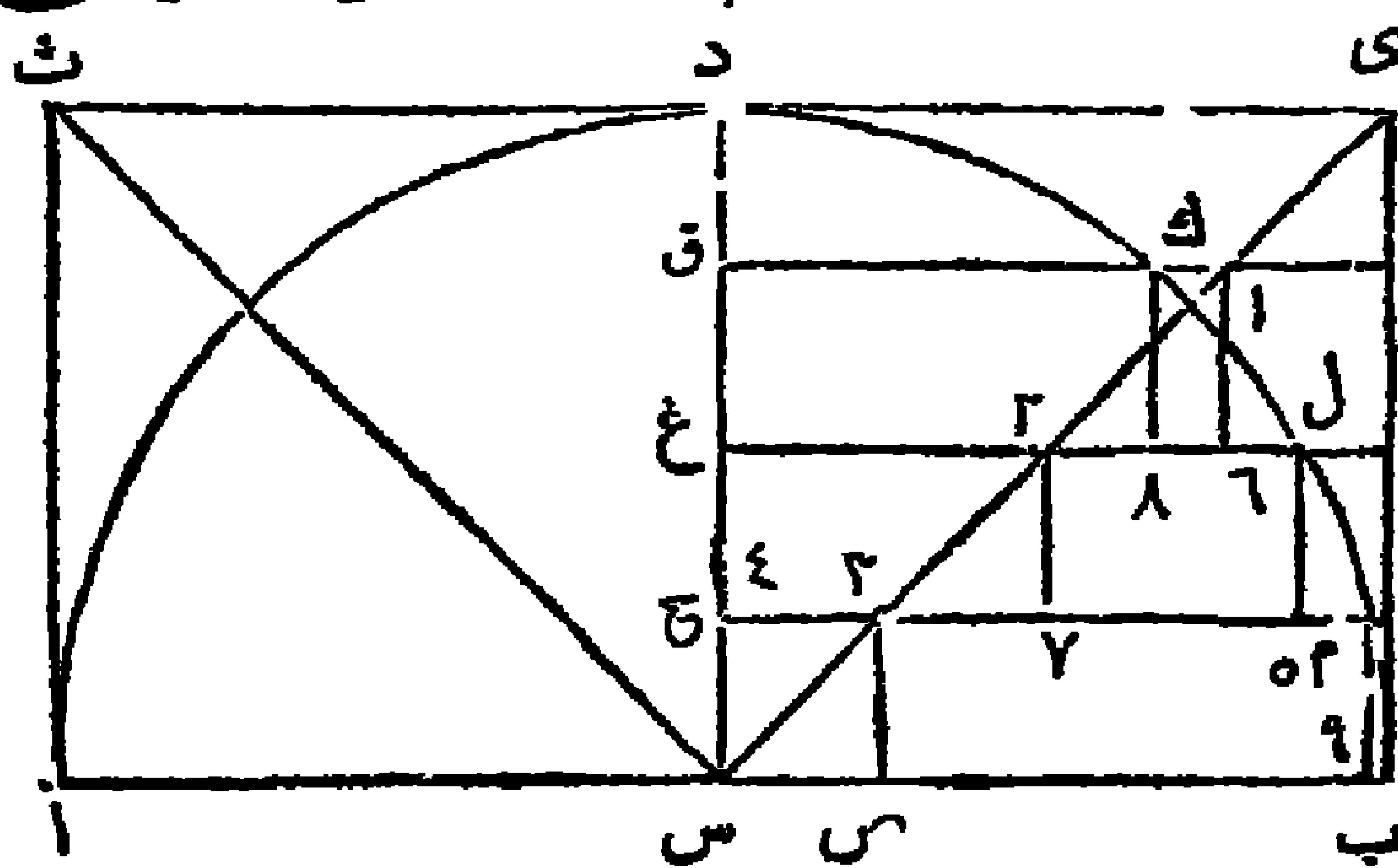
فلكون الشكل الكثير الاضلاع ب ى س ف د اعظم من الدائرة ل ر م يكون الموشور ب س ف ك ح غ اعظم من الاسطوانة ل م ن و لان لهما علوًّا واحدًا ولكن قاعدة الموشور اكبر من قاعدة الاسطوانة . ولكن الهرم ا ب ى س ف د هو ثلث الموشور ب س ف ك ح غ (ق ١١ ك ٣ م) فهو اعظم من ثلث الاسطوانة ل م ن و . وقد فرض ان المخروط ا ب س ف د هو ثلث الاسطوانة ل م ن و . فالهرم ا ب س ف د اعظم من المخروط ا ب س د وهو ايضاً اصغر منهُ وذاك محال فالمخروط ا ب س د ليس اقل من ثلث الاسطوانة ب ف ك غ . وعلى هذا الاسلوب اذا رُسِم شكل كثير

الاضلاع محيط بالدائرة ب س د يبرهن ان المخروط ا ب س د ليس اعظم من ثلث الاسطوانة ب ف ك غ فالمخروط ثلث الاسطوانة

القضية التاسعة عشرة . ن

اذا كان نصف كرةٍ ومخروطٌ على قاعدتين متساويتين وعلى علوٍّ واحدٍ فيمكن ان تُرسَم في نصف الكرة عدّة اساطين وعدّة اخرى محيطة بالمخروط كلها على علوٍّ واحدٍ وفضلة مجتمعها ومجتمع نصف الكرة والمخروط يعدل جسماً اصغر من جسمٍ مفروض

لتكن ا د ب نصف دائرة مركزها س . وليرسم س د عموداً على ا ب وليكن د ب ود ا مربعين على د س . ارسم س ى . وليُدَر الشكل كلهُ على د س . فالقطاع ب س د الذي هو نصف



الدائرة ا د ب يرسم نصف كرة مركزها س (حد ٧ ك ٣ م) والمثلث س د ى يرسم مخروطاً راسهُ س وقاعدتهُ الدائرة المرسومة بالخط د ى (حد ١١ ك ٣ م) التي تعدل المرسومة بالخط ب س الذي هو قاعدة نصف الكرة ولتكن ع جسماً ما . فيمكن ان ترسم عدة اساطين في نصف الكرة ا د ب وعدة اخرى تحيط بالمخروط ى س ث وتكون فضلة مجتمعها ومجتمع المخروط ونصف الكرة اصغر من ع الجسم المفروض

ارسم على قاعدة نصف الكرة اسطوانة = ع وليكن علوها س ٤ واقسم س د الى اقسام [illegible] كل [illegible] س ٤ ولتكن [illegible] ح وح غ وغ ق وق د . ثم ارسم ق ن وغ و وح ت حتى توازي س ب وتلاقي محيط الدائرة في ك ول وم وتلاقي الخط س ى في النقط ١ ٢ ٣ وارسم ك ٨ و ل ٥ وم ٩ عمودية على

غ و وح ث وس ب وايضاً ٢ ص و٢ ٧ و١ ٦ عمودية على الخطوط المذكورة فبعد اتمام هذا الرسم ان دار الجميع حول س د فالاشكال المتوازية الاضلاع والقائمة الزوايا ق ٨ وغ ٥ وح ٩ تُحدِث بدورانها اساطين (حد ١٤ ك ٢ م) في نصف الكرة ب د ا والاشكال د ن ق ٦ غ ٧ ح ص تُحدِث اساطين محيطة بالمخروط ث س ى. فيمكن ان يبرهن كما في المواشير المرسومة في هرم (ق ١٢ ك ٢ م) ان مجتمع كل الاساطين في نصف الكرة هو اقل من نصف الكرة بمقدار جسم اصغر من الاسطوانة الحادثة من دوران ح ب اي اصغر من ع لان ح ب قد فرض اصغر من ع. وهكذا يبرهن ايضاً ان مجتمع الاساطين المحيطة بالمخروط ث س ى هو اكبر من المخروط بمقدار جسم اصغر من الاسطوانة الحادثة من دوران د ن اي بجسم اصغر من ع. فلكون مجتمع الاساطين المرسومة في نصف الكرة مع جسم اصغر من ع يعدل نصف الكرة ولكون مجتمع الاساطين المحيطة بالمخروط يعدل المخروط مع جسم اصغر من ع فباضافة اشياء متساوية الى اشياء متساوية مجتمع هذه الاساطين مع جسم اصغر من ع يعدل مجتمع نصف الكرة والمخروط مع جسم اصغر من ع. ففضلة مجتمع كل الاساطين ومجتمع نصف الكرة والمخروط يعدل فضلة جسمين كل واحد منهما اصغر من ع فلا بد ان تكون هذه الفضلة ايضاً اصغر من ع

القضية العشرون · ن

اذا فُرِض ما فُرِض في القضية السابقة فمجتمع الاساطين في نصف الكرة والمحيطة بالمخروط يعدل اسطوانةً علوها وقاعدتها مثل علو نصف الكرة وقاعدته

ليتمّ الرسم كما في القضية السابقة فمجتمع الاساطين الحادثة من دوران اشكال ح ٩ غ ٥ ق ٨ اي الواقعة في نصف الكرة مع الحادثة من دوران الاشكال ح ص غ ٧ ق ٦ ود ن اي المحيطة بالمخروط يعدل الاسطوانة الحادثة من دوران الشكل ب د. لتكن ل نقطة التقاء غ و بمحيط الدائرة فلانّ س غ ل قائمة فان أُوصِل بين س ول فالدائرتان المرسومتان على نصف القطر س غ وغ ل تعدلان الدائرة المرسومة على نصف القطر س ل اوغ و (ق ٦ ك ١ فرع ٣ م) وس غ =

غ ٢ لان س د = د ى فالدائرتان المرسومتان على نصف القطر ع ٢ وغ ل معاً تعدلان الدائرة المرسومة على نصف القطر غ و اي الدائرتان المرسومتان بدوران غ ٢ وغ ل على نقطة غ هما معاً تعدلان الدائرة المرسومة بدوران غ و على تلك النقطة. فالاسطوانتان الواقفتان على الدائرتين المذكورتين اذ كان لهما علو واحد غ ح تعدلان القائمة على الدائرة الاخرى التي لها ايضاً علو غ ح. فالاساطين الحادثة من دوران غ ٥ وغ ٧ تعدل الحادثة من دوران غ ث وهكذا يُبرهَن في الجميع فالاساطين الحادثة من دوران ح ٩ غ ٥ ق ٨ وح ص غ ٧ ق ٦ ود ن تعدل الحادثة من دوران ب د اي تعدل اسطوانة علوها وقاعدتها مثل علو نصف الكرة وقاعدته

القضية الحادية والعشرون. ن

الكرة هي ثُلُثا الاسطوانة المحيطة بها

لِيُرسَم كما في القضية السابقة. فان لم يكن نصف الكرة الحادث من دوران ب د س ثلثي الاسطوانة الحادثة من دوران ب د فلنفرضهُ اكثر من ذلك بمقدار جسم ع. ثم لانَّ المخروط الحادث من دوران س د ى هو ثلث الاسطوانة المشار اليها (ق ١٨ ك ٢ م) فيكون نصف الكرة والمخروط معاً اكبر من الاسطوانة بمقدار جسم ع. ولكن هذه الاسطوانة تعدل مجتمع الاساطين الحادثة من دوران الاشكال ح ص غ ٥ الخ (ق ٢٠ ك ٢ م) فمجتمع نصف الكرة والمخروط هو اكبر من مجتمع هذه الاساطين بمقدار جسم ع وذلك محال لانهُ قد تبرهن (ق ١٩ ك ٢ م) ان فضلة مجتمع نصف الكرة والمخروط ومجتمع الاساطين يعدل جسماً اصغر من ع فنصف الكرة يعدل ثلثي الاسطوانة الحادثة من دوران ب د فكل الكرة ثلثا الاسطوانة الحادثة من مضاعف ب د اي ثلثا الاسطوانة المحيطة بها

تمت المضافات الى الهندسة

اصول قياس المثلثات البسيطة

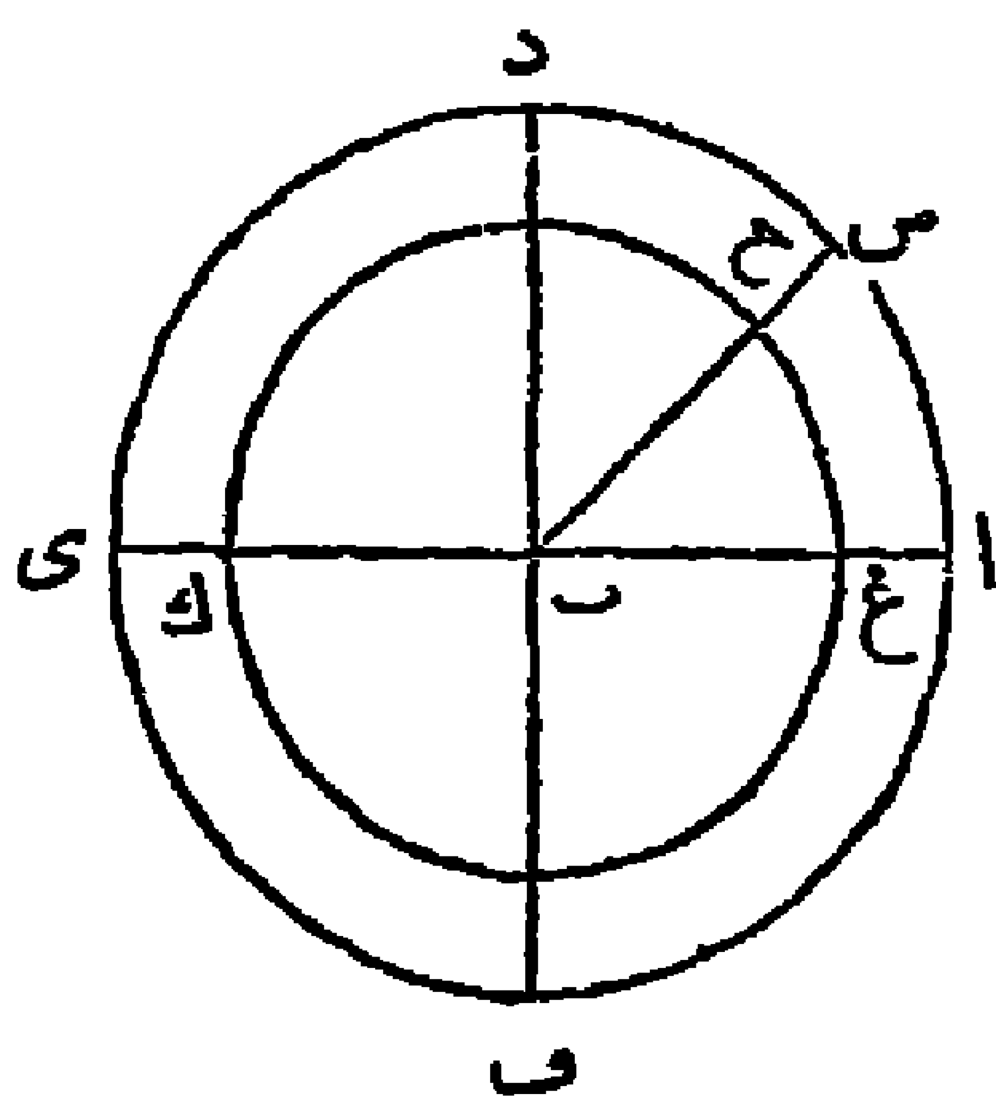
اصول قياس المثلثات البسيطة تنقسم الى ثلاثة اقسام. القسم الاول ايضاح المبادئ. الثاني قواعد العمل. والثالث كيفية اصطناع الجداول مع بعض النظريات المسهلة لبعض العمليات العسرة

القسم الاول

سابقة اولى

نسبة زاوية في مركز دائرة الى اربع زوايا قائمة كنسبة القوس الذي يقابلها الى محيط الدائرة

لتكن ا ب س زاوية عند مركز الدائرة ا س ى ف وا س القوس المقابل لها. فنسبة



ا ب س : اربع زوايا قائمة :: ا س : محيط الدائرة ا س ى ف. اخرج ا ب حتى يلاقي المحيط في ى وارسم د ب ف عموداً على ى ا. فالزاويتان ا ب س ا ب د هما عند مركز دائرة واحدة ونسبة ا ب س : ا ب د :: القوس ا س : القوس ا د (ق ٣٣ ك ٦) ونسبة الزاوية ا ب س : اربعة امثال ا ب د :: ا س : اربعة امثال ا د (ق ٤ ك ٥) وا ب د قائمة. فاربعة امثال ا د يعدل كل المحيط ا س ى ف

فنسبة ا ب س : اربع زوايا قائمة :: القوس ا س : المحيط ا د ى ف

فرع. الزوايا المتساوية عند مراكز دوائر مختلفة بين اقواسها ذات النسبة التي بين محيطات الدوائر. الزاوية ا ب س عند مركز الدائرتين ا د ف غ ح ك ويقابلها القوس ا س من الواحدة والقوس غ ح من الاخرى ونسبة ا س الى محيط الدائرة ا د ف كنسبة ا ب س الى اربع زوايا قائمة ونسبة غ ح الى محيط الدائرة غ ح ك كنسبة ا ب س الى اربع زوايا قائمة

حدود

١ اذا تقاطع خطان مستقيمان في مركز دائرة فالقوس الواقع بينهما هو قياس الزاوية الحادثة بينهما. فالقوس ا س هو قياس الزاوية ا ب س

٢ اذا انقسم محيط دائرة الى ٣٦٠ قسمًا متساويًا فكل قسم يسمّى درجة واذا انقسمت الدرجة الى ستّين قسمًا متساويًا فكل واحد يسمى دقيقة والدقيقة تُقسَم الى ستين قسمًا متساويًا تسمى ثواني والثانية الى ستين قسمًا متساويًا تسمى ثوالث وهكذا الى ما لا نهاية لهُ . والدرجات والدقائق والثواني الى اخرهِ في قوس هي نفس الدرجات والدقائق والثواني في الزاوية التي يقيسها ذلك القوس

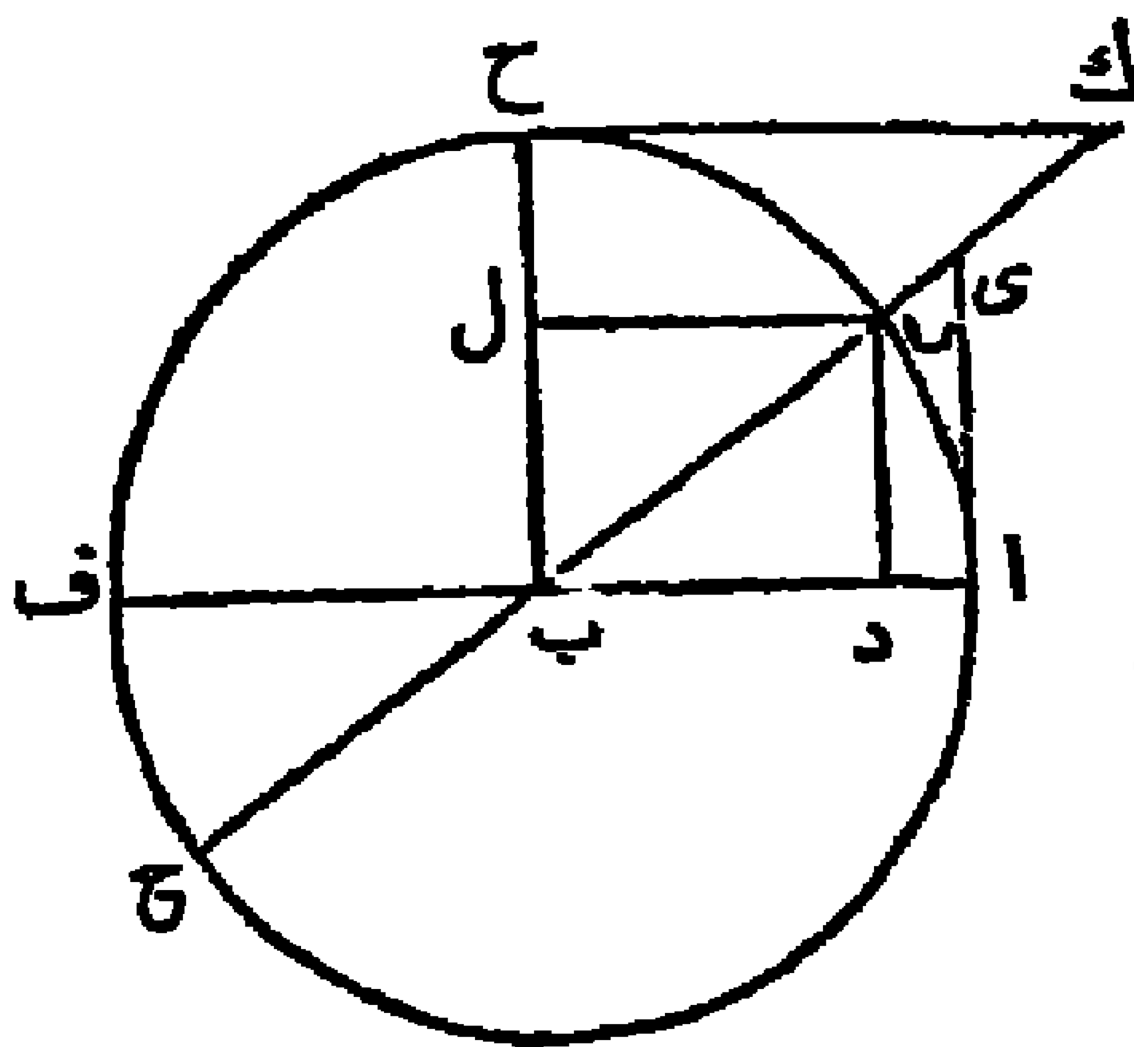
فرعٌ اول. نسبة قوسٍ الى المحيط الذي هو قسم منهُ كنسبة درجاتهِ واجزاء درجاتهِ الى ٣٦٠ ونسبة زاوية الى اربع زوايا قائمة كنسبة درجات قوسها واجزاء درجاتهِ الى ٣٦٠

فرعٌ ثانٍ. الاقواس التي تقيس زاويةً واحدة هي متماثلة في عدَّة درجاتها واجزاء درجاتها

الدرجات والدقايق والثواني الخ في قوسٍ او زاويةٍ تُكتَب هكذا ٤٩° ٣٦' ٢٤" ٤٢"' الخ وتقرأ ٤٩ درجة و٣٦ دقيقة و٢٤ ثانية و٤٢ ثالثة الخ

٣ اذا عدلت زاويتان معًا قائمتين فكل واحدة تسمى متمّ الاخرى وهكذا في قوسين عدلا معًا نصف دائرة فكل واحدٍ منهما متمّ الآخر

٤ الخط المستقيم المرسوم من طرف قوس مثل الخط ن د عمودًا على القطر المارّ بالطرف الآخر من القوس هو جَيب القوس ا ن او جيب الزاوية ا ب ن التي



كان القوس ا ن قياسها

فرعٌ اول. جيب ربع دائرة او قائمةٍ يعدل نصف القطر

فرعٌ ثانٍ. جيب قوس هو نصف وتر مضاعف القوس كما يتضح من اخراج الجيب حتى يلاقي المحيط

٥ القسم من القطر الواقع بين الجيب والمحيط مثل د ا يسمّى سهم الجيب للقوس ا ن او للزاوية ا ب ن

٦ الخطّ المستقيم الذي يمسّ طرف قوس مثل الخط ى ا الذي يمسّ طرف القوس ن ا ويلاقي القطر المارّ بطرفهِ الاخر مثل ب ى يسمّى مماسّ القوس ا ن او الزاوية ا ب ن

فرعٌ. مماسّ نصف قائمة يعدل نصف القطر

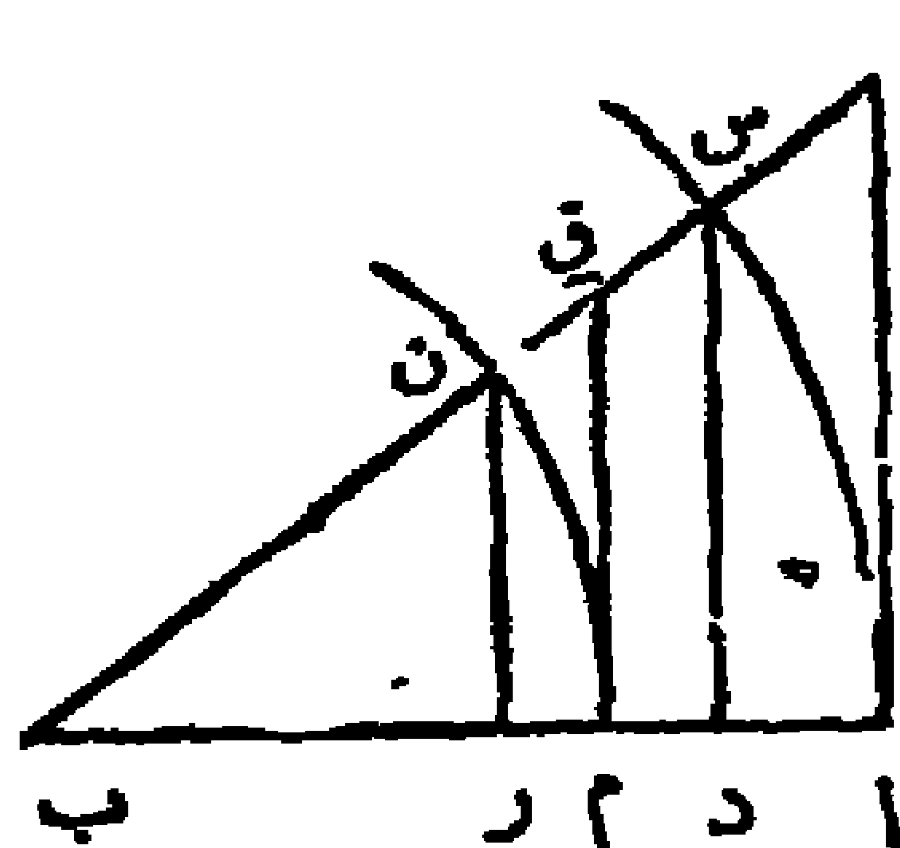
٧ الخطّ المستقيم ب ى بين المركز وطرف المماسّ يسمّى قاطع القوس ن ا او الزاوية ا ب ن

فرعٌ للحدّ الرابع والسادس والسابع. جيب زاويةٍ ما مثل ا ب ن ومماسّها وقاطعها هو ايضاً جيب ومماس وقاطع لتتمّها ن ب ف

الامر واضح من الحدّ الرابع ان ن د هو جيب الزاوية ن ب ف. اخرج ن ب حتى يلاقي المحيط في ج. فيتضح انّ ى ا هو مماسٌ وب ى قاطعٌ للزاوية ا ب ج او ن ب ف (حد ٦ و ٧)

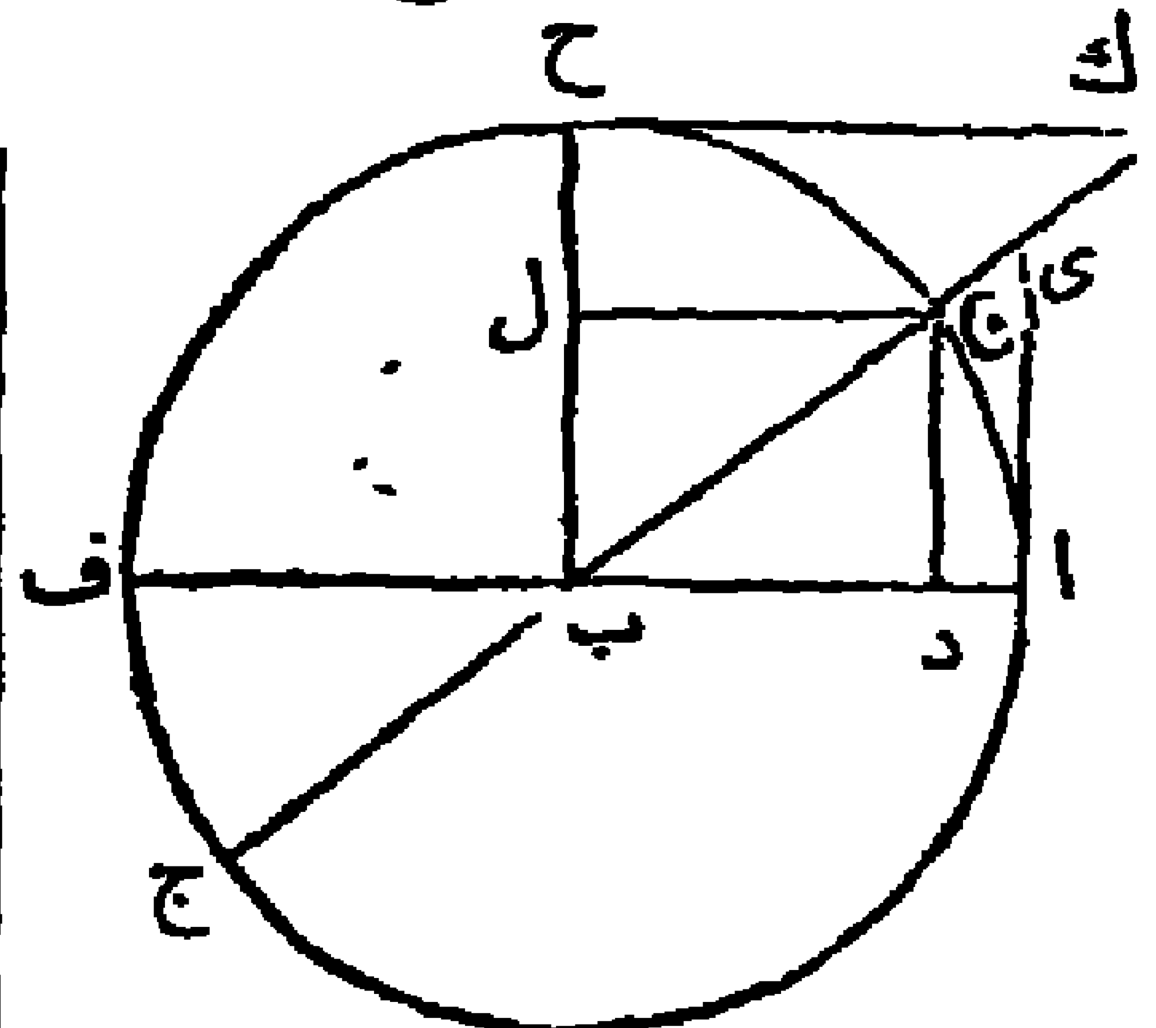
فرعٌ للحدّ الرابع والخامس والسادس والسابع. نسبة جيب قوسٍ ما وسهم جيبهِ ومماسهِ وقاطعهِ التي تقيس زاوية ما الى جيب قوسٍ آخر وسهم جيبهِ ومماسّهِ وقاطعهِ التي تقيس تلك الزاوية ذاتها كنسبة نصف قطر القوس الاول الى نصف قطر القوس الثاني

ليكن ا س وم ن قياسَين للزاوية ا ب س حسب الحدّ الاول وليكن س د الجيب ود ا سهم الجيب وى ا المماسّ وب ى القاطع للقوس ا س (حدّ ٤ و ٥ و ٦ و ٧) وليكن ن ر الجيب ور م سهم الجيب وم ق المماسّ وب ق القاطع للقوس م ن فلكون ن ر ق م س د ى ا متوازية تكون نسبة س د : ن ر :: نصف القطر س ب :



نصف القطر ن ب ونسبة ا ى : م ق :: نصف القطر ا ب : نصف القطر ب م وب ى : ب ق :: ا ب : ب م ولانّ ب س : ب د :: ب ن : ب ر او ب ا : ب د :: ب م : ب ر فبالقلب والمبادلة ا د : م ر :: ا ب : ب م . فالفرع واضحٌ . واذا اصطُنِعَت جداول دالَّةٌ على نسبة الجيب وسهم الجيب والماس والقاطع لزاوية ما الى نصف قطر مفروض فهي تدلُّ ايضًا على نسبة هذا الجيب وسهمهِ الى اخرهِ من تلك الزاوية الى ايّ نصف قطر فُرِض . وقد جرت العادة في تلك الجداول ان يحسب نصف القطر واحدًا او حلقة من السلسلة ١٠ ١٠٠ ١٠٠٠ الى اخرهِ وسياتي ايضاح ذلك في موضعهِ

٨ فضلة زاوية ما وزاوية قائمة تسمى كمالها وفضلة قوس ما وربع دائرة يسمى كمالهُ . فاذا كان ب ح عمودًا على ا ب تكون الزاوية ح ب ن كمال الزاوية ا ب ن والقوس ح ن كمال القوس ن ا والزاوية ح ب ن كمال الزاوية المنفرجة ف ب ن والقوس ح ن كمال القوس ف ح ن



٩ نظير الجيب ونظير الماس ونظير القاطع لزاوية هي الجيب والماسُّ والقاطع لكمال تلك الزاوية . فاذا كان ن د جيب الزاوية ا ب ن وى ا ماسّها وب ى قاطعها يكون ن ل نظير الجيب وك ح نظير الماسّ وب ك نظير القاطع لها

فرعٌ اول . نصف القطر هو متناسب متوسّط بين الماسّ ونظير الماسّ لزاوية ما فماسُّ ا ب ن × نظير ماس ا ب ن = مربع نصف القطر

لانَّ ح ك وب ا متوازيان فالزاويتان ح ك ب ا ب ن متساويتان وك ح ب وب ا ى قائمتان فالمثلثان ب ا ى ب ح ك متشابهان وا ى : ا ب :: ب ح : ح ك او ا ب : ح ك

فرعٌ ثانٍ . نصف القطر متناسب متوسّط بين نظير الجيب والقاطع لزاويةٍ ما اي نظير جيب ا ب ن × قاطع ا ب ن = مربّع نصف القطر

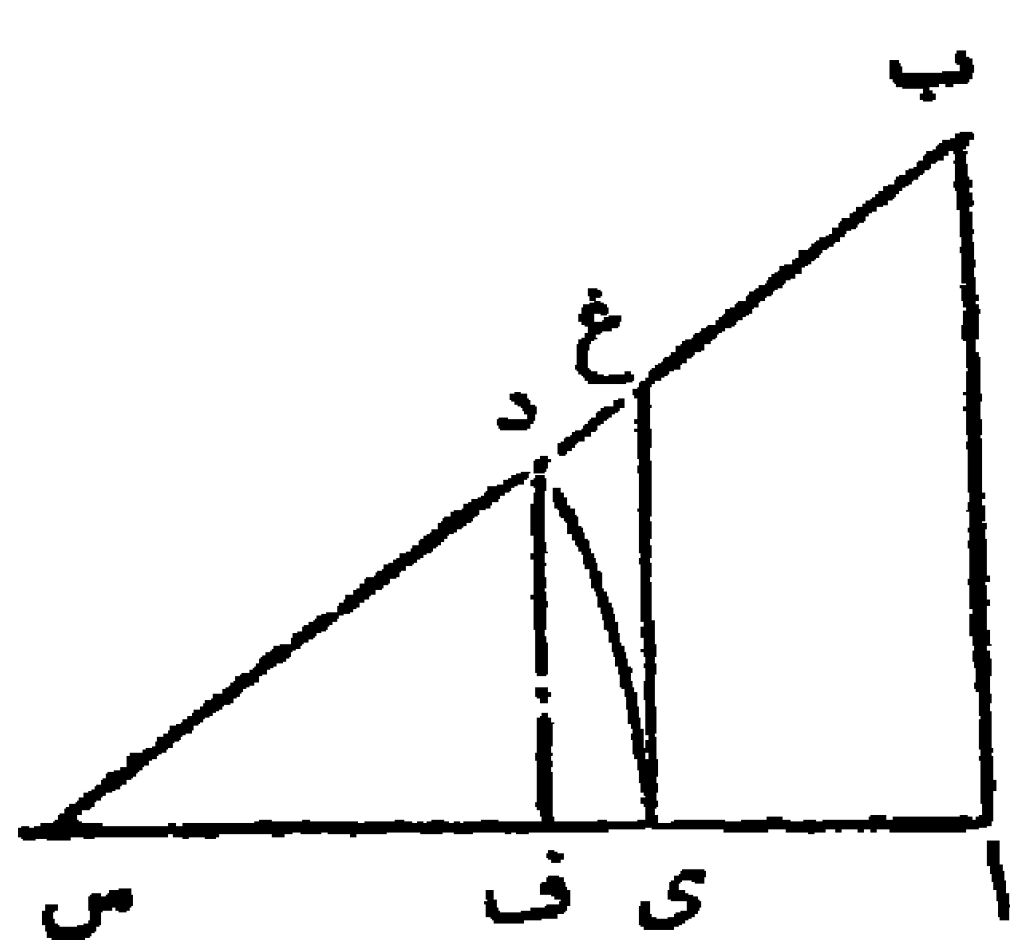
لانَّ ن د يوازي ى ا فنسبة ب د : ب ن او ب ا :: ب ا : ب ى

تنبيه. لاجل الاختصار يُدَلُّ على نصف القطر هكذا $\frac{ق}{٢}$ وعلى الجيب هكذا جـ وعلى المماس هكذا م وعلى القاطع هكذا قا وعلى سهم الجيب هكذا سجـ. وعلى نظير الجيب والمماس والقاطع هكذا نجـ نم نقا

القضية الاولى. ن

في مثلث بسيط قائم الزاوية تكون نسبة الوتر الى احد الضلعَين كنصف القطر الى جيب الزاوية المقابلة ذلك الضلع. ونسبة ضلع الى الضلع الاخر كنسبة نصف القطر الى مماس الزاوية المقابلة ذلك الضلع

ليكن ا ب س مثلثًا بسيطًا قائم الزاوية وب س وترهُ. اجعل س مركزًا وس د مثلاً نصف قطرٍ وارسم القوس د ى. ارسم د ف عمودًا على س ى ومن ى ارسم المماسّ ى غ الذي يلاقي س ب في غ فيكون د ف جيبًا وغ ى مماسًّا للقوس د ى او للزاوية عند س



المثلثان د ف س ب ا س متساويا الزوايا لانَّ د ف س وب ا س قائمتان والزاوية عند س مشتركة بين المثلثين. فنسبة س ب : ب ا :: س د : د ف وس د هو نصف القطر ود ف جيب الزاوية عند س (حدّ ٤) فنسبة س ب : ب ا :: $\frac{ق}{٢}$: جـ س

ولانَّ ى غ يمسُّ الدائرة في ى فالزاوية غ ى س قائمة وتعدل ب ا س والزاوية عند س مشتركة بين المثلثين غ ى س ب ا س فهما متساويا الزوايا ونسبة س ا : ا ب :: س ى : ى غ وس ى نصف قطر وى غ مماس الزاوية عند س فنسبة

س ا : ا ب :: $\frac{ق}{٢}$: م س

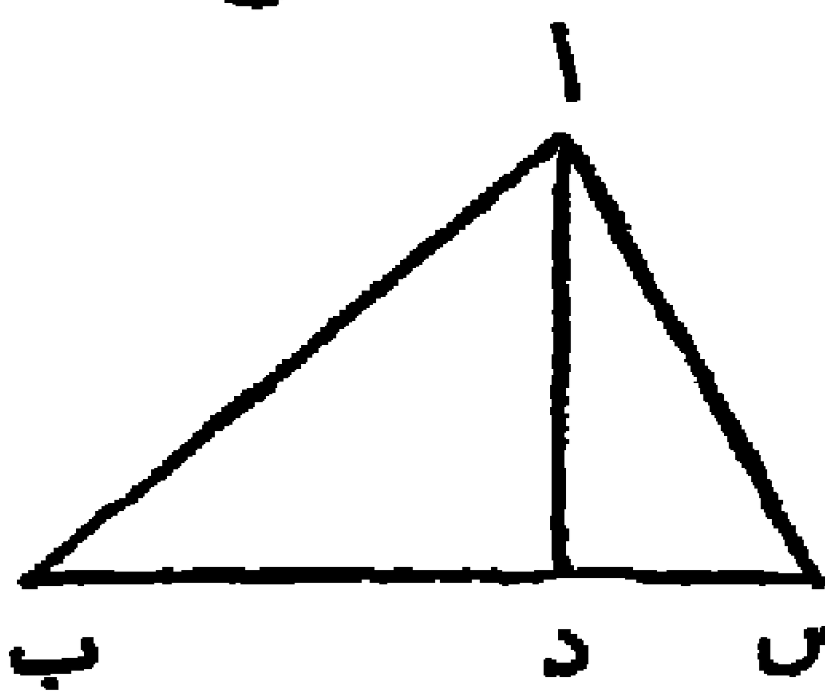
فرعٌ اول. نسبة نصف القطر الى قاطع الزاوية عند س كنسبة الضلع الذي يلي تلك الزاوية الى الوَتَر

لانَّ س غ قاطع الزاوية عند س (حد ٧) والمثلثان س غ ى س ب ا متساويا الزوايا فنسبة س ا : س ب :: س ى : س غ او س ا : س ب :: $\frac{ق}{٢}$: قا س

فرعٌ ثانٍ. حسب القضية السابقة وفرعها لو فُرِضَ نصف القطر واحدًا لكان

جـ س = $\frac{ا ب}{ب س}$ وم س = $\frac{ا ب}{ا س}$ وقا س = $\frac{ب س}{ا س}$ ولانَّ جـ س = نجـ ب (لان الزاوية عند ب كمال الزاوية عند س) فلنا نجـ ب = $\frac{ا ب}{ب س}$ ونجـ س = $\frac{ا س}{ب س}$

فرعٌ ثالث. في كل مثلث اذا رُسم عمودٌ من احدى زواياهُ الى الضلع المقابل تكون نسبة احد قسمي ذلك الضلع الى القسم الآخر منهُ كنسبة مماسّ احدى الزوايا على جانب العمود الى مماسّ الاخرى



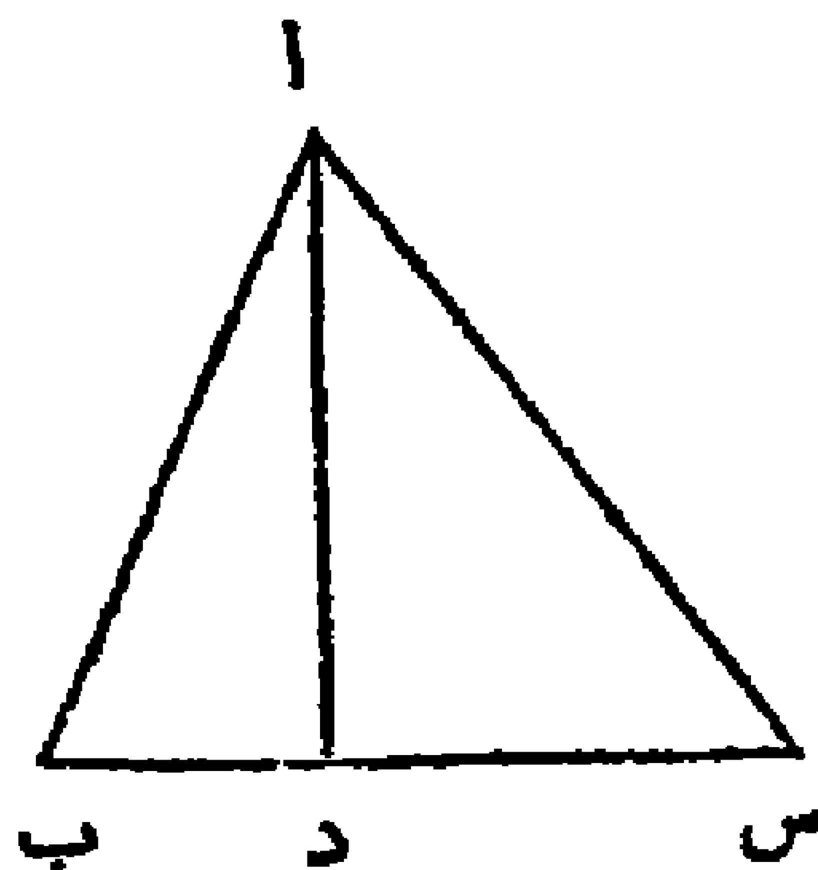
في المثلث ا ب س ليرسم ا د عمودًا من ا على ب س فكل من المثلثين ا د ب ا د س ذو قائمة ونسبة ا د : د س :: $\frac{ق}{٢}$: م س ا د وا د : د ب :: $\frac{ق}{٢}$: م د ا ب وبالمساواة د س : د ب :: م س ا د : م ب ا د

تعليقة. يسهل علينا حفظ هذه القضية بملاحظة امرين اوَّلهما انهُ في مثلث ذي قائمة اذا جُعِل الوترُ نصفَ قطرٍ يصير كلٌّ من الضلعَين جيب الزاوية التي تقابلهُ. والثاني انَّهُ اذا جُعِل احد الضلعين نصف قطرٍ يصير الضلع الاخر مماسًّا للزاوية التي تقابلهُ والوتر قاطعًا لها

القضية الثانية. ن

نسبة اضلاع مثلث بسيط بعضها الى بعض كنسبة جيوب الزوايا التي تقابل تلك الاضلاع بعضها الى بعض

ليكن ا ب س مثلثًا ومن الزاوية ا ارسم ا د عمودًا على ب س . فالمثلث ا ب د

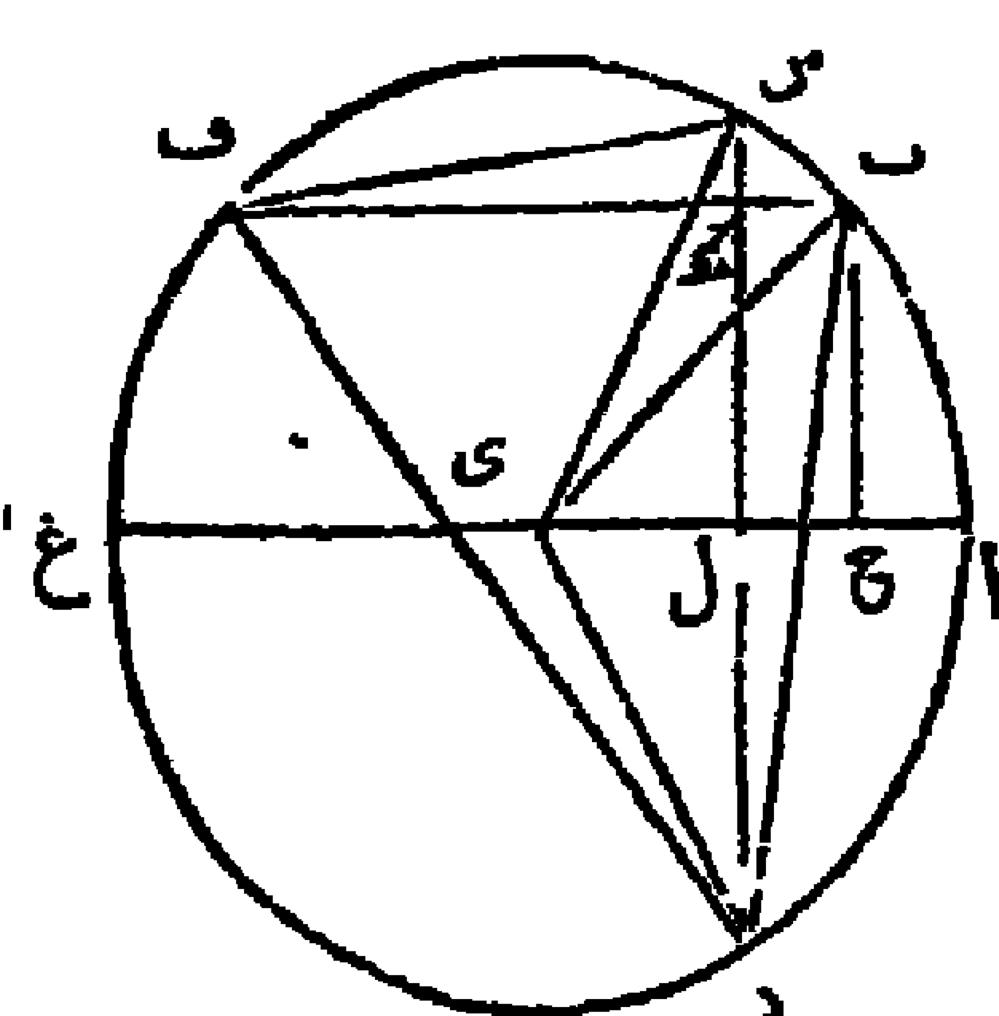


لهُ قائمة عند د ونسبة ا ب : ا د :: $\frac{ق}{٢}$: جـ ب
ولهذا السبب ايضًا ا س : ا د :: $\frac{ق}{٢}$: جـ س
وبالقلب ا د : ا س :: جـ س : $\frac{ق}{٢}$ وبالقلب
والمساواة ا ب : ا س :: جـ س : جـ ب . وهكذا
يبرهن ان ا ب : ب س : جـ س : جـ ا

القضية الثالثة . ن

اذا فُرِض قوسان من دائرة تكون نسبة مجتمع جيبَيهما الى فضلة جيبَيهما كنسبة مماسّ نصف مجتمعهما الى مماسّ نصف فضلتهما

ليكن ا ب وا س قوسَين من الدائرة ا ب س د والنقطة ى مركزها وا ى غ



قطرها فنسبة جـ ا س + جـ ا ب : جـ ا س − جـ ا ب :: م $\frac{١}{٢}$ (ا س + ا ب) . م $\frac{١}{٢}$ (ا س − ا ب) ارسم ب ف حتى يوازي ا غ ويلاقي المحيط في ف وارسم ب ح وس ل عمودَين على ا ى . فهما جيبا القوسين ا ب وا س . اخرج س ل حتى يلاقي المحيط في د وارسم د ف د ى د ب ف س ى ب ى . ن

لكون ى ل قد رُسِم من المركز عمودًا على س د فهو ينصّف س د في النقطة ل والقوس س ا د في ا و د ل = ل س الذي هو جيب القوس ا س . وب ح او ل ك جيب القوس ا ب فالخط د ك مجتمع جيبَي القوسين المفروضين وس ك فضلتهما ود ا ب مجتمع القوسين وب س فضلتهما . وفي المثلث د ف س لكون ف ك عمودًا على د س تكون نسبة د ك : ك س :: م د ف ك . م س ف ك (فرع ثالث ق ا) ولكن مماسّ د ف ك = م $\frac{١}{٢}$ قوس ب د لان د ف ك نصف د ى ب (ق ٢٠ ك ٣)

فقياسها نصف ب د. ولهذا السبب ايضًا م س ف ك = م ½ ب س. فنسبة د ك : ك س :: م ½ ب د : م ½ ب س. ولكن د ك مجتمع جيبي القوسين اب وا س وك س فضلتها. وب د مجتمع القوسين اب وا س وب س فضلتها. فنسبة جا اس + جا اب : جا اس − جا اب :: م ½ (اس + اب) : م ½ (اس − اب)

فرعٌ اول. لكون ى ل نظير جيب اس وى ح نظير جيب اب يكون ف ك مجتمعها وك ب فضلتها. لانّ ف ك = ½ ف ب + ى ل = ى ح + ى ل وك ب = ل ح = ى ح − ى ل ونسبة ف ك : ك ب :: م ف د ك : م ب د ك ومماس د ف ك = تم ف د ك لانّ د ف ك كمال ف د ك فتكون نسبة ف ك : ك ب :: تم د ف ك : م ب د ك او ف ك : ك ب :: تم ½ القوس د ب : م ½ القوس ب س. اي نسبة مجتمع نظير الجيبين لقوسين الى فضلة نظير الجيبين كنسبة نظير المماس لنصف مجتمع القوسين الى مماس نصف فضلتها

فرعٌ ثانٍ. في المثلث القائم الزاوية ف ك د نسبة ف ك : ك د :: ق/٢ : م د ف ك ولكن ف ك = نجا اب + نجا اس وك د = جا اب + جا اس وم د ف ك = م ½ (اب + اس) فنسبة نجا اب + نجا اس : جا اب + جا اس :: ق/٢ : م ½ (اب + اس)

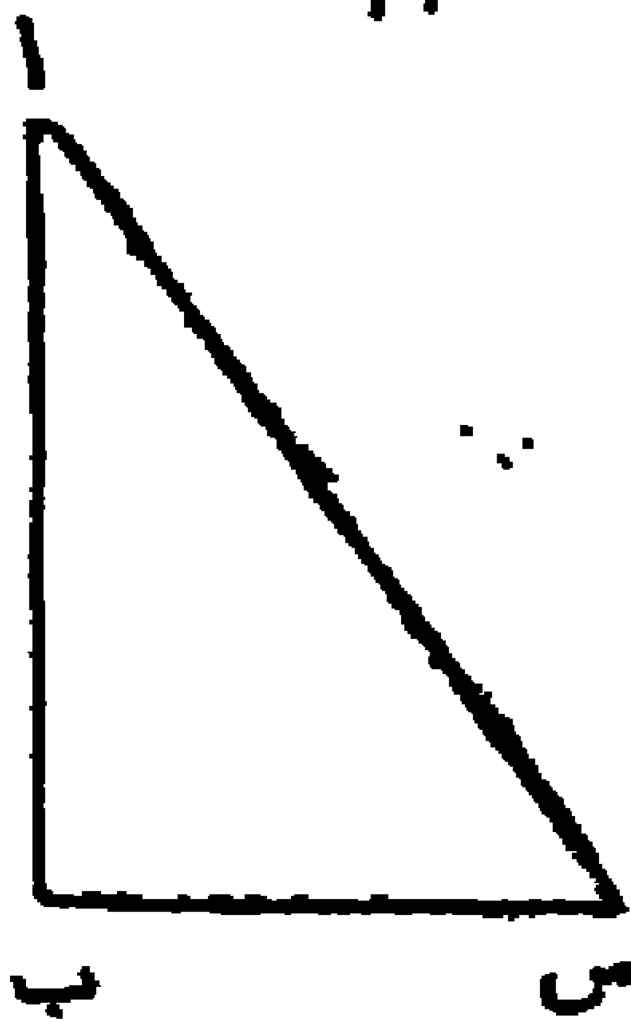
وهكذا بواسطة المثلث ف ك س يبرهن ان نجا اب + نجا اس : جا اس − جا اب :: ق/٢ : م ½ (اب − اس)

فرعٌ ثالث. اذا كان مجتمع القوسين اب وا س ٩٠° فمماس نصف فضلتها اي مماس ٤٥° يماثل نصف القطر. والقوس ب س لكونه فضلة د س ود ب او فضلة د ب و٩٠° فنصف القوس ب س يماثل فضلة نصف د س ونصف د ب او فضلة اس و٤٥°. فاذا كان مجتمع قوسين ٩٠° تكون نسبة مجتمع جيبَي القوسين الى فضلتها كنسبة نصف القطر الى مماس فضلة احدها و٤٥°

القضية الرابعة . ن

نسبة مجتمع ضلعَي مثلث الى فضلتهما كماسّ نصف مجتمع الزاويتين المقابلتين للضلعَين الى ماس نصف فضلتهما

ليكن اب س مثلثًا بسيطًا فنسبة س ا+اب : س ا−اب :: م $\frac{1}{2}$(ب+س) : م $\frac{1}{2}$(ب−س)



لانّ (ق ٢) س ا : اب :: جـ ب : جـ س ولذلك (ق ٥ ك ٥) س ا+اب : س ا−اب :: جـ ب +جـ س : جـ ب−جـ س . وحسب القضية السابقة جـ ب+جـ س : جـ ب−جـ س :: م $\frac{1}{2}$(ب + س) : م $\frac{1}{2}$(ب − س) فاذًا (ق ١١ ك ٥) س ا+اب : س ا−اب :: م $\frac{1}{2}$(ب +س) : م $\frac{1}{2}$(ب−س)

القضية الخامسة . ن

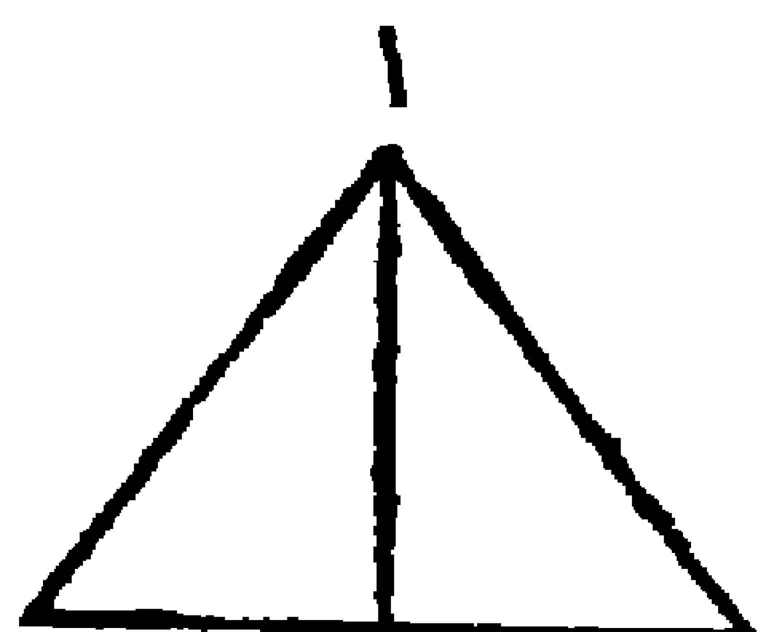
اذا رُسِم عمودٌ من زاوية مثلث على القاعدة فنسبة مجتمع قسمي القاعدة الى مجتمع الضلعين الاخرين كنسبة فضلة الضلعين الى فضلة قسمي القاعدة

لانهُ حسب (ق ى ك ٦) القائم الزوايا مسطح مجتمع القسمين في فضلتهما يعدل القائم الزوايا مسطحَ مجتمع الضلعين في فضلتهما فحسب (ق ١٦ ك ٦) نسبة مجتمع القسمين الى مجتمع الضلعين كنسبة فضلة الضلعين الى فضلة القسمين

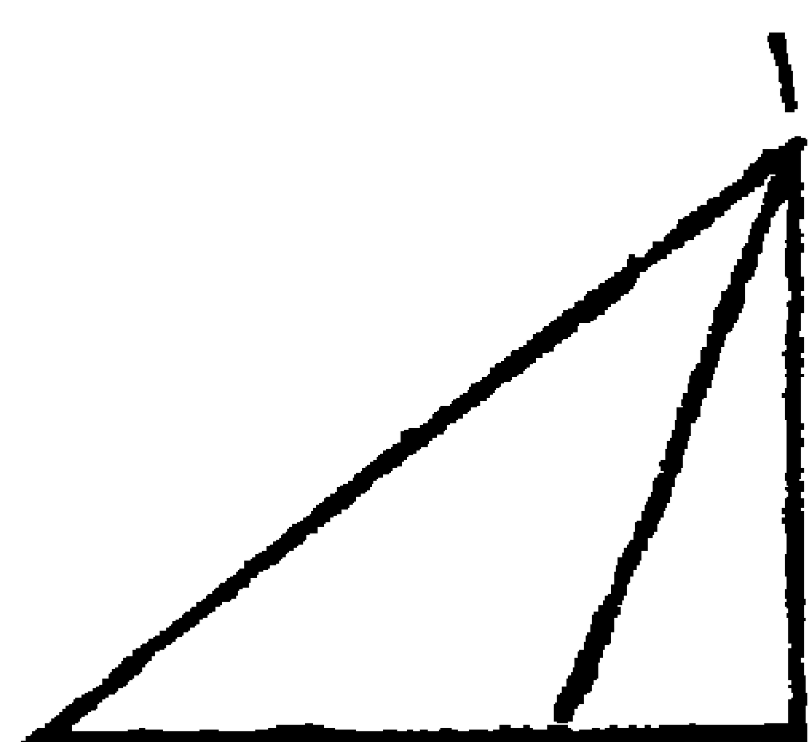
القضية السادسة . ن

في كل مثلث نسبة مضاعف القائم الزوايا مسطحِ ضلعين من اضلاعهِ الى فضلة مجتمع مربعَيهما ومربَّع القاعدة كنسبة نصف القطر الى نظير جيب الزاوية الواقعة بين الضلعين

ليكن ا ب س مثلثًا فنسبة القائم الزوايا ٢ ا ب × ب س : (ا ب^2 + ب س^2) − ا س^2 :: ق/٢ : نجب ب



من ا ارسم ا د عمودًا على ب س . ففضلة المربَّعين على ا ب وب س والمربع على ا س يعدل ٢ ب س × ب د (ق ١٢ و ١٣ ك ٢) ولكن ب س × ب ا : ب س × ب د :: ب ا : ب د :: ق/٢ : نجب ب . فاذًا ٢ ب س × ب ا : ٢ ب س × ب د :: ق/٢ : نجب ب و ٢ ب س × ب د هو فضلة ا ب^2 + ب س^2 وا س^2 فاذًا ٢ ا ب × ب س : (ا ب^2 + ب س^2) − ا س^2 :: ق/٢ : نجب ب



فرعٌ . اذا فُرِض ق/٢ = ١ فلنا ب د = ب ا × نجب ب (ق ا) و ٢ ب س × ب ا × نجب ب = ٢ ب س × ب د فاذا كانت ب حادَّة لنا ٢ ب س × ب ا × نجب ب = ب س^2 + ب ا^2 − ا س^2 واذا اضيف ا س^2 الى الجانبين تصير ا س^2 + ٢ نجب ب × ب س × ب ا = ب س^2 + ب ا^2 وبطرح ٢ نجب ب × ب س × ب ا من الجانبَين تصير ا س^2 = ب س^2 − ٢ نجب ب × ب س × ب ا + ب ا^2 فاذًا ا س = √(ب س^2 − ٢ نجب ب × ب س × ب ا + ب ا^2)

واذا كانت ب منفرجة يبرهن على هذا الاسلوب ان ا س = √(ب س^2 + ٢ نجب ب × ب س × ب ا + ب ا^2)



القضية السابعة . ن

نسبة اربعة امثال القائم الزوايا مسطَّح ضلعَي مثلثٍ الى القائم الزوايا مسطَّح الضلع الاخر مع فضلة الضلعين في ذلك الضلع الاَّ فضلة الضلعين كنسبة مربَّع نصف القطر الى مربَّع جيب نصف الزاوية الواقعة بين الضلعين

ليكن ا ب س مثلثًا قاعدته ب س وا ب اطول ضلعَيهِ فنسبة ٤ ا ب×ا س :
(ب س+(ا ب — ا س)) ×
(ب س — (ا ب — ا س)) ::
$|\frac{ق}{٢}|^{٢}$: (جـ $\frac{١}{٢}$ ب ا س)^{٢}

اخرج ا س الى د حتى ان ا د=ا ب . ارسم ب د وارسم ا ى وس ق عمودين على ب د . واجعل س مركزًا وس د نصف قطرٍ وارسم نصف الدائرة غ د ح الذي يقطع ب د في ك وب س في غ ويلاقي ب س بعد اخراجهِ في ح

الامر واضح ان س د هو فضلة الضلعَين وب ح هو القاعدة مع فضلة الضلعَين وب غ القاعدة الاَّ فضلة الضلعَين . ولكون المثلث ب ا د متساوي الساقين يكون د ى نصف ب د ود ق نصف د ك ود ى — د ق = نصف ب د — د ك (ق ٦ ك ٥) او ى ق = $\frac{١}{٢}$ ب ك . ولكون ا ى يوازي س ق تكون نسبة ا س : ا د :: ى ق : ى د (ق ٢ ك ٦) والاشكال القائمة الزوايا اذا كانت على علوٍ واحد هي كنسبة قواعدها بعضها الى بعض فنسبة ا س × ا د : ا د^{٢} :: ى ق × ى د : ى د^{٢} (ق ١ ك ٦) و٤ ا س × ا د : ا د^{٢} :: ٤ ى ق × ى د : ى د^{٢} وبالمبادلة ٤ ا س × ا د : ٤ ى ق × ى د :: ا د^{٢} : ى د^{٢}

ولكون ٤ ى ق = ٢ ب ك و٤ ى ق × ى د = ٢ ب ك × ى د = ٢ ى د × ب ك = د ب × ب ك = ح ب × ب غ فنسبة ٤ ا س × ا د : د ب × ب ك :: ا د^{٢} : ى د^{٢} . ولكن ا د : ى د :: $\frac{ق}{٢}$: جـ ى ا س = جـ $\frac{١}{٢}$ ب ا س (ق ١) وا د^{٢} : ى د^{٢} :: $|\frac{ق}{٢}|^{٢}$: (جـ $\frac{١}{٢}$ ب ا س)^{٢} فاذًا (ق ١١ ك ٥) ٤ ا س × ا د : ح ب × ب غ :: $|\frac{ق}{٢}|^{٢}$: (جـ $\frac{١}{٢}$ ب ا س)^{٢} او (لانَّ ا ب = ا د) ٤ ا س × ا ب : ح ب × ب غ :: $|\frac{ق}{٢}|^{٢}$: (جـ $\frac{١}{٢}$ ب ا س) و٤ ا س × ا ب هو اربعة امثال القائم الزوايا مسطَّح ضلعَي المثلث وح ب × ب غ هو القائم الزوايا ب س + (ا ب — ا س) × ب س — (ا ب — ا س)

فرع . اذًا $\sqrt{٤ ا س × ا د : ح ب × ب غ}$ :: $\frac{ق}{٢}$: جـ $\frac{١}{٢}$ ب ا س

القضية الثامنة ن

نسبة اربعة امثال القائم الزوايا مسطّح ضلعي مثلث الى القائم الزوايا مسطّح مجتمع الضلعين مع القاعدة في مجتمع الضلعين الّا القاعدة كنسبة مربع نصف القطر الى مربع نظير جيب نصف الزاوية الواقعة بين الضلعين

ليكن ا ب س مثلثًا قاعدتهُ ب س و ا ب اطول الضلعين الآخرين فنسبة ٤ ا ب × ا س : (ا ب + ا س + ب س) × (ا ب + ا س − ب س) :: $\left[\frac{ق}{٢}\right]^{٢}$: (نجب $\frac{١}{٢}$ ب ا س)^{٢}

اجعل س مركزًا و س ب نصف قطرٍ وارسم الدائرة ب ل م محيطها يلاقي س ا بعد اخراجهِ في ل و م. اخرج ا ل الى ن حتى انّ ا ن = ا ب واجعل ا د = ا ب ثم ارسم ا ى عمودًا على ب د. ارسم ب ن وليلاقِ المحيط ايضًا في ف وليكن س و عمودًا على ب ن وليلاقِ ا ى في ق

الامر واضح ان م ن = ا ب + ا س + ب س و ل ن = ا ب + ا س − ب س. ولانّ ب د قد تنصّف في ى و د ن قد تنصف في ا فالخطّ ب ن يوازي ا ى فهو عمود على ب د والمثلثان د ا ى د ن ب متساويا الزوايا و د ن = ٢ ا د و ب ن = ٢ ا ى و ب ف = ٢ ب و = ٢ ق ى و ف ن = ٢ ا ق

ولكون ا ق س ا ى د متساويي الزوايا تكون نسبة ا س : ا د :: ا ق : ا ى والاشكال القائمة الزوايا بعضها الى بعض اذا كانت على علو واحد هي كقواعدها بعضها الى بعض (ق ا ك ٦) فنسبة ا س × ا د : ا د^{٢} :: ا ق × ا ى : ا ى^{٢}

وبالمبادلة اس × اد : اق × اى :: اد^{2} : اى^{2} و٤ اس × اد : ٤ اق × اى :: اد^{2} : اى^{2}. ولكن ٤ اق × اى = ٢ اق × ٢ اى = ن ف × ن ب = م ن × ن ل فاذًا ٤ اس × اد : م ن × ن ل :: اد^{2} : اى^{2} ولكن اد : اى :: ق/٢ : نجـ د اى = نجـ ١/٢ ب اس (ق ١). فاذًا ٤ اس × اد : م ن × ن ل :: ق/٢ : (نجـ ١/٢ ب اس)^{2} و٤ اس × اد هو اربعة امثال القائم الزوايا مسطح اس × اب (لانّ اد = اب) وم ن × ن ل هو القائم الزوايا مسطح الضلعين مع القاعدة في الضلعين الاَّ القاعدة

فرعٌ اول. اذًا ٢ √(اس × اب) : √(م ن × ن ل) :: ق/٢ : جـ ١/٢ ب اس

فرعٌ ثانٍ. حسب القضية السابعة ٤ اس × اب : (ب س + (اب − اس)) × (ب س − (اب − اس)) :: ق/٢ : (جـ ١/٢ ب اس)^{2} وقد تبرهن في هذه القضية ان ٤ اس × اب : (اب + اس + ب س) × (اب + اس − ب س) :: ق/٢ : (نجـ ١/٢ ب اس)^{2} فبالمساواة (اب + اس + ب س) × (اب + اس − ب س) : (ب س + (اب − اس)) × (ب س − (اب − اس)) :: (نجـ ١/٢ ب اس)^{2} : (جـ ١/٢ ب اس)^{2} ولكن نسبة نظير جيب قوس الى جيب القوس كنسبة نصف القطر الى مماس ذلك القوس فاذًا (اب + اس + ب س) × (اب + اس − ب س) : (ب س + (اب − اس)) × (ب س − (اب − اس)) :: ق/٢ : (مم ١/٢ ب اس)^{2} و √((اب + اس + ب س) × (اب + اس − ب س)) : √((ب س + (اب − اس)) × (ب س − (اب − اس))) :: ق/٢ : مم ١/٢ ب اس

سابقة ثانية

اذا فرض مقداران غير متساويَين فنصف مجتمعهما مع نصفِ فضلتهما يعدل اكبرهما ونصف مجتمعهما الاَّ نصف فضلتهما يعدل اصغرهما

ليكن اب وب س مقدارين وليكن اب اكبرهما. نَصِّفْ اس في د واجعل اى يعدل ب س. فالامر واضح ان اس

ا س ب د ى

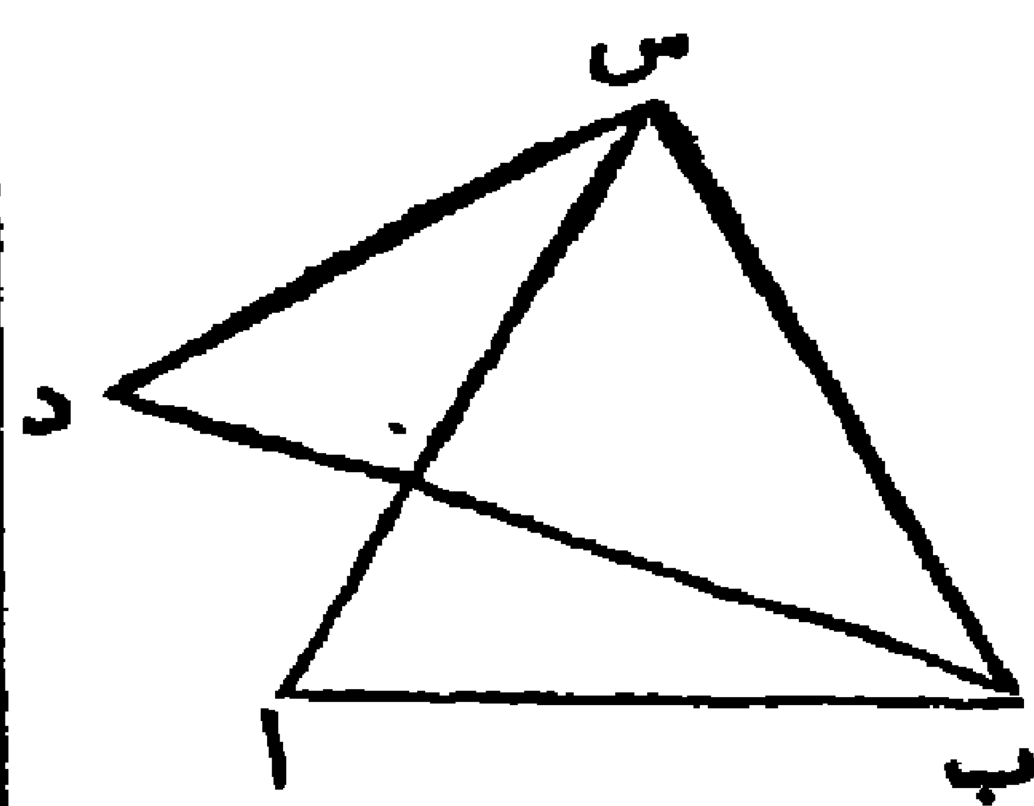
هو مجتمع المقدارين وى ب فضلتهما . ولكون ا س قد تنصَّف في د ا د = د س وا ى = ب س فاذًا د ى = د ب و د ى او د ب نصف فضلة المقدارين . ولكن ا ب = ب د و د ا اي نصف المجتمع مع نصف الفضلة و ب س = نصف المجتمع د س الّا نصف الفضلة ب د

فرعٌ . اذا فُرِض مجتمع مقدارين وفضلتهما يمكن استعلام المقدارين لان نصف المجتمع مع نصف الفضلة هو الاكبر ونصف المجتمع الّا نصف الفضلة هو الاصغر (انظر الجبر والمقابلة وجه ١٢٤)

القضية التاسعة . ن

اذا كانت نسبة اطول ضلعَي مثلث الى اقصرهما كنصف القطر الى مماس زاويةٍ ما تكون نسبة نصف القطر الى مماس فضلة تلك الزاوية ونصف قائمة كمماس نصف مجتمع الزاويتين عند قاعدة المثلث الى مماس نصف فضلتهما

ليكن ا ب س مثلثًا و ب س و س ا ضلعين من اضلاعهِ و ا ب قاعدتهُ وليكن ب س اطول من س ا . ارسم س د عمودًا على ب س وليعدل س ا . ارسم د ب . فالمثلث ب س د قائم الزاوية ونسبة ب س : س د :: $\frac{ق}{٢}$: م س ب د (ق ١) فالزاوية س ب د هي الزاوية التي تكون نسبة مماسّها الى نصف القطر كالضلع س د او س ا الى ب س او كنسبة اقصر الضلعين الى اطولهما



ولكن ب س + س د : ب س − س د :: م $\frac{١}{٢}$ (س د ب + س ب د) : م $\frac{١}{٢}$ (س د ب − س ب د) (ق ٥) وايضًا ب س + س ا : ب س − س ا :: م $\frac{١}{٢}$ (س ا ب + س ب ا) : م $\frac{١}{٢}$ (س ا ب − س ب ا) فبالمساواة (لانَّ س د = س ا) م $\frac{١}{٢}$ (س د ب + س ب د) : م $\frac{١}{٢}$ (س د ب − س ب د) :: م $\frac{١}{٢}$ (س ا ب + س ب ا) : م $\frac{١}{٢}$ (س ا ب − س ب ا) ولكن الزاويتان س د ب + س ب د = ٩٠° فنسبة م $\frac{١}{٢}$

(س د ب + س ب د) : م ١/٢ (س د ب — س ب د) :: ق/٢ : م (٤٥° — س ب د)

(ق٣ فرع ٢)

فنسبة ق/٢ : م (٤٥° — س ب د) :: م ١/٢ (س ا ب + س ب ا) : م ١/٢ (س ا ب — س ب ا) وقد تبرهن ان ب س : س ا :: ق/٢ : م س ب د

فرعٌ. اذا فُرِض ب س وس ا والزاوية عند س فلكي تجد الزاويتين عند ا وب استعلم زاوية وسمّها ى مثلاً حتى تكون نسبة ب س : س ا :: ١/٢ ق : مماس ى فتكون نسبة ق/٢ : م (٤٥° — ى) :: م ١/٢ (ا + ب) : م ١/٢ (ا — ب) فتجد ا وب حسب السابقة الثانية

القسم الثاني

قواعد حلّ العمليات

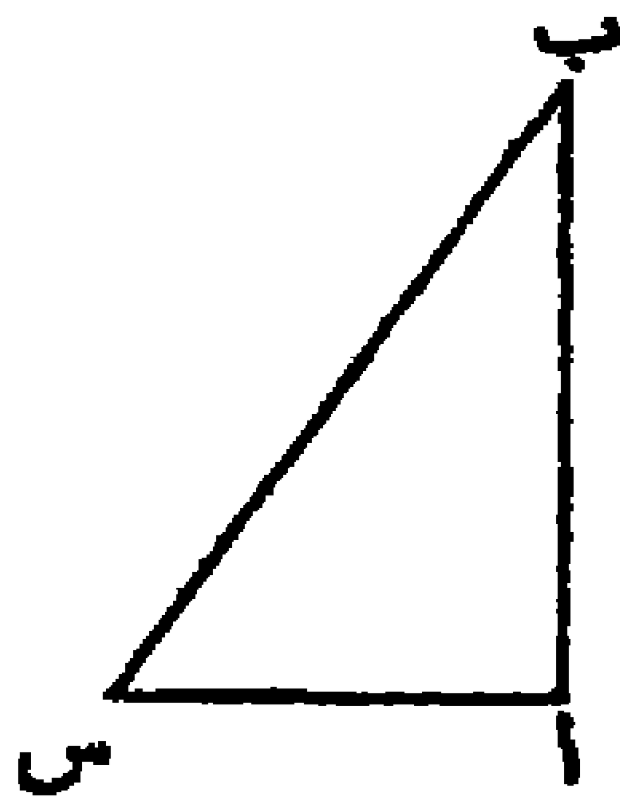
قواعد قياس المثلثات محتوية في عملية واحدة وهي هذه. في مثلث بسيط ذي ستة اشياء اي ثلاثة اضلاع وثلاث زوايا مفروض منها ثلاثة اشياء واحدٌ منها ضلعٌ مطلوب واحد من الثلاثة الأُخَر او كلها

العمليّة الاولى

في مثلث بسيط قائم الزاوية مفروض ثلاثة اشياء واحد منها ضلعٌ مطلوب الثلاثة الاخر

في مثلث قائم الزاوية اذا فرضت احدى الحادّتين تعرف الاخرى لانها كمال الاولى وجيب احدى الحادّتين هو نظير جيب الاخرى وقد جمعت قواعد الحل حسب اختلاف الاشياء المفروضة في هذا الجدول. فالعمود الاول منهُ يدلّ على المفروض والثاني على المطلوب والثالث على النسبة التي بها تُحَلّ العملية

المفروض	المطلوب	الحل	
س ب و ب	ا س	ق/٢ : جـ ب :: س ب : ا س	١
اي الوتر وزاوية	ا ب	ق/٢ : تجـ ب :: س ب : ا ب	٢
ا س و س	ب س	تجـ س : ق/٢ :: ا س : ب س	٣
اي ضلع واحدى الحادّتين	ا ب	ق/٢ : ظ س :: ا س : ا ب	٤
س ب و ب ا	س	س ب : ب ا :: ق/٢ : جـ س	٥
اي الوتر وضلع	ا س	ق/٢ : تجـ س :: س ب : ا س	٦
ا س و ا ب	س	ا س : ا ب :: ق/٢ : ظ س	٧
اي الضلعان	س ب	تجـ س : ق/٢ :: ا س : س ب	٨



تنبيهات. اذا فُرِض ا س و س نجد الوتر ب س بواسطة القاطع ايضًا لانَّ س ا : س ب :: ق/٢ : قاطع س فلنا ق/٢ : قاطع س :: ا س : س ب

واذا فرض ب س و ا ب نجد ا س كما في الجدول او بواسطة (ق ٤٧ ك ١) لانَّ ا س٢ = ب س٢ ـ ب ا٢ و ا س = √(ب س٢ ـ ب ا٢) وايضًا حسب (ق ٥ ك ٢ فرع) ب س٢ ـ ب ا٢ = (ب س + ب ا) × (ب س ـ ب ا) فاذًا ا س = √((ب س + ب ا) × (ب س ـ ب ا)) وهذه الاخيرة اسهل اذا قُصِد حل العمليَّة بالانساب

اذا فُرِض ا س و ا ب يوجد ب س حسب (ق٤٧ ك١) لانَّ ب س = $\sqrt{}$ ا ب٢ + ا س٢ واذا قُصِد حل العملية بالانساب فالاسهل ان يطلب اولاً مماس س هكذا ا س : ا ب :: ق/٢ : مم س ثم نجس : ق/٢ :: ا س : س ب

العملية الثانية

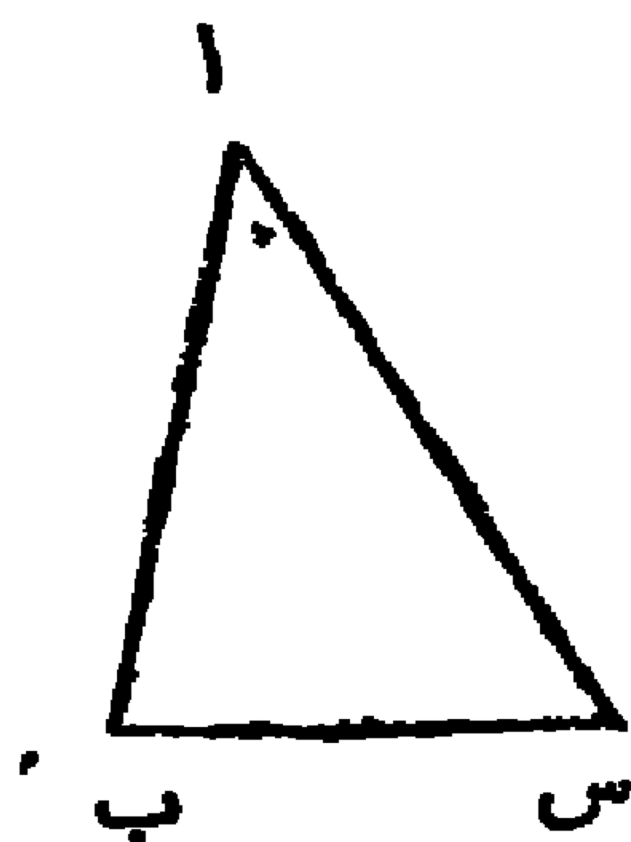
في مثلث حادّ الزوايا مفروض ثلاثة اشياء واحدٌ منها ضلعٌ مطلوب الثلاثة الأُخَر

لهذه العملية ثلاث حالات

الحالة الاولى

مفروض زاويتان ا و ب والضلع ا ب. مطلوب الضلعان الاخران

من ا و ب نستعلم س لانها متمّ ١ + ب ولنا (ق٢) جـ س : جـ ا :: ا ب : ب س وجـ س : جـ ب :: ا ب : ا س



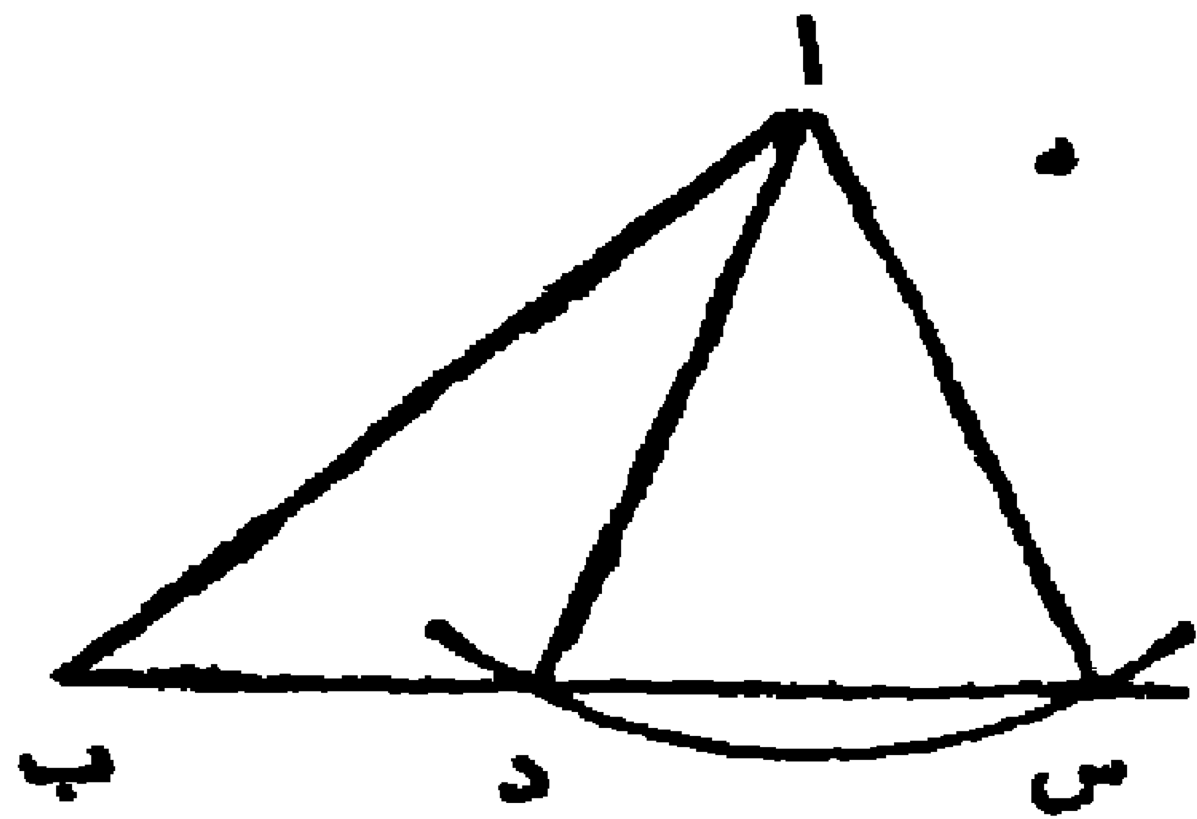
الحالة الثانية

مفروض الضلعان ا ب و ا س والزاوية ب التي تقابل احدها. مطلوب ا و س والضلع الاخر ب س

لكي نستعلم س لنا ا س : ا ب :: جـ ب : جـ س وايضاً ا = ١٨٠° − ب − س ثم جـ ب : جـ ا :: ا س : س ب حسب الحالة الاولى

في هذه الحالة حيث يستعلم جيب س فالجيب المذكور في الجداول قد يكون للحادّة او للمنفرجة متمّ الحادة فتكون س حادة او منفرجة لانهُ اذا كان ا س اقصر

من ا ب يوجد مثلثان لهما الضلعان ا ب ا س والزاوية عند ب متساوية ويكونان غير متساويين لان الزاوية التي تقابل ا ب في الواحد هي متم التي تقابلهُ في الاخر كما يتضح من هذا الشكل



اجعل ا مركزًا وا س نصف قطر وارسم قوسًا يقطع ب س في د وارسم ا د. فالامر واضح ان المثلثين ا ب س ا ب د لهما الزاوية عند ب والضلع ا ب مشتركان بينهما والضلعان ا س ا د متساويان

ولكن ب د لا يعدل ب س والزاوية ب س ا لا تعدل ب د ا وب ا د لا تعدل ب ا س لانّ ا س ب ا د ب كل واحدة منهما متم الاخرى لانّ ا د س متساوي الساقين وا س د = ا د س وبالقاعدة المذكورة سابقًا توجد ا س ب او ا د ب

ومن هاتين توجد ب ا س وب ا د لانّ ب ا س متم ا ب س + ا س ب (ق ٣٢ ك ١) فجيبها هو جيب ا ب س + ا س ب. ولكن ب ا د هي فضلة ا س ب وا ب س لانها فضلة ا د س وا ب س لانّ ا د س او ا س د = ا ب س + ب ا د (ق ٣٢ ك ١) فلكي يستعلم ب س بعد استعلام س لنا جـ س : جـ (س + ب) :: ا ب : ب س وايضًا جـ س : جـ (س − ب) :: ا ب : ب د

فاذا كان ا ب اطول من ا س تكون القضية ملتبسة والّا فغير ملتبسة

الحالة الثالثة

مفروض ضلعان ا ب وا س والزاوية بينهما ا مطلوب الاخريان ب وس والضلع الاخر ب س

اولًا ا ب + ا س : ا ب − ا س :: م ½ (س + ب) : م ½ (س − ب)

وب = ½ (س + ب) + ½ (س − ب) وس = ½ (س + ب) − ½ (س − ب)

حسب السابقة الثانية

ولكي نجد ب س بعد استعلام ب لنا جـ ب : جـ ا :: ا س : ب س

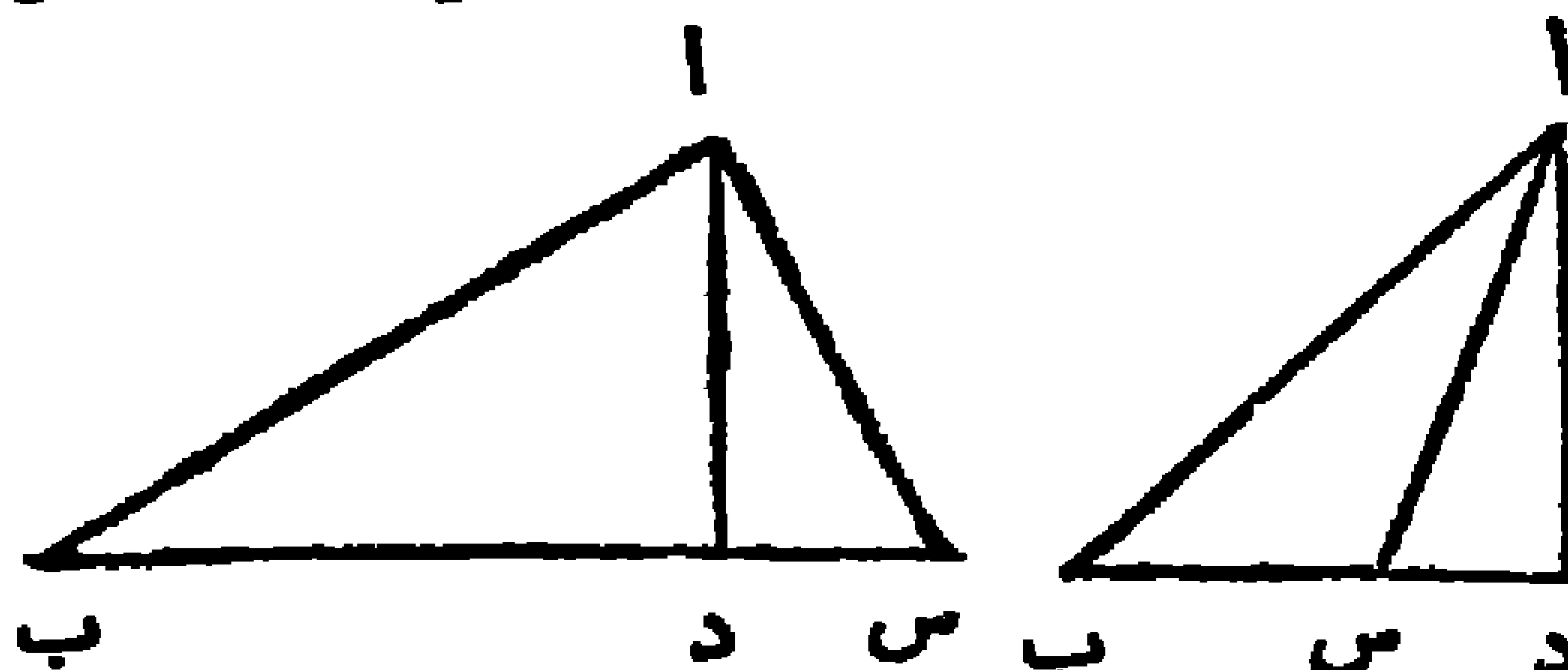
ويستعلم ب س ايضا بدون استعلام ب وس هكذا حسب (ق ٦) ب س = $\sqrt{\text{ا ب}^2 - 2\ \text{تجا ا} \times \text{ا ب} \times \text{ا س} + \text{ا س}^2}$

الحالة الرابعة

مفروض الاضلاع الثلثة ا ب ب س ا س مطلوب الزوايا الثلاث

حل اوّل

استعلم كمية ما وسمِّها ف حتى تكون نسبة ب س : ب ا + ا س :: ب ا − ا س : ف فتكون ف مجتمع قسمي القاعدة ب د د س او فضلتهما (ق ٥) فان كانت ف اكبر من



ب س فهي مجتمع ب د ود س وب س فضلتهما وان كانت ف اصغر من ب س فيكون ب س مجتمع القسمين وف فضلتهما وعلى كلتا الحالتين يُعلَم مجتمع بَ د ود س وفضلتهما فيُعلَم ب د ود س (سابقة ثانية)

ثمّ (ق ١) س ا : س د :: ق/٢ : تجِ س وب ا : ب د :: ق/٢ : جِ ب فتعلم س وب ومنهما تستعلم ا

حلّ ثانٍ

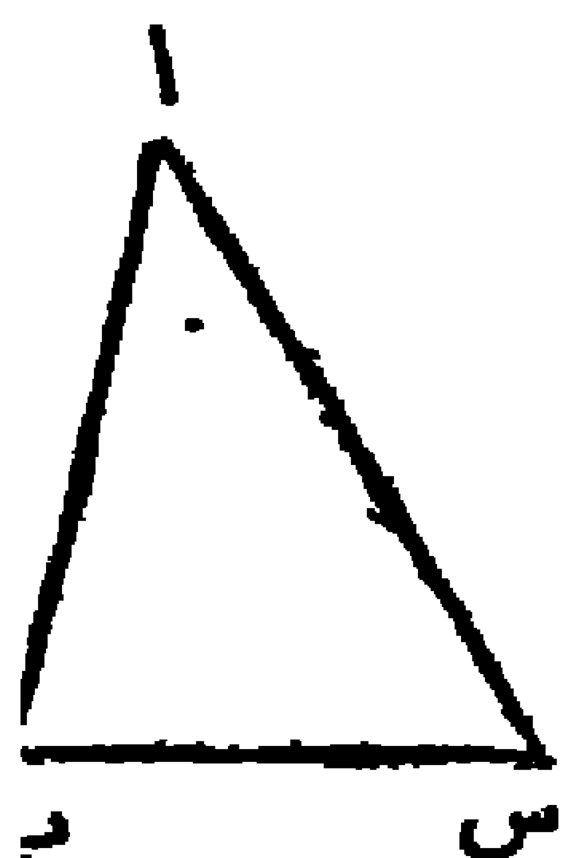
ليكن د فضلة ا ب وا س ثمّ (ق ٧ فرع) √(ا ب × ا س) : √((ب س + د) × (ب س − د)) :: ق/٢ : جِ ١/٢ ب ا س

حلّ ثالث

ليكن ص مجتمع الضلعَين ب ا وا س ثمّ (ق ٨ فرع ١) √(ا ب × ا س) : √((ص + ب س) × (ص − ب س)) :: ق/٢ : تجِ ١/٢ ب ا س

حلّ رابع

ليكن د وص كما تقدم ثمّ (ق ٨ فرع ٢) √((ص + ب س) × (ص − ب س)) : √((ب س + د) × (ب س − د)) :: ق/٢ : مم ١/٢ ب ا س

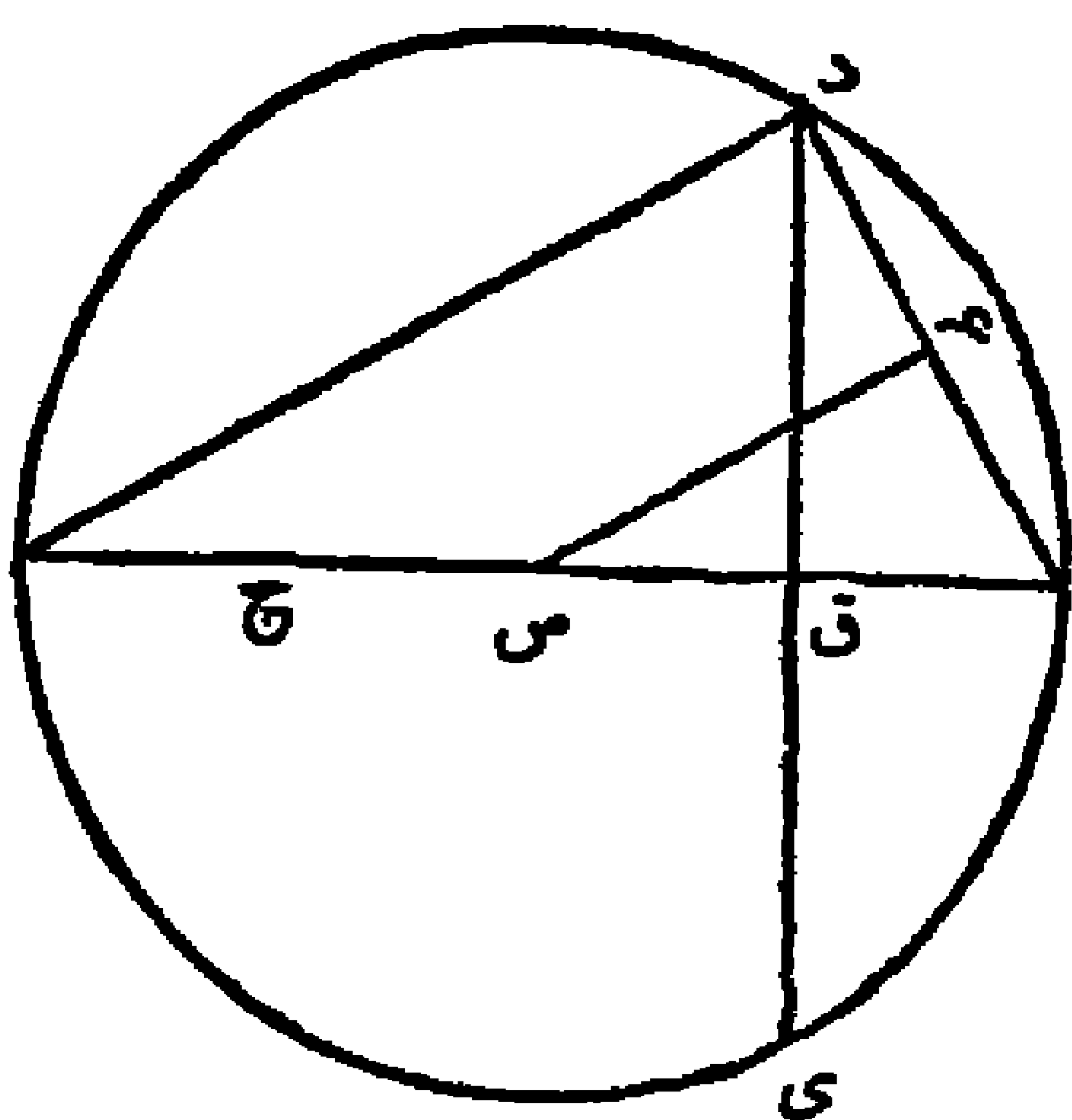


حاشية . من هذه الطرق الاربعة الاول اسهل للحفظ والأخَر اسرع للعمل والثاني اسهل من الثالث متى كانت الزاوية المطلوبة اصغر من قائمة والاَّ فالثالث اسهل وتظهر الفائدة متى كانت الزاوية المطلوبة صغيرة جدًّا او كبيرة جدًّا اي قريبة الى صفرٍ او الى ٩٠° وذلك لقلة الفرق بين جيب الاولى ونظير جيب الثانية

القسم الثالث

في اصطناع الجداول

في حلّ العمليات بواسطة القواعد السابقة لا بُدَّ من استعمال جداول متضمنة الجيوب والماسات الخ لكل زاوية من ١َ الى ٩٠° فيقتضي اوَّلاً استعلام الجيب لدقيقة واحدة اي لاصغر قوس في الجداول



١ ليكن ا د ب دائرة مركزها س ود ب قوسًا منها ود ب ى مضاعف ذلك القوس . فاذا رُسِم الوتران د ى د ب والعمودان عليها من س اي س غ س ق فقد تبرهن (ق ٨ ك ١ مضافات) ان س غ متناسب متوسط بين ربع القطر اح وا ق . وس ق هو نظير جيب القوس ب د وس غ نظير جيب نصف ب د فنظير جيب نصف قوسٍ ما من دائرة نصف قطرها واحد هو متناسب متوسط بين ١/٢ و١+نجب د . فاذا فرض ا = قوسًا ما فنظير جيب ١/٢ ا هو متناسب متوسط بين ١/٢ و١+ نجا ا و(نجا ١/٢ ا)٢ = ١/٢(١+نجا ا) ونجا ١/٢ ا = √(١/٢ (١+نجا ا))

٢ الامر واضح مما تقدم انهُ اذا فرض نظير جيب قوس يمكن استعلام نظير جيب نصف تلك القوس . لنفرض القوس ب د = ٦٠° فالوتر ب د = ق/٢ فالعمود

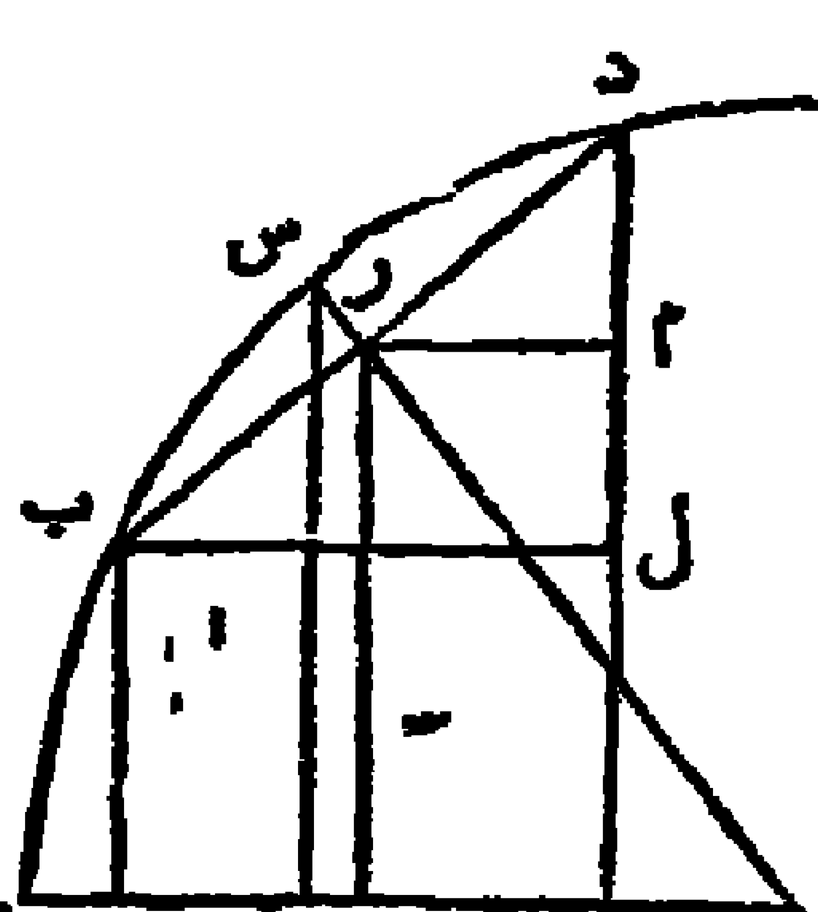
س ق = ½ (ق ٩ ك ا مضافات) فلنا حسبما تقدم نجـ ½ ب د او نجـ ٣٠° = ½ (١+½) = ¾ = ٣/٤ وعلى هذا الاسلوب نجـ ١٥° = ½ (١+نجـ ٣٠°) ونجـ ٧°٣٠' = ½ (١+نجـ ١٥°) الى اخره وعلى هذا الاسلوب نجد نظير جيب ٣° ٤٥' و١° ٥٢' ٣٠" حتى يتنصف القوس ١٢ مرة فيكون لنا جيب ٥٢" ٤٤"' ٣"" ٤٥""' ومن نظير جيب قوس يستعلم الجيب لانهُ اذا طرح مربع نظير الجيب من مربع نصف القطر اي من واحد يبقى مربع الجيب وبالتجذير يعرف الجيب فيُعرَف جيب ٥٢" ٤٤"' ٣"" ٤٥""'

٣ ثم ان نسبة جيوب الاقواس الصغيرة جدًّا بعضها الى بعض هي كنسبة الاقواس بعضها الى بعض تقريبًا لانهُ كلما تعددت اضلاع شكل في دائرة قل الفرق بين الضلع والقوس الذي يقابلهُ ومتى كان القوس صغيرًا جدًّا يكون الفرق بينهُ وبين جيبهِ قليلاً جدًّا اي نسبة جيب قوس صغير جدًّا الى القوس نسبة متساوية اي نسبة قوس الى قوس كجيب الاول الى جيب الثاني. فمن جيب ٥٢" ٥٤"' ٣"" ٤٥""' يستعلم جيب ١' = ٠٫٠٠٠٢٩٠٨٨٨٢

٤ بعد استعلام جيب ١' يستعلم جيب ٢' ٣' الخ بهذه النظرية

نظرية

ليكن اب اس اد ثلاثة اقواس وليكن ب س فضلة الاول والثاني وليعدل س د فضلة الثاني والثالث فنسبة نصف القطر الى نظير جيب الفضلة المشتركة ب س كجيب القوس اس الى نصف مجتمع جيبَي اب واد



ارسم س ى الى المركز. ليكن ب ف س ع د ح عموديات على ا ى فهي جيوب الاقواس اب اس اد. ارسم ب د وليلاقِ س ى في ر. ارسم رك عمودًا على ا ى وب ل ر م عمودين على د ح. فلكون القوس ب د قد تنصَّف في س يكون ى س عمودًا على ب د وينصّفهُ في ر وب ر جيب ب س او س د وى ر نظير جيبهِ ولانَّ ب د قد تنصف في ر ور م يوازي ب ل (ق ٢ ك ٦) فقد تنصف

ل د في م. ولكن ب ف = ح ل وب ف + د ح = د ح + ح ل = د ل + ٢ ل ح = ٢ ل م + ٢ ل ح = ٢ م ح او ٢ ك ر اي ر ك = ½ (ب ف + د ح). ولكون المثلثين س غ ى ر ك ى متساويي الزوايا تكون نسبة س ى : ر ى :: س غ : ر ك وقد تبرهن ان ى ر = نجب س ور ك = ½ (ب ف + د ح) فنسبة $\frac{ق}{٢}$: نجب س :: جا س : ½ (جا ب + جا د)

فرع. اذا وقعت النقطة ب على النقطة ا لنا $\frac{ق}{٢}$: نجب س :: جب س : ½ جب د اي نسبة نصف القطر الى نظير جيب قوس كنسبة جيب القوس الى نصف جيب مضاعف القوس فاذا فرض قوس = ا لنا ½ جـ ٢ا = جا × نجا ا او جيب ٢ ا = ٢ جا × نجا ا وجـ ٢' = ٢ جـ ا' × نجا ا' فمن جيب ا' ونظير جيبها يوجد جيب ٢'

ثم $\frac{ق}{٢}$: نجا ا' :: جـ ٢' : ½ (جـ ا' + جـ ٣') او جـ ا' + جـ ٣' = ٢ نجا ا' + جـ ٢' وبطرح جـ ا' من الجانبين تصير جـ ٣' = ٢ نجا ا' × جـ ٢' − جـ ا'

وهكذا جـ ٤' = ٢ نجا ا' × جـ ٣' − جـ ٢'

و جـ ٥' = ٢ نجا ا' × جـ ٤' − جـ ٣'

جـ ٦' = ٢ نجا ا' × جـ ٥' − جـ ٤' الخ

وهكذا لاستعلام جيوب الاقواس التي فضلتها اكثر من ا'. لكن ا ا + ب ا + ٢ ب ثلاثة اقواس فضلتها اكثر من ا' فحسب النظرية السابقة $\frac{ق}{٢}$: نجب :: جـ (ا + ب) : ½ (جا + جـ (ا + ٢ ب)) فاذا كان نصف القطر واحدًا لنا جا + جـ (ا + ٢ ب) = ٢ نجب × جـ (ا + ب) او جـ (ا + ٢ ب) = ٢ نجب × جـ (ا + ب) − جا

وعلى هذا الاسلوب يصطنع جدول جيوب ونظير جيوب لاي قوسٍ فُرِض من صفر الى ٩٠°. وجدول المماسات يصطنع بانقسام جيب قوس على نظير جيبهِ لانّ م ا = $\frac{جا}{نجا}$. وبعد استعلام المماسات الى حدّ ٤٥° تستعلم البقية الى حد ٩٠° بقاعدة اخرى اسهل. لانّ مماس قوس اكبر من ٤٥° يعدل نظير المماس لقوس تحت ٤٥° بمثل ما كان الاول فوق ٤٥° اي مماس ٥٠° = نظير مماس ٤٠° ونصف

القطر متناسب متوسط بين الماس ونظير الماس. فاذا فرضت فضلة قوس ما و٤٥°=د لنا م (٤٥° − د) : ١ :: ١ : م (٤٥° + د) ومم (٤٥° + د) = $\frac{١}{م (٤٥° − د)}$

القُطَّاع نستعلم حسب (حد ٩ فرع ٣) حيث يبرهن انَّ نصف القطر متناسب متوسط بين نظير جيب قوس وقاطعهِ اي قاطع ا = $\frac{١}{نجا ا}$

سهم الجيب يوجد بطرح نظير الجيب من نصف القطر

٥ يستنتج من النظرية السابقة بعض العبارات السهلة الاستعمال في حل العمليات

اولاً. اذا فرض القوس ا س = ا وب س = ب ونصف القطر ى س = ر فحينئذٍ ا د = ا + ب وا ب = ا − ب ولنا مما تقدم برهانهُ

ا : نجب :: جا : ½ جـ (ا + ب) + ½ جـ (ا − ب) اي

جا × نجب = ½ جـ (ا + ب) + ½ (ا − ب)

ثانيًا. لانَّ ب ف رك دح متوازية والخطان ب د ف ح قُطِعا متناسبًا فالخط ف ح الذي هو فضلة ف ى ح ى قد تنصف في ك وكما نبرهن في النظريَّة ك ى هو نصف مجتمع ف ى وح ى اي نظير الجيبين للقوسَين ا ب وا د وبمشابهة المثلثين ى غ س ى ك ر نسبة ى س : ى ر :: غ ى : ى ك. وغ ى هو نظير جيب ا س فاذًا $\frac{ق}{٢}$: نجب س :: نجا س : ½ نجا ا د + ½ نجا ا ب او

ا : نجب :: نجا : ½ نجـ (ا + ب) + ½ نجـ (ا − ب) فاذًا

نجا × نجب = ½ نجـ (ا + ب) + ½ نجـ (ا − ب)

ثالثًا. المثلثان ر د م س ى غ متشابهان. لانَّ ك ر م قائمة وى ر د قائمة فاذا طُرِحَت الزاوية ى ر م فالزاوية د ر م = ى ر ك او ى س غ والزاويتان د م ر س غ ى متساويتان لانهما قائمتان ففي المثلثين ر د م س غ ى الاضلاع التي تلي الزوايا المتساوية هي متناسبة وى س : س غ :: د ر : ر م ور م هو نصف فضلة نظير الجيبَين ف ى ى ح فلنا

$\frac{ق}{٢}$: جا س :: جب س : ½ نجا ا ب − ½ نجا ا د او

ا : جـا :: جـب · ½ نجـ(ا−ب) − ½ نجـ(ا+ب) وايضاً

جـا×جـب = ½ نجـ(ا−ب) − ½ نجـ(ا+ب)

رابعاً. في المثلثين ى س غ درم نسبة ى س : ى غ :: رد : دم ودم هو نصف فضلة الجيبين دح وب ى فاذاً

ق/٢ : نجا س :: جـب س : ½ جا د − ½ جا ب او

ا : نجا :: جـب : ½ جـ(ا+ب) − ½ جـ(ا−ب) فاذاً

نجا×جـب = ½ جـ(ا+ب − ½ جـ(ا−ب)

خامساً. اذا كان ا وب قوسين وكان نصف القطر واحداً فلنا

(١) جـا×نجـب = ½ جـ(ا+ب) + ½ جـ(ا−ب)

(٢) نجا×نجـب = ½ نجـ(ا−ب) + ½ نجـ(ا+ب)

(٣) جـا×جـب = ½ نجـ(ا−ب) − ½ نجـ(ا+ب)

(٤) نجا×جـب = ½ جـ(ا+ب) − ½ جـ(ا−ب)

ومن هذه الاربع يُستنتج اربع أُخَر

بجمع الاولى والرابعة جـا×نجـب + نجا×جـب = جـ(ا+ب)

بطرح الرابعة من الاولى جـا×نجـب − نجا×جـب = جـ(ا−ب)

بجمع الثانية والثالثة نجا×نجـب + جـا×جـب = نجـ(ا−ب)

بطرح الثالثة من الثانية نجا×نجـب − جـا×جـب = نجـ(ا+ب)

سادساً. اذا فرض ا+ب=ص وا−ب=د فحسب الاولى من العبارات السابقة وحسب السابقة الثانية ا = (ص+د)/٢ وب = (ص−د)/٢ فجيب (ص+د)/٢ × نجـ (ص−د)/٢ = ½ جـص + ½ جـد. ولكن ص ود دالآن على اي قوسين كانا فيمكن ان يسمَّيا ا وب كما في العبارات السابقة. فلنا

جـ (ا+ب)/٢ × نجـ (ا−ب)/٢ = ½ جـا + ½ جـب

او ٢جـ (ا+ب)/٢ × نجـ (ا−ب)/٢ = جـا + جـب. ومن العبارة الثانية السابقة لنا ٢نجـ (ا+ب)/٢ × نجـ (ا−ب)/٢ = نجـب + نجا ومن الثالثة لنا

$$\text{٢جـ}\frac{\text{ا+ب}}{\text{٢}}\times\text{جـ}\frac{\text{ا−ب}}{\text{٢}}=\text{نجب}-\text{نجا}$$ ومن الرابعة لنا

$$\text{٢نجـ}\frac{\text{ا+ب}}{\text{٢}}\times\text{جـ}\frac{\text{ا−ب}}{\text{٢}}=\text{جا}-\text{جب}$$

وفي هذه العبارات حُسِب القوس ب اقصر من القوس ا سابقًا. وعلى هذا الاسلوب تستخرج عبارات دالة على مماسات اقواس لانّ مماس قوسٍ يعدل الجيب مقسومًا على نظير الجيب

$$\text{م(ا+ب)}=\frac{\text{جـ(ا+ب)}}{\text{نجـ(ا+ب)}}$$ وقد تبرهن انّ

$$\text{جـ(ا+ب)}=\text{جا}\times\text{نجب}+\text{نجا}\times\text{جب}$$ وايضًا ان

$$\text{نجـ(ا+ب)}=\text{نجا}\times\text{نجب}-\text{جا}\times\text{جب}$$ فاذًا

$$\text{م(ا+ب)}=\frac{\text{جا}\times\text{نجب}+\text{نجا}\times\text{جب}}{\text{نجا}\times\text{نجب}-\text{جا}\times\text{جب}}$$. ثم بقسمة الصورة والمخرج على نجا × نجب لنا

$$\text{(م(ا+ب)}=\frac{\text{ما+مب}}{\text{ا+ما}\times\text{مب}}$$

وهكذا $$\text{(م(ا−ب)}=\frac{\text{ما}\times\text{مب}}{\text{ا+ما}\times\text{مب}}$$

(٨) اذا تحولت الثالثة من العبارات السابقة (٦) على هذا المنوال فلنا

$$\frac{\text{جا+جب}}{\text{جا−جب}}=\frac{\text{م}\frac{1}{2}\text{(ا+ب)}}{\text{م}\frac{1}{2}\text{(ا−ب)}}$$ وحسب (ق٣ فرع ١)

$$\frac{\text{نجا+نجب}}{\text{نجا−نجب}}=\frac{\text{تم}\frac{1}{2}\text{(ا+ب)}}{\text{م}\frac{1}{2}\text{(ا−ب)}}$$ وبالفرع الثاني

$$\frac{\text{جا+جب}}{\text{نجا+نجب}}=\frac{\text{م}\frac{1}{2}\text{(ا+ب)}}{\frac{\text{ق}}{\text{٢}}}$$ او لانّ $\frac{\text{ق}}{\text{٢}}=\text{ا}$

$$\frac{\text{جا+جب}}{\text{نجا+نجب}}=\text{م}\frac{1}{2}\text{(ا+ب)}$$

تنبيه. اذا تحولت هذه المعادلات الى نسب فلا بدَّ من اعادة الواحد اي $\frac{\text{ق}}{\text{٢}}$ الذي قد ترك للاختصار لكونهِ واحدًا فلا يعتدُّ بهِ عند الضرب ولكن يعتبر في النسب

اصول قياس المثلثات الكروية

القضية الاولى

اذا قُطِعَتْ كُرَةٌ بسطح مارّ بمركزها فالقطع دائرةٌ مركزها مركز الكرة وهي تعدل الدائرة التي بدورانها رُسِمَت الكرة

لانّ كل الخطوط المستقيمة المرسومة من مركز الكرة الى سطحها تعدل نصف قطر نصف الدائرة المُحدِثة الكرة (حد ٧ ك ٣ مضافات) فموضع تقاطع سطح بسيط وسطح الكرة خطٌ في سطحٍ واحدٍ وكل نقطة منهُ على بعدٍ واحدٍ من مركز الكرة فهو محيط دائرة (حد ١١ ك ١) مركزها مركز الكرة ونصف قطرها نصف قطر الكرة او نصف قطر نصف الدائرة التي بدورانها أُحدِثت الكرة فتعدل الدائرة التي كان نصفُ الدائرة المحدثة نصفها

حدودٌ

١ كل دائرة حادثة من قطع كرة بسطح بسيط مارّ بمركزها تسمّى دائرة عظيمة

فرع. كل الدوائر العظيمة لكرة واحدة متساوية وتنصّف بعضها بعضًا لانّ انصاف اقطارها متساوية كما تقدم برهانهُ وخطُّ تقاطعها قطرٌ لكل واحدة منها

٢ قطب دائرة عظيمة هو نقطة في سطح الكرة وجميع الخطوط المستقيمة المرسومة منها الى محيط الدائرة متساوية

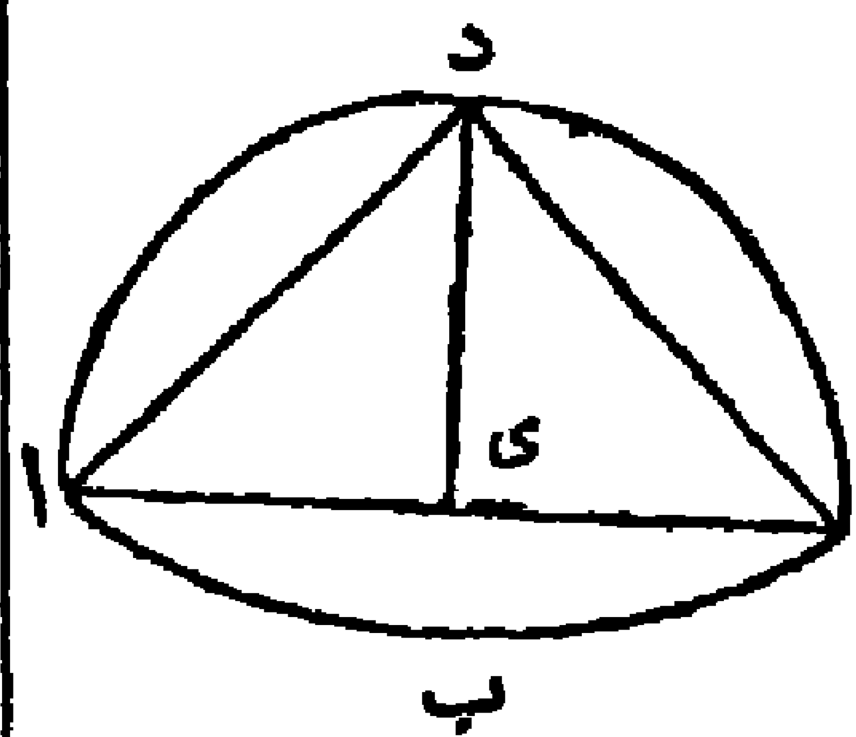
٣ الزاوية الكروية هي زاوية على سطح كرة واقعة بين قوسين من دائرتين عظيمتين تتقاطعان وهي تعدل ميل سطحَي هاتين الدائرتَين احدهما على الاخر

٤ المثلث الكروي هو شكل على سطح كرة واقع بين ثلاثة اقواس من ثلاث دوائر عظيمة كل واحد منها اقل من نصف دائرة

القضية الثانية

قوس دائرة عظيمة واقع بين قطب دائرة اخرى عظيمة ومحيطها هو ربع دائرة

لتكن ا ب س دائرة عظيمة ود قطبها فاذا مرّ س د قوس دائرة عظيمة في د ولاقى ا ب س في س فالقوس د س ربع دائرة



الدائرة التي س د قوس منها لتلاقِ ا ب س ايضًا في ا ولیكن ا س موضع تقاطع هاتين الدائرتين العظيمتين فهو يمرُّ في ى مركز الكرة.

ارسم د ا د س. الخط ا د = د س (حدّ ٣)

فالقوس ا د = القوس د س (ق ٢٨ ك ٣) وا د س نصف دائرة فكل واحدة من القوسين ا د ود س ربع دائرة

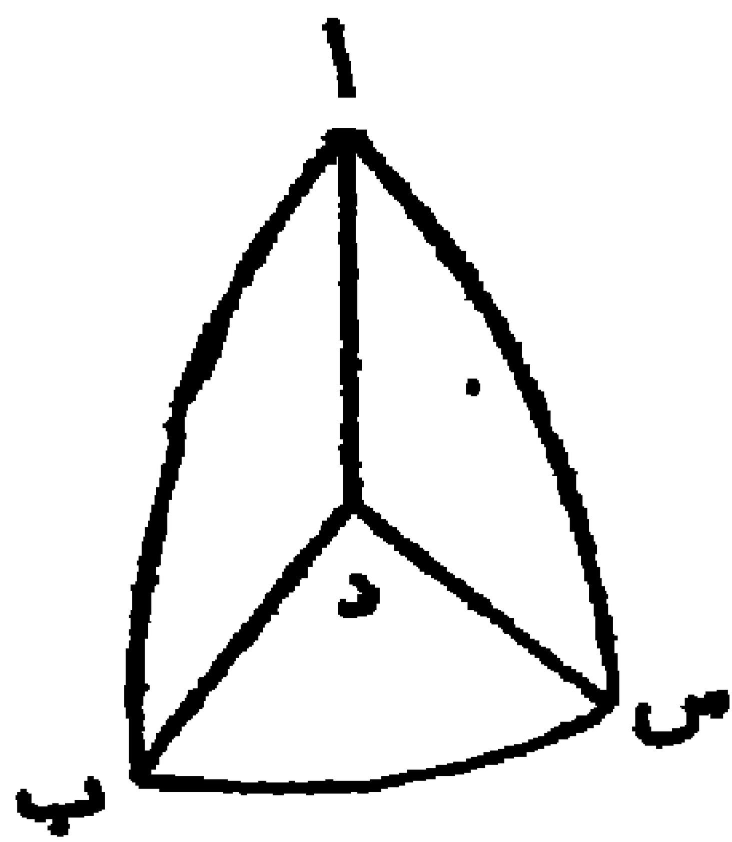
فرعٌ اول. اذا رُسِم د ى فالزاوية د ى ا قائمة ود ى عموديّ على كل خطٍ يلاقيهِ في سطح الدائرة ا ب س فهو عمود على ذلك السطح (ق ٤ ك ٢ مضافات) فالخط المستقيم المرسوم من قطب دائرة عظيمة الى مركز الكرة هو عمود على سطح تلك الدائرة. وبالقلب كل خط من مركز كرة عمودًا على سطح دائرة عظيمة يلاقي سطح الكرة في قطب تلك الدائرة

فرعٌ ثانٍ. الدائرة ا ب س لها قطبان واحد على الجانب الواحد والاخر على الجانب الاخر من سطحها وهما نهايتا قطر الكرة العمودي على سطح ا ب س. ولا يمكن ان تكون نقطتان اخريان قطبَي الدائرة ا ب س

القضية الثالثة

اذا كان قطب دائرة عظيمة في نقطة تقاطع دائرتين اخريين عظيمتين فالقوس من الدائرة الاولى الواقع بين الاخريين هو قياس الزاوية الكروية الحادثة بينهما راسها عند القطب الذي هو نقطة التقاطع

ليكن د مركز كرة وب ا س ا دائرتين عظيمتين تتقاطعان في ا وليكن ب س



قوس دائرة اخرى عظيمة قطبها ا. فالقوس ب س هو قياس الزاوية الكروية ب ا س

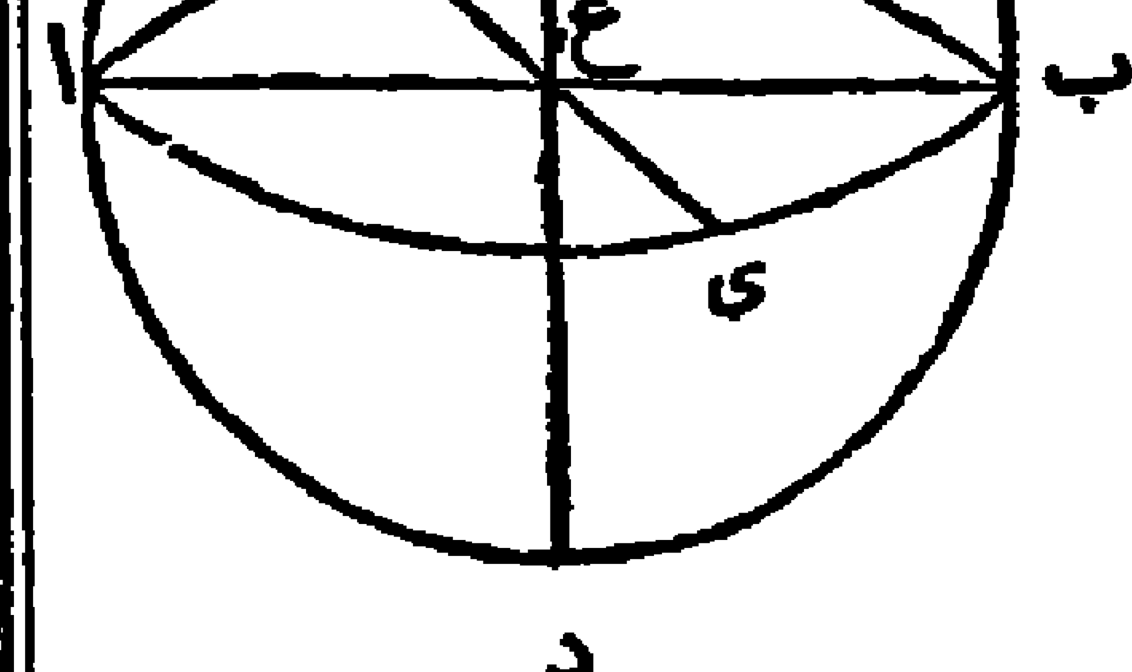
ارسم ا د ب د س. لانّ ا قطب ب س فالقوس ا ب ربع دائرة وا س كذلك (ق ٢) وا د ب ا د س قائمتان. فالزاوية س د ب هي ميل سطح دائرة القوس ا ب على دائرة القوس ا س (حد ٢) و(حد ٤ ك ٢ م) وتعدل الزاوية الكروية ب ا س والقوس ب س تقيس الزاوية ب د س فهو يقيس الزاوية الكروية ب ا س ايضاً

فرعٌ. اذا كان كل واحد من القوسين ا ب ا س المتقاطعتين في ا ربع دائرة تكون ا قطب الدائرة العظيمة المارّة في ب وس نهايتَي القوسَين. لانّ ا ب وا س رُبعا دائرة فالزاويتان ا د ب ا د س قائمتان فالخط ا د عمود على السطح ب د س اي على سطح الدائرة العظيمة المارّة في ب وس فالنقطة ا في قطب الدائرة العظيمة المارّة في ب وس (ق ا فرع ٢)

القضية الرابعة

اذا كان سطح دائرة عظيمة عموديّاً على سطح دائرة اخرى عظيمة فمحيط كل واحدة منها يمرّ بقطبي الاخرى. وبالقلب اذا مرّ محيط دائرة عظيمة في قطبي دائرة اخرى عظيمة فسطح الواحدة عمودي على سطح الاخرى

لتكن ا س ب د ا ى ب ق دائرتين عظيمتين سطح الواحدة عمودي على سطح الاخرى فقطبا ا س ب د هما في محيط ا ى ب ق وقطبا ا ى ب ق في محيط ا س ب د



من غ مركز الكرة ارسم الخطّ غ س في سطح ا س ب د عموداً على ا ب. فلانّ غ س في سطح ا س ب د العمودي على ا ى ب ق ولانهُ عمودٌ على موضع تقاطع السطحين فهو عمودٌ

على سطح ا ى ب ق (حد ٢ ك ٢ م) فالنقطة س هي قطب الدائرة ا ى ب ق (ق ٢ فرع اول) واذا أُخرج س غ الى د تكون د قطب ا ى ب ق الآخر

وهكذا اذا رُسم ع ى في سطح ا ى ب ق عمودًا على ا ب وأُخرج الى ق يبرهن انَّ ى وق قطبا الدائرة ا س ب د وبالقلب اذا كانت س قطبًا للدائرة ا ى ب ق فالدائرة العظيمة المارَّة في س هي عمودية على ا ى ب ق. لانهُ اذا رُسم س غ من القطب الى مركز الدائرة ا ى ب ق يكون عمودًا على سطحها (ق ٢ فرع اول) فكل سطح مارّ في س غ (ق ١٧ ك ٢ م) هو عمودي على سطح ا ى ب ق وسطح ا س ب د هو مارٌّ في س غ فهو عمود على ا ى ب ق .

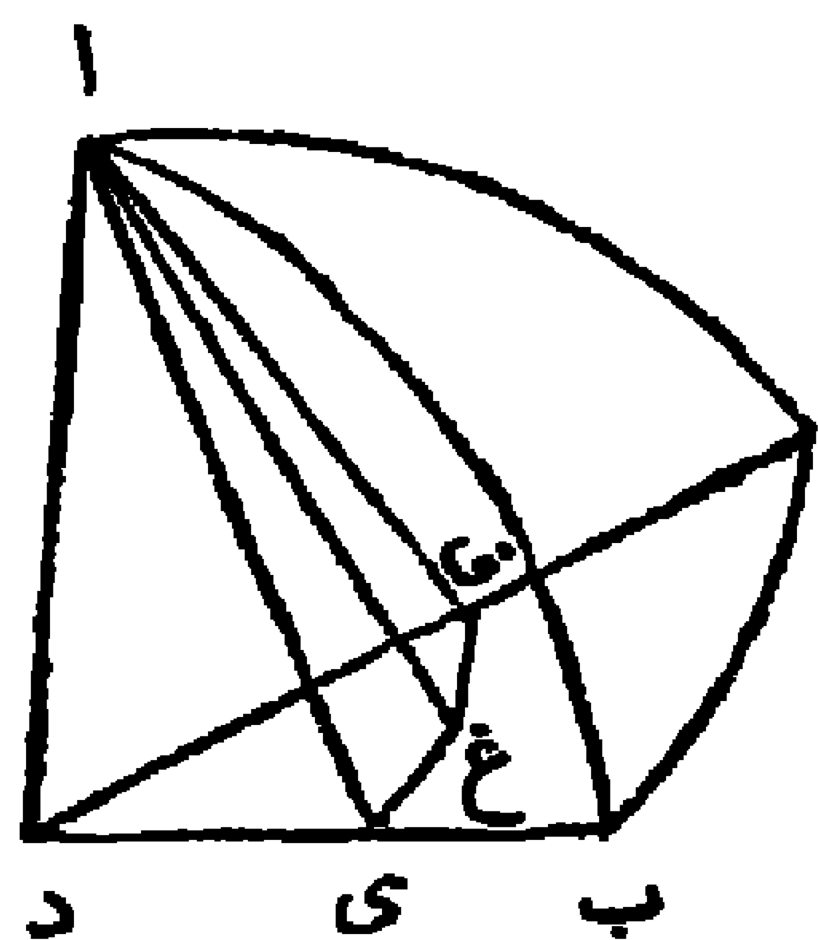
فرعٌ اول. في دائرتين عظيمتين اذا مرَّت اولاها في قطبَي الثانية فالثانية تمرُّ بقطبَي الاولى

فرعٌ ثانٍ. كل الدوائر العظيمة التي لها قطرٌ مشتركٌ تكون اقطابها في دائرة عظيمة سطحها عموديّ على ذلك القطر

القضية الخامسة

في مثلث كروي متساوي الساقَين تكون الزاويتان عند القاعدة متساويتين

ليكن ا ب س مثلثًا كرويًّا. والضلع ا ب منهُ فليعدل الضلع ا س منهُ فالزاوية الكروية ا ب س تعدل الكروية ا س ب



ليكن د مركز الكرة. ارسم د ب د س د ا. ومن ا ارسم ا ق عمودًا على د س وا ى عمودًا على د ب وفي السطح د ب س ارسم ق ع عمودًا على د س وى غ عمودًا على د ب وليلتقيا في غ. ارسم ا غ

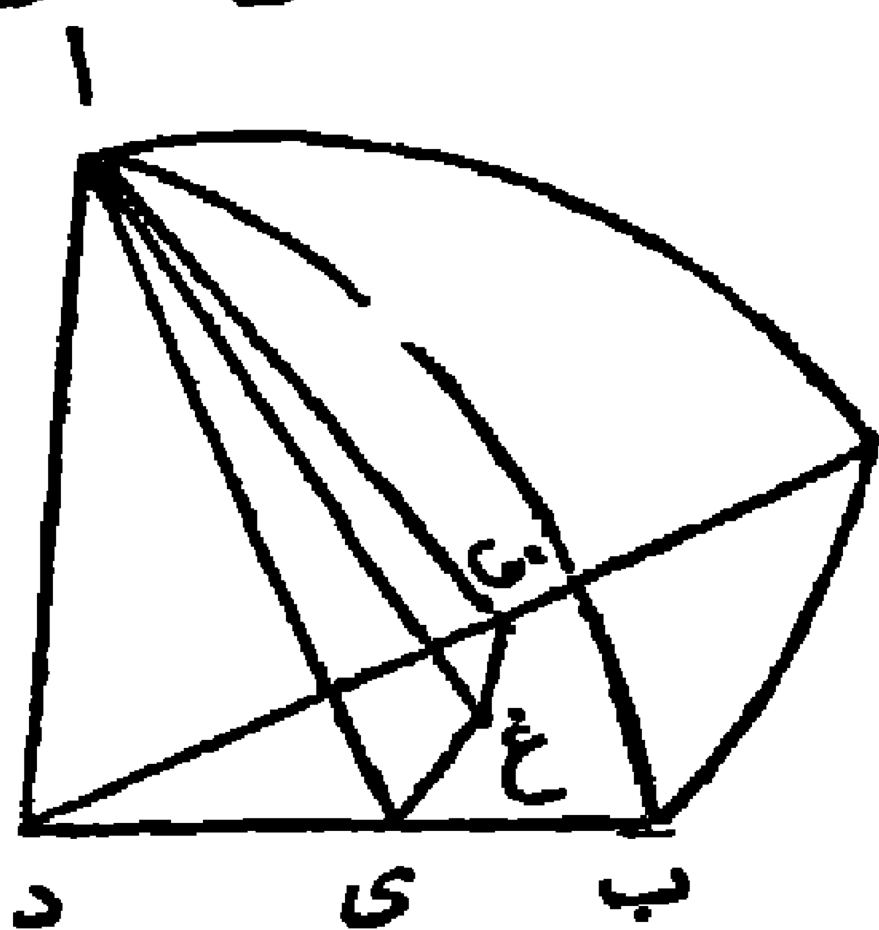
لان د ى عمودٌ على ا ى وى غ فهو عمود على السطح المارّ بهما (ق ٤ ك ٢ م) فكل سطح مارّ في د ى هو عموديّ على سطح ا ى غ (ق ١٧ ك ٢ م) فالسطح د ب س عمودي على سطح ا ى غ. ولهذا السبب هو عمودي على سطح ا ق غ ايضًا فالخط ا غ الذي هو موضع تقاطع السطحين ا ق غ ا ى ع هو

عمودٌ على سطح د ب س (ق ١٨ ك ٢ م) والزاويتان ا غ ى ا غ ق قائمتان
ولكن القوس ا ب يعدل القوس ا س فالزاوية ا د ب = ا د س. فالمثلثان
ا د ى ا د ق لهما الزاويتان ا د ق ا د ى متساويتان وايضًا ا ى د ا ق د لانهما
قائمتان والضلع ا د مشترك بينهما فالضلع إى يعدل الضلع ا ق (ق ٢٦ ك ١)
ود ى = د ق ولان ا غ ى ا غ ق قائمتان فالمربعان على ا غ وغ ى يعدلان المربع
على ا ى وكذلك ا غ^2+غ ق^2=ا ق^2 وا ى^2=ا ق^2 فاذًا ا غ^2+غ ى^2=ا غ^2+غ ق^2
وغ ى^2=غ ق^2 وغ ى=غ ق فالزاوية ا ق غ=ا ى غ (ق ٨ ك ١) وا ق غ في
الحادثة بين سطح ا د س وسطح د ب س (حد ٤ ك ٢ م) لانّ ا ق وق غ عمودان
على د س موضع تقاطع السطحَين فالزاوية ا ق غ = الزاوية الكروية ا س ب (حد ٣)
ولهذا السبب ايضًا ا ى غ = الزاوية الكروية ا ب س وا ى غ = ا ق غ فاذًا ا ب س
= ا س ب

القضية السادسة

في مثلث كروي اذا كانت الزاويتان عند القاعدة متساويتين فالمثلث متساوي الساقَين

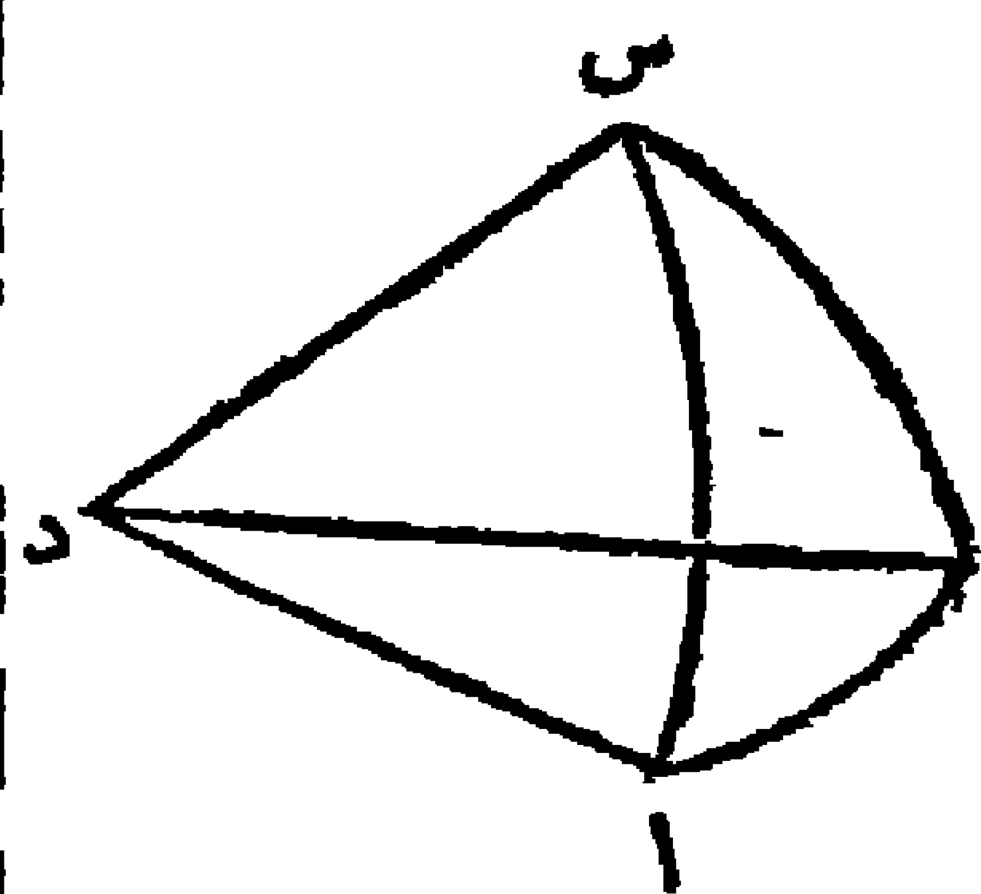
يبرهن كما في القضية السابقة ان ا ع ق ا غ ى قائمتان وان ا ق ع ا ى غ
تعدلان الحادثتين بين السطحين د ا س د ا ب
والسطح د ب س وانّ ا ق ع = ا ى ع ولان
ا ق = ا ى ثم د ق^2+ق ا^2=د ا^2 ود ى^2+ى ا^2=
د ا^2 وا ق^2=ا ى^2 فاذًا د ق^2=د ى^2 ود ق =
د ى فالزاوية د ا ق = د ا ى فالقوس ا ب =
القوس ا س



القضية السابعة

كل ضلعين من مثلثٍ كروي هما معًا اطول من ضلعهِ الثالث

ليكن ا ب س مثلثاً كروياً فكل ضلعين منهُ ا ب وب س هما معاً اطول من الضلع الثالث ا س



ليكن د مركز الكرة. ارسم د س د ب د ا. فالزاوية المجسمة عند د يحيط بها الثلاث زوايا البسيطة ا د ب ا د س ب د س وكل اثنتين منها معاً ا د ب ب د س اكبر من الثالثة ا د س (ق ٢٠ ك ٢ م) فكل اثنتين من الاقواس ا ب ا س ب س التي تقيس هذه الزوايا هما معاً اطول من الثالث

القضية الثامنة

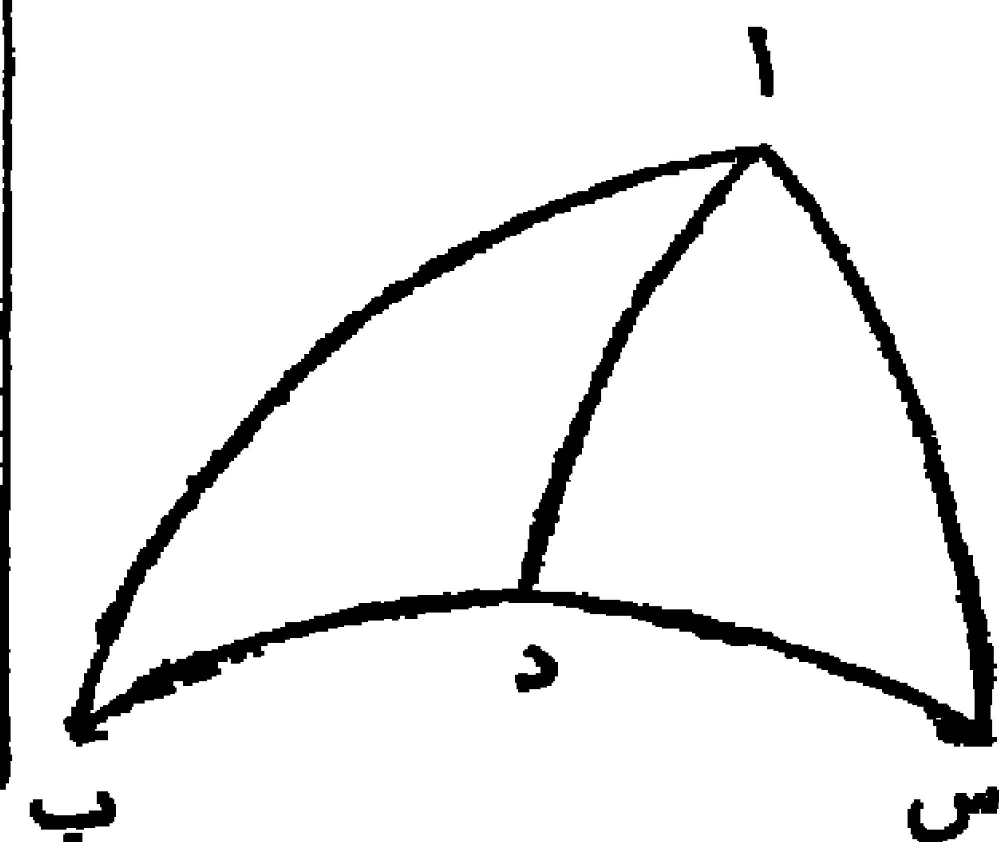
اضلاع مثلث كروي الثلاثة هي معاً اقل من محيط دائرة عظيمة

في رسم القضية السابقة ليكن ا ب س مثلثاً كروياً فاضلاعهُ الثلاثة ا ب ا س ب س هي معاً اقل من محيط دائرة عظيمة

ليكن د مركز الكرة فالزوايا البسيطة التي تحيط بالزاوية المجسمة عند د هي معاً اقل من اربع زوايا قائمة (ق ٢١ ك ٢ م) فالاقواس التي تقيسها هي معاً اقل من اربعة ارباع دائرة او اقل من محيط الدائرة التي مركزها د ونصف قطرها ا د

القضية التاسعة

في مثلث كروي الزاوية الكبرى تقابل الضلع الاطول وبالقلب

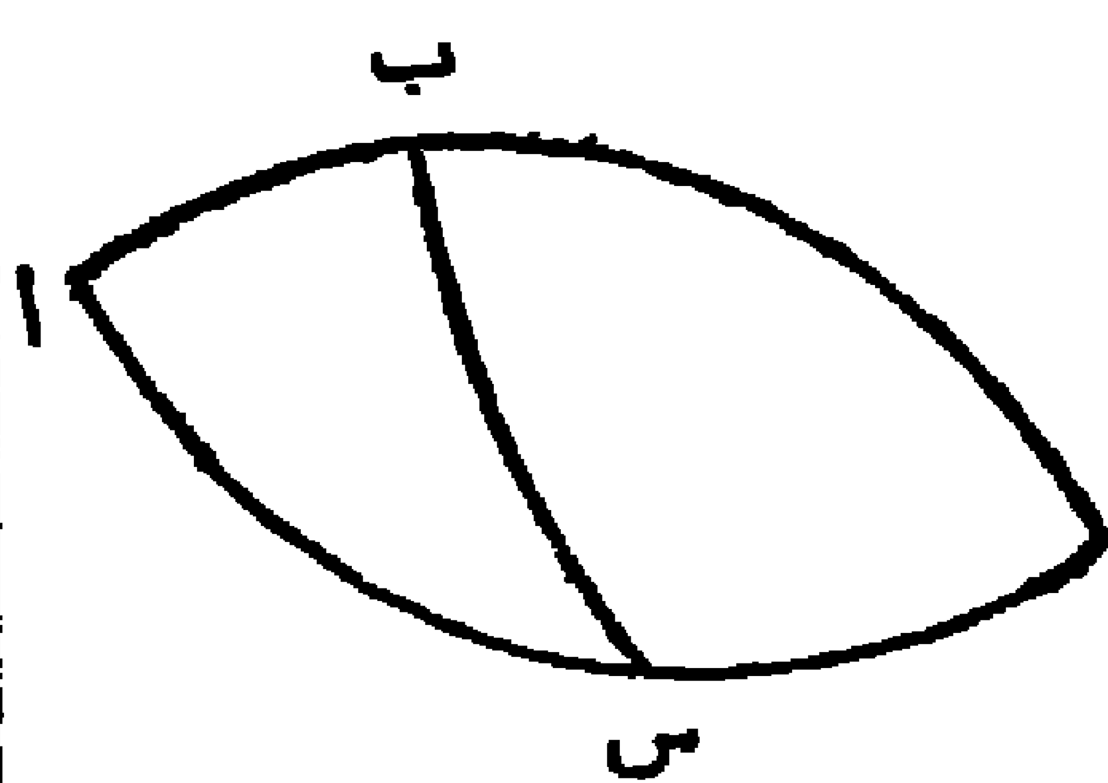


ليكن ا ب س مثلثاً كروياً فالزاوية الكبرى ا تقابل الضلع الاطول ب س. اجعل الزاوية ب ا د تعدل الزاوية عند ب فالضلع ب د = ا د (ق ٦) وا د + د س = ب س ولكن (ا د + د س) > ا س (ق ٧) فاذاً ب س > ا س وب س يقيس الزاوية عند ا. واما قلب هذه القضية فقد سبق برهانهُ في ق ١٩ ك ١

القضية العاشرة

اذا كان مجتمع ضلعَي مثلثٍ كروي اكثر من نصف دائرة تكون كل واحدة من الزاويتين الداخلتين عند القاعدة اكبر من الخارجة المقابلة عند القاعدة. واذا عدل مجتمعها نصف دائرة فكل واحدة من الداخلتين تعدل الخارجة. واذا كان مجتمعها اقل من نصف دائرة فكل واحدة من الداخلتين اصغر من الخارجة. وايضاً مجتمع الداخلتين عند القاعدة اكبر من قائمتين او يعدل قائمتين او اصغر من قائمتين حسبما كان مجتمع الضلعين اكثر من نصف دائرة او يعدلهُ او اصغر منهُ

ليكن ا ب س مثلثاً كروياً ضلعاهُ ا ب وب س وقاعدتهُ ا س. أخرِج احد الضلعَين ا ب والقاعدة ا س حتى يلتقيا ايضاً في د. فالقوس ا ب د نصف دائرة والزاوية الكروية عند ا تعدل الكروية عند د لان كل واحدة منها هي ميل الدائرة ا ب د على الدائرة ا س د



(١) اذا كان ا ب + ب س = نصف دائرة او ا د فحينئذٍ ب س = ب د والزاوية عند د (ق٥) او عند ا = ب س د اي الداخلة عند القاعدة تعدل الخارجة المقابلة

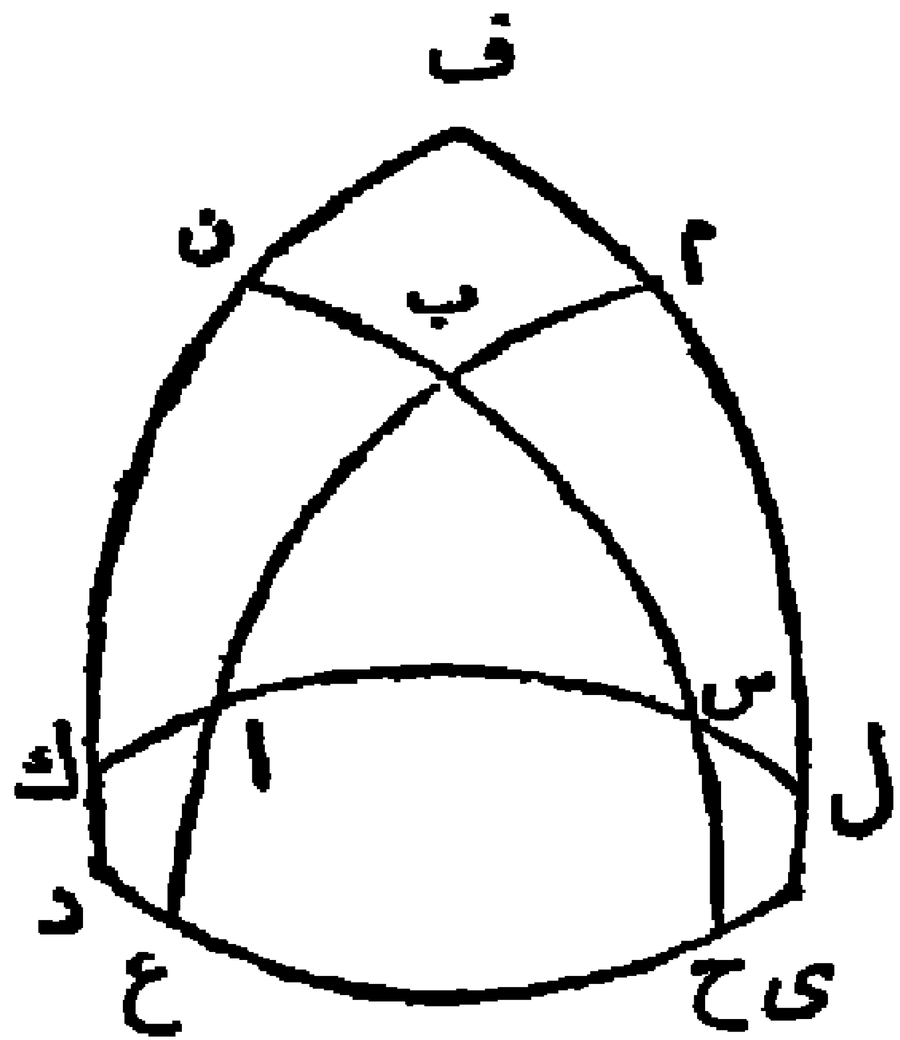
(٢) اذا كان ا ب + ب س اكبر من نصف دائرة او من ا ب د فحينئذٍ ب س اكبر من ب د والزاوية عند د او ا اكبر من ب س د (ق٩)

(٣) وهكذا اذا كان ا ب + ب س اقل من نصف دائرة او من ا ب د تكون د او ا اصغر من ب س د. ثم ب س د ب س ا تعدلان قائمتين. فاذا كانت ا اكبر من ب س د يكون ا + ا س ب اكبر من قائمتين. واذا كان ا = ب س د يكون ا + ا س ب = قائمتين واذا كان ا اصغر من ب س د يكون ا + ا س ب اقل من قائمتين

القضية الحادية عشرة

اذا جُعِلت زوايا مثلثٍ كروي اقطابَ ثلاث دوائر عظيمة فهذه الدوائر الثلاث بتقاطعها تُحدِث مثلثًا يسمى متمَّ الاول. واضلاع احدها متمّات للاقواس التي تقيس زوايا الآخر

ليكن ا ب س مثلثًا كرويًا وليكن ا وب وس اقطابًا للدوائر العظام ف ى ى د د ف التي تتقاطع في ف وى ود. فاضلاع المثلث ف ى د هي متمات لاقيسة الزوايا ا وب وس اي ف ى متم ب ا س ود ى متم ا ب س ود ف متم ا س ب. وايضًا ا س متم الزاوية د ف ى وا ب متمّ الزاوية ف ى د وب س متم الزاوية ى د ف. اخرج ب س الى ن وح وا ب الى م وغ وا س الى ك ول



لانَّ ا قطب ف ى والدائرة ا س تمرُّ في ا فالدائرة ف ى تمرُّ بقطب ا س (ق ٤ فرع ١) ولانَّ س قطب ف د فالدائرة ف د تمرُّ بقطب ا س فقطب ا س هو ف عند تقاطع القوسين ى ف د ف. وهكذا يبرهن ان د قطب ب س وى قطب ا ب

ولان ف قطب ا ل وى قطب ا م فالقوس ف ل ربع دائرة وى م كذلك (ق ٢) وف ل م ى معًا او ف ى م ل معًا يعدلان نصف دائرة وم ل قياس ب ا س (ق ٢) فاذًا ف ى متم قياس ب ا س وهكذا في البقية

ولانَّ س ن ربع دائرة وب ح ربع دائرة فالقوسان س ب ب ح معًا او ن ح ب س معًا تعدلان نصف دائرة ون ح قياس ف د ى فقياس ف د ى متم ب س وهكذا في البقية

القضية الثانية عشرة

الزوايا الثلاث من مثلث كروي هي معاً اكبر من قائمتين واصغر من ستّ زوايا قائمة

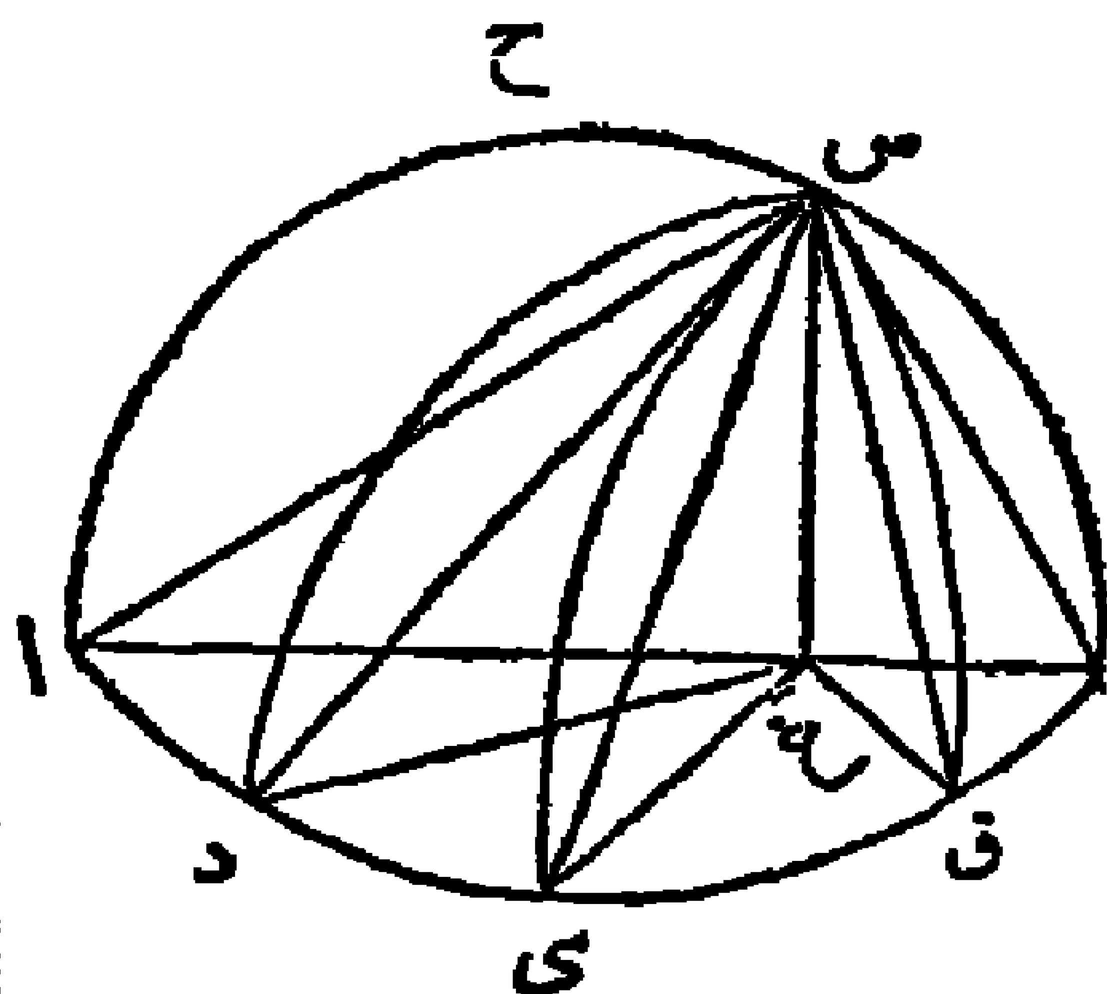
في رسم القضية السابقة اقيسة الزوايا الثلاث ا ب س في المثلث ا ب س مع اضلاع المثلث المتمّ د ى ف تعدل ثلاثة انصاف دائرة (ق ١١) ولكن اضلاع ف د ى الثلاثة معاً اقل من نصفَي دائرة (ق ٨) فاقيسة ا وب وس اكبر من نصف دائرة فالزوايا الثلاث ا وب وس اكبر من قائمتين

ولانّ الزوايا الداخلة من كل مثلث مع الخارجة تعدل ست زوايا قائمة فالداخلة وحدها اقل من ست زوايا قائمة

القضية الثالثة عشرة

اذا رُسِمتْ اقواس دوائر عظيمة على محيط دائرة عظيمة من نقطة في محيط الكرة ليست هي قطب تلك الدائرة فاطول هذه الاقواس هو المارّ بقطب تلك الدائرة ومتمّهُ هو الاقصر ومن البقية فالاقرب الى الاطول اطول من الابعد منهُ

ليكن ا د ب محيط دائرة عظيمة قطبها ح ولتكن س نقطة اخرى ومن س لتُرسَم اقواس على ا د ب فالاطول هو س ح ا المارّ بالقطب والاقصر هو س ب متم س ح ا ومن البقية فالاقرب الى س ح ا اي س د هو اطول من س ى الابعد منهُ .



من س ارسم س غ عموداً على ا ب فهو عمود على سطح ا د ب . ارسم غ د غ ى غ ق س ا س د س ى س ق س ب

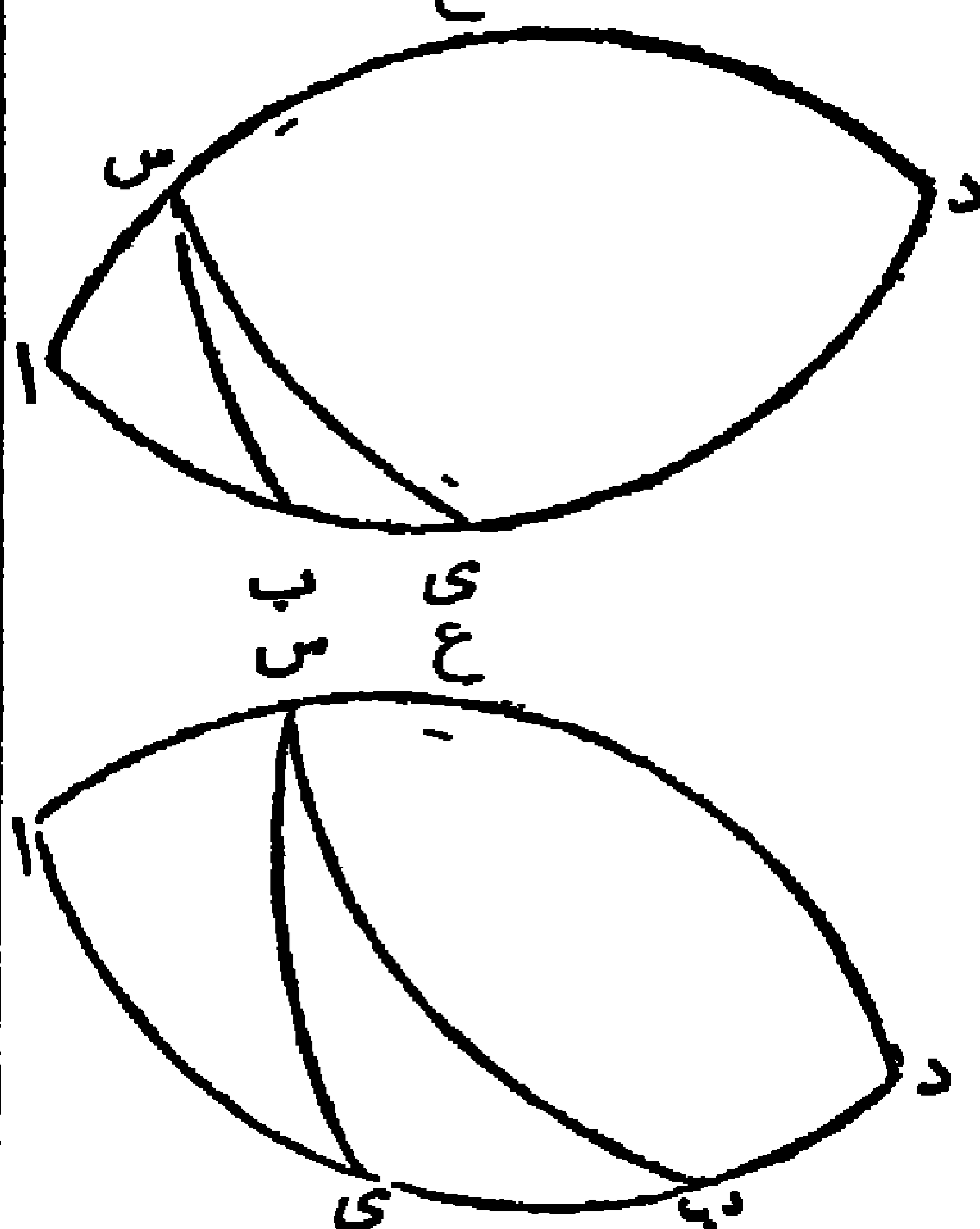
لان ا ب قطر الدائرة ا د ب وغ نقطة

فيهِ غير المركز فالقسم ا غ الذي فيهِ المركز هو اطول الخطوط (ق٧ ك٣) التي تُرسم من غ الى المحيط وغ ب اقصرها وغ د الاقرب الى ا غ اطول من غ ى الذي هو ابعد. ولكن المثلثان س غ ا س غ د لهما قائمة عند غ وا س٢=ا غ٢+غ س٢ ود س٢=د غ٢+غ س٢ ولكن ا غ٢+غ س٢ ≻ د غ٢+غ س٢ لان ا غ ≻ د غ فاذاً ا س٢ ≻ د س٢ وا س ≻ د س. ولكون الوتر ا س اطول من الوتر د س فالقوس ا س اطول من القوس د س. وهكذا في البقية

القضية الرابعة عشرة

في مثلثٍ كروي قائم الزاوية الضلعان المحيطان بالقائمة والزاويتان المقابلتان لهما من جنس واحد. اي اذا كان الضلع اكبر من ربع دائرة تكون الزاوية المقابلة اكبر من قائمة واذا كان اقلّ من ربع تكون الزاوية المقابلة اصغر من قائمة

ليكن ا ب س مثلثاً كروياً لهُ قائمة عند ا فالضلع ا ب جنسهُ كجنس الزاوية المقابلة ا س ب



أَخرِج القوسين حتى تلتقيا ايضاً في د ونَصِّفْ ا د في ى. فيكون ا س د نصف دائرة وا ب د نصف دائرة وا ى قوس ٩٠°. وقد فُرِضَتْ س ا ب قائمة فسطح الدائرة ا ب د عموديّ على سطح الدائرة ا س د فقطب ا س د انما هو في ا ب د (ق٤ فرع اول) وهو في ى. ليكن ى س قوس دائرة عظيمة مارّة في ى وس

فلكون ى قطب الدائرة ا س د يكون ى س ربع دائرة (ق٣) وسطح ى س عمودي على سطح الدائرة ا س د (ق٤) فالزاوية الكرويّة ا س ى قائمة فاذا كان

ا ب اقصر من ا ى تكون ا س ب اصغر من قائمة واذا كان ا ب اطول من ا ى تكون ا س ب اكبر من ا س ى واكبر من قائمة وهكذا يبرهن قلب هذه القضية

القضية الخامسة عشرة

في مثلث كروي ذي قائمة اذا كان الضلعان المحيطان بالقائمة من جنس واحدٍ يكون الوتر اقل من ربع دائرة واذا كانا مختلفَي الجنس يكون الوتر اكثر من ربع دائرة

في رسم القضية السابقة نَصِّف ا د في غ فيكون ا غ قوس °٩٠ وغ قطب ا ب د

(١) ليكن ا ب ا س اقل من °٩٠. فلكون س نقطةً في سطح الكرة غير قطب ا ب د تكون القوس س غ د المارّة بالقطب غ اطول من س ى وس ى اطول من س ب (ق ١٢) وس ى ربع دائرة فيكون س ب اقل من ربع دائرة. وهكذا يبرهن في المثلث س د ب ذي القائمة عند د الذي ضلعاهُ س د ود ب اكبر من ربع دائرة فالوتر س ب اقل من ربع دائرة

(٢) ليكن ا س اقل من °٩٠ وا ب اكثر من °٩٠. فلان س ب واقع بين س غ د وس ى فهو اطول من س ى (ق ١٢) اي اطول من ربع دائرة

فرعٌ اول. وبالقلب في مثلث كروي قائم الزاوية اذا كان الوتر اكثر من ربع دائرة يكون الضلعان مختلفي الجنس والّا فمن جنسٍ واحدٍ

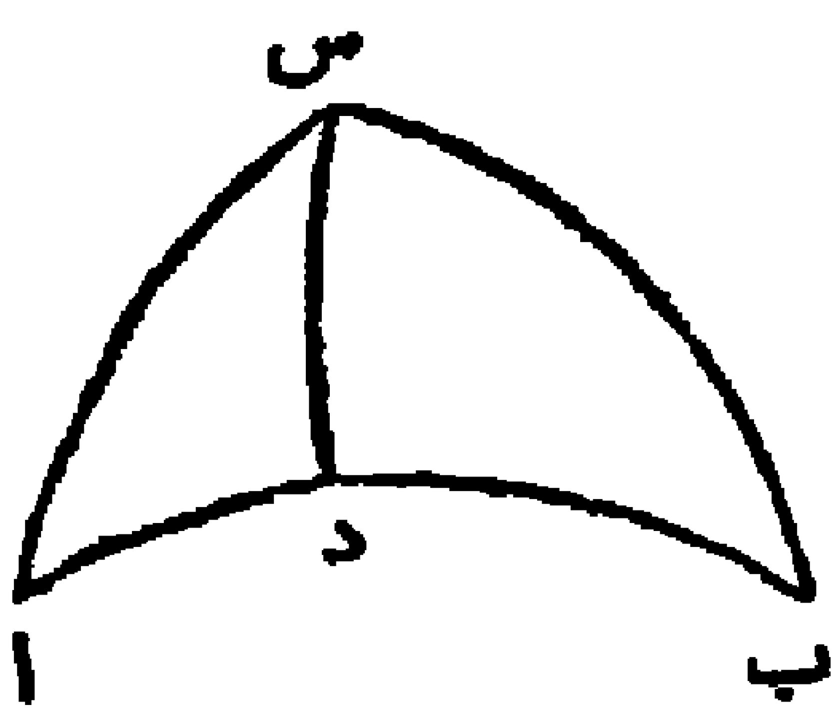
فرعٌ ثانٍ. في مثلث كروي قائم الزاوية الزاويتان الاخريان من جنس الضلعين المقابلين لهما فاذا كان الوتر اكبر من نصف دائرة فالزاويتان الاخريان مختلفتا الجنس والّا فمن جنسٍ واحدٍ

فرعٌ ثالثٌ. الضلعان من جنس الزاويتين المقابلتين فاذا كانت زاوية والضلع الذي يليها من جنسٍ واحدٍ فالوتر اقل من نصف دائرة وبالقلب

القضية السادسة عشرة

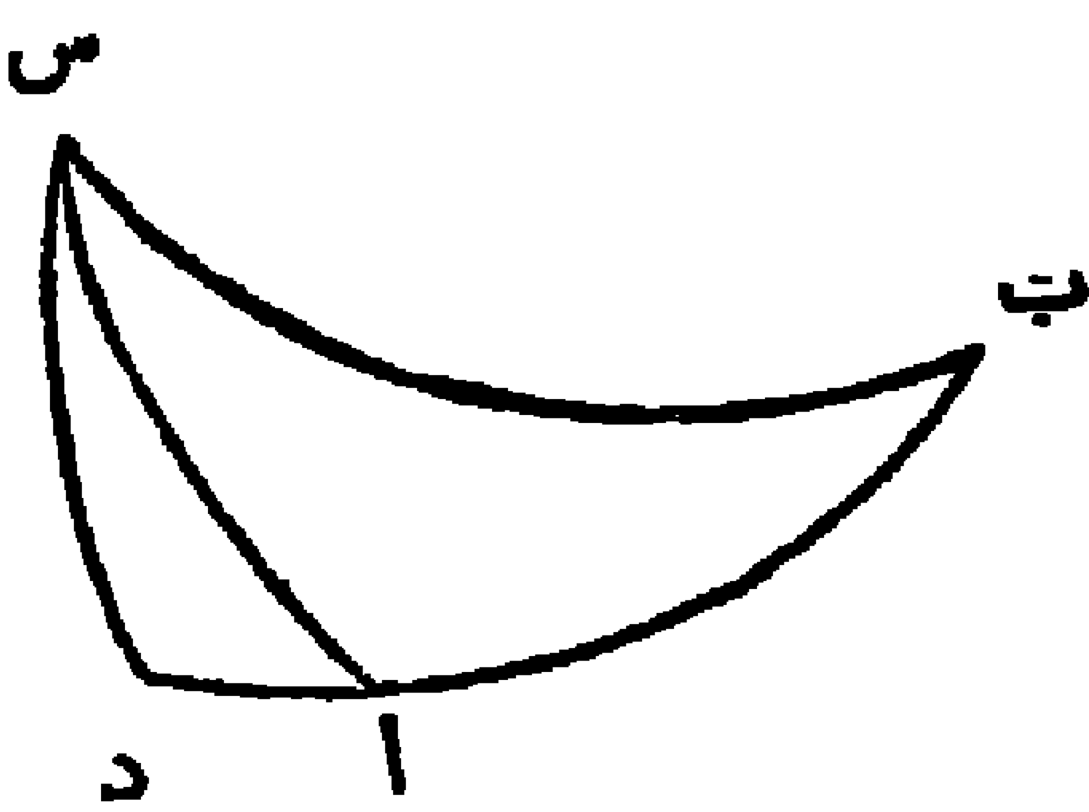
في مثلثٍ كرويٍ اذا رُسِم عمود على القاعدة من الزاوية المقابلة ووقع العمود داخل المثلث فالزاويتان عند القاعدة من جنس واحد واذا وقع خارج المثلث فهما مختلفتا الجنس

ليكن ا ب س مثلثاً كروياً وليرسم القوس س د من س عموداً على القاعدة ا ب



(١) ليقع س د داخل المثلث. فالزاويتان ا د س ب د س قائمتان فالزاويتان عند ا وب هما من جنس س د (ق ١٤)

(٢) ليقع س د خارج المثلث فالزاوية عند ب هي من جنس س د (ق ١٤) وس ا د من جنس س د فالزاويتان ب وس ا د من جنس واحد وب وس ا ب مختلفتا الجنس

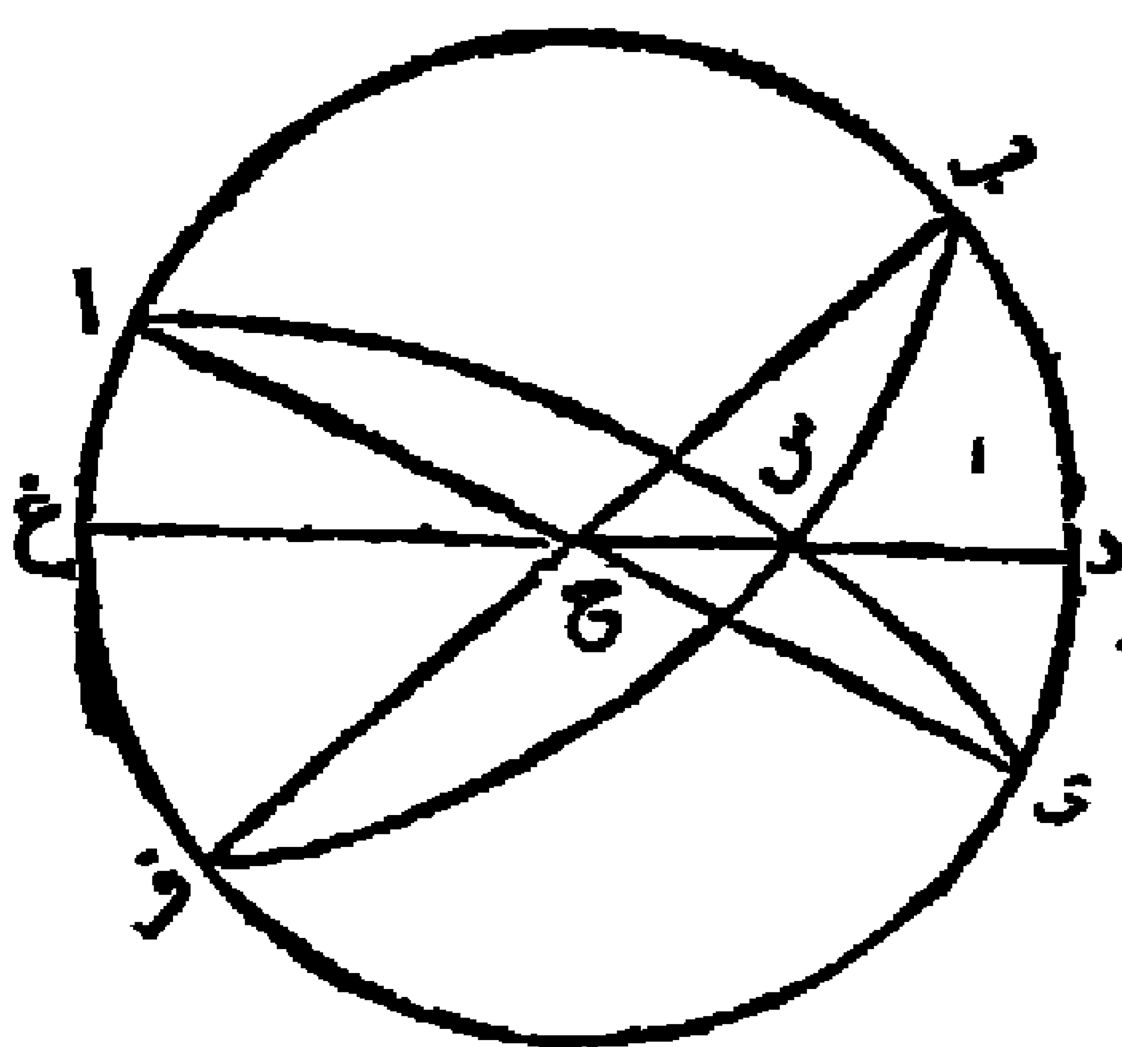


فرعٌ. اذا كان ا وب من جنس واحد يقع العمود داخل المثلث والاَّ فخارجهُ

القضية السابعة عشرة

اذا رُسِم عموديٌّ على قاعدة مثلث كروي من الزاوية المقابلة ووقع داخل المثلث او كان اقرب الاثنين الواقعين خارجهُ فاصغر قسمي القاعدة يلي اقصر ضلعَي المثلث اذا كان مجتمع الضلعَين اقل من نصف دائرة ويلي اطول الضلعين اذا كان مجتمعها اكثر من نصف دائرة

ليكن ا ب ى ف دائرة عظيمة من كرةٍ وح قطبها وغ ح د دائرة مارّة في ح



وعمودية على ا ب ى ف. ولتكن ى و ب نقطتين في الدائرة ا ب ى ف على جانبي د ولتكن د اقرب الى ى. ولتكن س نقطة في الدائرة غ ح د بين ح و د. ارسم القوسين ى س ا ب س ف فكل واحدة منها نصف دائرة وى س ب ى س ف ف س ا ا س ب اربع مثلثات كروية بين اقواس دائرتين ولها العمودان س د و س غ

(١) لانّ س ا اقرب من س ب الى القوس س ح غ فالقوس س ا اطول من القوس س ب و س ا + س ى > س ب + س ى فيكون س ب + س ى اقل من نصف دائرة وى د بالمفروض اقصر من د ب فيكون ى س اقصر من س ب (ق١٢) فاذا وقع العمود داخل المثلث وكان مجتمع الضلعين اقل من نصف دائرة فالقسم الاقصر من القاعدة يلي الضلع الاقصر

(٢) في المثلث ف س ى الضلعان ف س س ى اقل من نصف دائرة وى س اقصر من س ف لانهٔ ابعد عن س ح غ. فاذا وقع العمود خارج المثلث وكان مجتمع الضلعين اقل من نصف دائرة فالقسم الاقصر يلي الضلع الاقصر

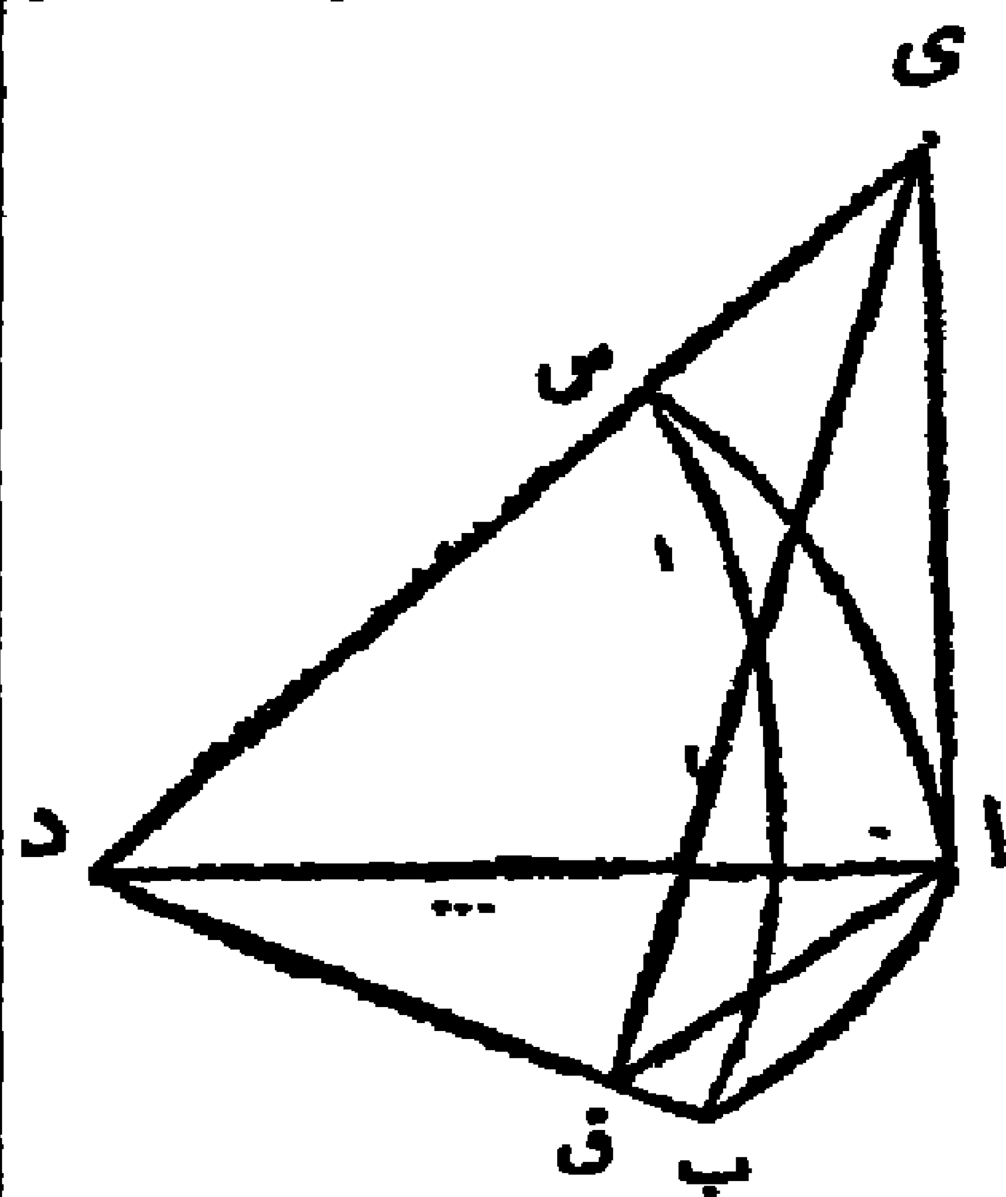
(٣) ولكن في المثلث ف س ا الضلعان ف س س ا اطول من نصف دائرة وا س اطول من س ف لانّ ى س اقصر من س ب فيكون ا س اقرب الى س ح غ فيكون ا غ اقصر قسمي القاعدة وهو يلي الضلع الاطول

(٤) وفي المثلث ا س ب ا س و س ب معًا اطول من نصف دائرة وا س اطول من ب س فاقصر قسمَي القاعدة ا غ يلي الضلع الاطول

القضية الثامنة عشرة

في مثلثٍ كرويٍّ قائم الزاوية تكون نسبة جيب احد الضلعَين المحيطَين بالقائمة الى نصف قطر الكرة كنسبة مماسّ الضلع الآخر الى مماسّ الزاوية التي تقابلهُ

ليكن ا ب س مثلثاً كروياً ذا قائمة عند ا فنسبة جا ب : ق/٢ :: م ا س : م ا ب س. لتكن د مركز الكرة. ارسم د ا د ب د س. وارسم ا ق عموداً على ب د فهو جيب ا ب ومن ق ارسم الخطّ المستقيم ق ى عموداً على ب د في سطح ب د س وليلاقِ د س في ى. ارسم ا ى



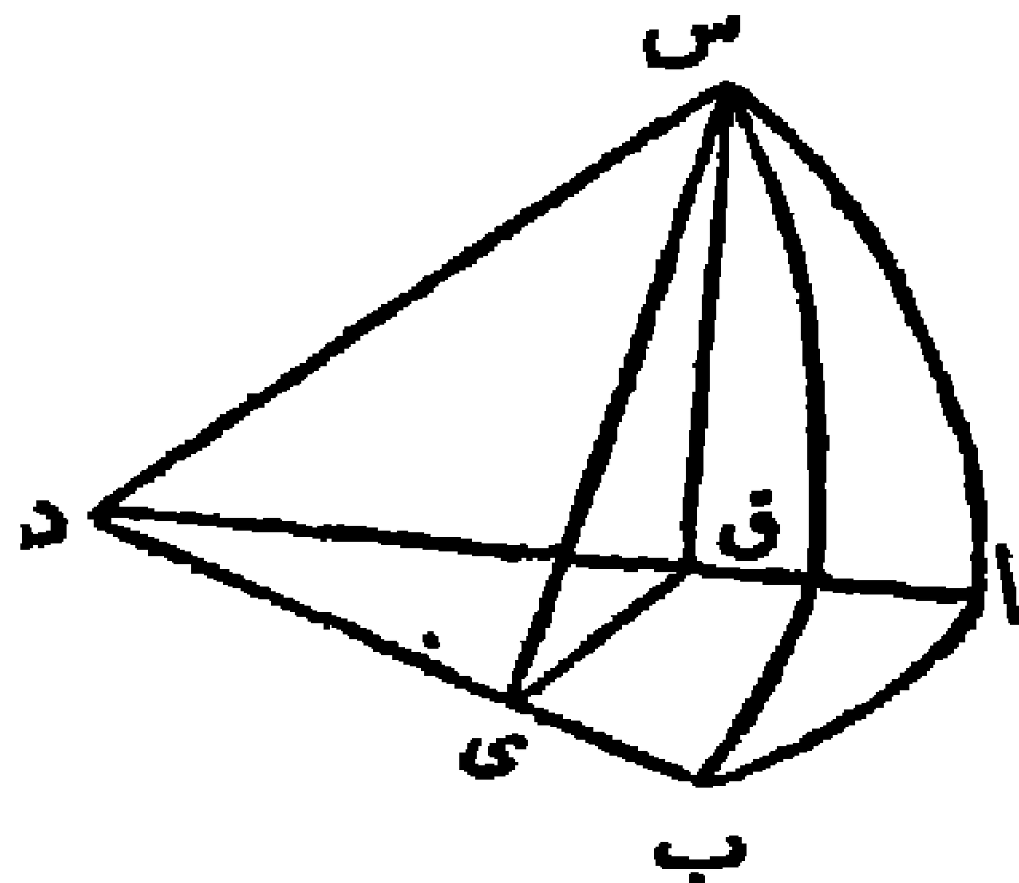
لكون الخطّ المستقيم د ق عموداً على ق ا وق ى يكون عموداً ايضاً على سطح ق ى ا (ق ٤ ك ٢ م) فالسطح ا ب د المارّ في د ق هو عموديّ على السطح ا ى ق (ق ١٧ ك ٢ م) والسطح ا ى ق عموديّ على ا ب د. ولكن السطح ا س د او ا ى د ايضاً عموديّ على ا ب د لانّ الزاوية الكروية ب ا س قائمة. فيكون الخطّ ا ى موضع تقاطع السطحين ا ى د ا ى ق عمودياً على السطح ا ب د (ق ١٨ ك ٢ م) وى ا ق ى ا د قائمتين. فيكون ا ى مماسّ القوس ا س. وفي المثلث البسيط ا ى ق ذي القائمة عند ا تكون نسبة ا ق : ق/٢ :: ا ى : مماسّ الزاوية ا ق ى (مثلثات مستوية ق ١) ولكن ا ق هو جيب القوس ا ب وا ى مماسّ القوس ا س والزاوية ا ق ى هي ميل السطح س ب د على السطح ا ب د (حد ٤ ك ٢ م) وتعدل الزاوية الكروية ا ب س فنسبة جيب القوس ا ب الى نصف القطر كنسبة مماسّ القوس ا س الى مماسّ الزاوية المقابلة ا ب س

فرعٌ. لانهُ بموجب هذه القضية جا ب : ق/٢ :: م ا س : م ا ب س ولانّ ق/٢ : تم ا ب س :: م ا ب س : ق/٢ (فرع اول حد ٩ مثلثات مستوية) فبالمساواة جا ب : تم ا ب س :: م ا س : ق/٢

القضية التاسعة عشرة

في مثلث كرويّ قائم الزاوية تكون نسبة جيب الوتر الى نصف القطر كجيب احد الضلعين الى جيب الزاوية التي تقابل ذلك الضلع

ليكن ا ب س مثلثًا كرويًا ذا قائمة عند ا فنسبة جيب الوتر ب س الى نصف القطر كنسبة جيب القوس ا س الى جيب الزاوية ا ب س

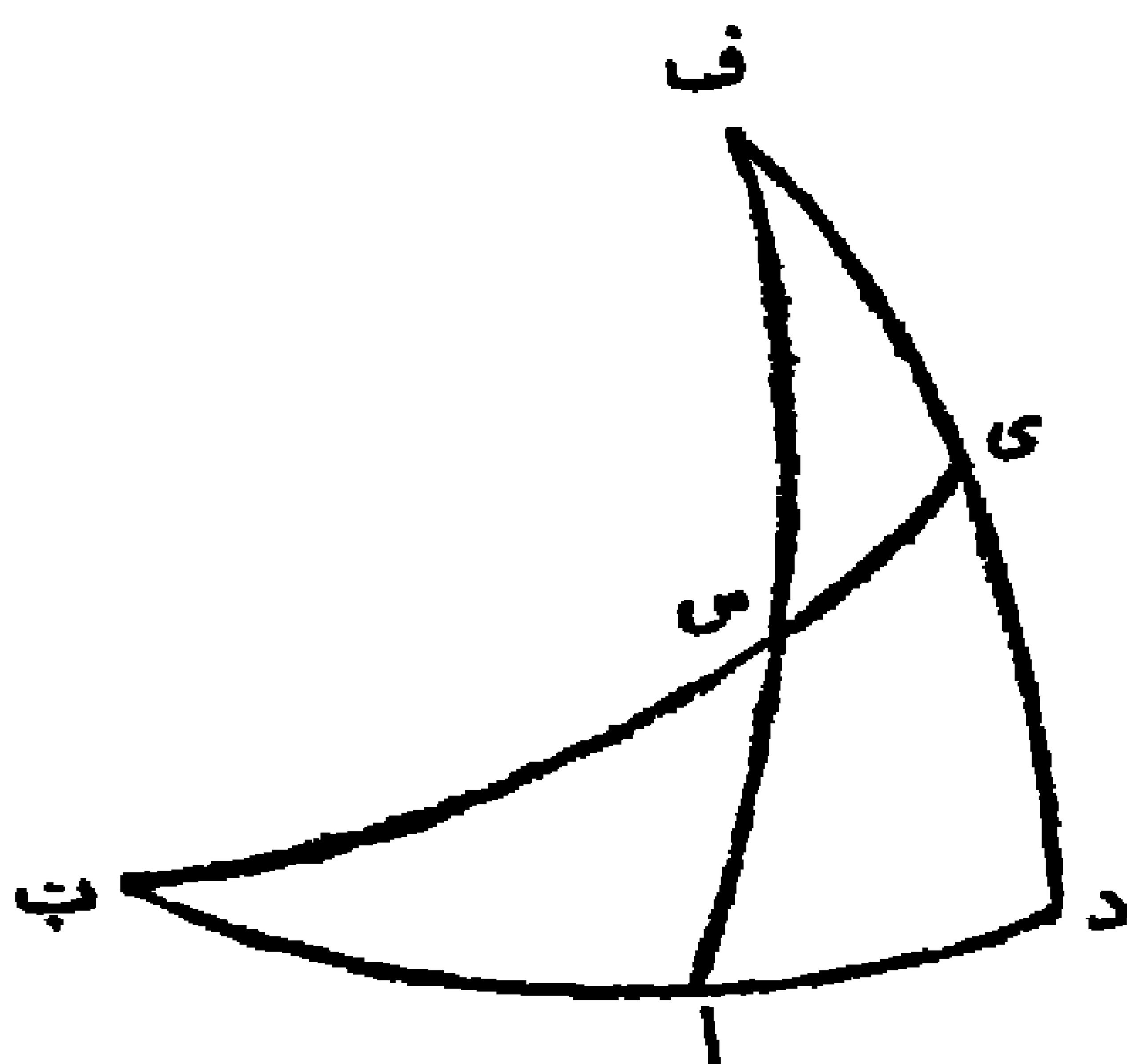


ليكن د مركز الكرة وليرسم س ى عمودًا على د ب فهو جيب القوس س ب. ومن ى ليرسم الخطّ المستقيم ى ق في السطح ا ب د عمودًا على ب د وارسم س ق فيكون س ق عمودًا على السطح ا ب د كما تقدم في القضية السابقة فتكون س ق د س ق ى قائمتين وس ق جيب القوس ا س. وفي المثلث البسيط س ق ى ذي القائمة س ق ى تكون نسبة س ى : $\frac{ق}{٢}$ :: س ق : جـ س ى ق (ق ا مثلثات مستوية) ولانّ س ى وق ى عمودان على د ى ب الذي هو موضع تقاطع السطحين س ب د ا ب د فالزاوية س ى ق هي ميل هذين السطحين احدهما على الآخر (حد ٤ ك ٣ م) وهي تعدل الزاوية الكروية ا ب س فنسبة جيب الوتر ب س : $\frac{ق}{٢}$ :: جـ القوس ا س : جـ الزاوية المقابلة ا ب س

القضية العشرون

في مثلثٍ كرويٍّ قائم الزاوية تكون نسبة نظير جيب الوتر الى نصف القطر كنظير مماسّ احدى الزاويتين الى مماسّ الزاوية الاخرى

ليكن ا ب س مثلثًا كرويًا ذا قائمة عند ا فنسبة نظير جيب الوتر ب س الى نصف القطر كنسبة نظير مماسّ الزاوية ا ب س الى مماس الزاوية ا س ب



ارسم القوس د ى وليكن ب قطبهُ وليلاقِ ا س في ف وب س في ى. فلانّ القوس ب د تمرّ في النقطة ب وهي قطب القوس د ف فالقوس د ف تمرّ بقطب ب د (ق ٤) ولانّ

اس عمودية على ب د فسطح الدائرة اس عموديٌّ على سطح الدائرة ب ا د واس ايضاً تمرّ بقطب ب ا د فتكون ف ذلك القطب وف ا ربع دائرة وف د ربع دائرة وهكذا ايضاً القوسان ب ى ب د. ففي المثلث س ى ف ذي القائمة عند ى يكون س ى كمال ب س وتر المثلث ا ب س وى ف كمال القوس د ى قياس الزاوية ا ب س وف س وتر المثلث س ى ف هو كمال القوس ا س والقوس ا د قياس الزاوية س ف ى هو كمال القوس ا ب وحسب (ق١٨) في المثلث س ى ف لنا جـ س ى : ق/٢ :: م ى ف : م ى س ف او في المثلث ا س ب نجـ ب س : ق/٢ :: نم ا ب س : م ا س ب

فرعٌ. لانّ نجـ ب س : ق/٢ :: نم ا ب س : م ا س ب و (فرع احد ٩ مثلثات مستوية) نم ا ب س : ق/٢ :: ق/٢ : م ا ب س فبالمساواة نم ا س ب : نجـ ب س :: ق/٢ : نم ا ب س

القضية الحادية والعشرون

في مثلث كروي ذي قائمة تكون نسبة نظير جيب زاوية الى نصف القطر كمماسّ الضلع الذي يلي تلك الزاوية الى مماس الوتر

ليُرسَم كما في القضية السابقة. ثم في المثلث س ى ف نسبة جـ ف ى : ق/٢ :: م س ى : م س ف ى (ق ١٨) ولكن جـ ى ف = نجـ ا ب س وم س ى = نم ب س وم س ف ى = نم ا ب فاذاً نجـ ا ب س : ق/٢ :: نم ب س : نم ا ب و (فرع اول حد ٩ مثلثات مستوية) نم ب س : ق/٢ :: ق/٢ : م ب س ونم ا ب : ق/٢ :: ق/٢ : م ا ب فبالمساواة بالقلب نم ب س : نم ا ب :: م ا ب : م ب س

و (ق١ الك٥) نجا ب س : $\frac{ق}{٢}$ :: م ا ب : م ب س

فرع اول . يتضح من هذه القضية ان مماسّي قوسين مثل ا ب وب س هما بالتكافؤ كنظيرَي مماسّيهما

فرعٌ ثانٍ . لانّ نجا ب س : $\frac{ق}{٢}$ :: م ا ب : م ب س وايضاً $\frac{ق}{٢}$: نجا ب س :: م ب س : $\frac{ق}{٢}$ فبالمساواة نجا ب س : نم ب س :: م ا ب : $\frac{ق}{٢}$ اي نسبة نظير جيب احدى الزاويتين غير القائمة الى نظير مماسّ الوتر كنسبة مماسّ الضلع الذي يلي تلك الزاوية الى نصف القطر

القضية الثانية والعشرون

في مثلث كرويّ ذي قائمة تكون نسبة نظير جيب احد الضلعَين الى نصف القطر كنسبة نظير جيب الوتر الى نظير جيب الضلع الاخر

ليُرسَم كما تقدم ثم في المثلث س ى ف جـ س ف : $\frac{ق}{٢}$ :: جـ س ى : جـ س ف ى (ق١٩) ولكن جـ س ف = نجـ س ا وجـ س ى = نجـ ب س وجـ س ف ى = نجـ ا ب فنسبة نجـ س ا : $\frac{ق}{٢}$ :: نجـ ب س : نجـ ا ب

القضية الثالثة والعشرون

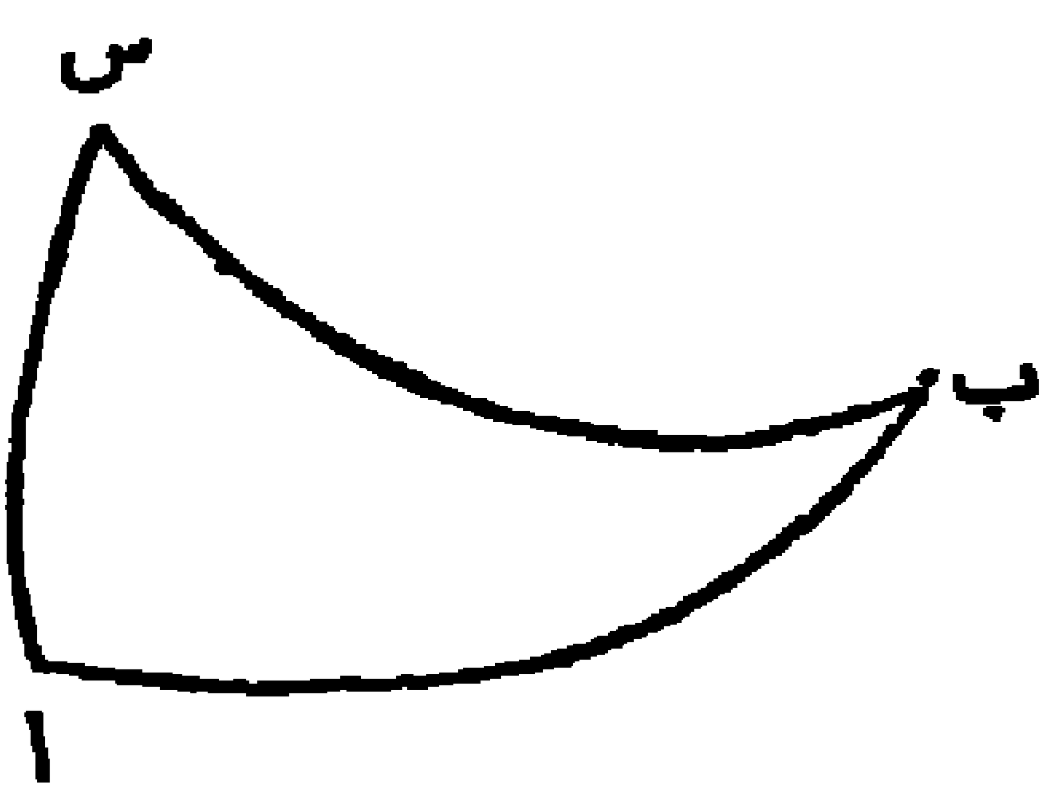
في مثلث كروي ذي قائمة تكون نسبة نظير جيب احد الضلعَين الى نصف القطر كنسبة نظير جيب الزاوية المقابلة ذلك الضلع الى جيب الزاوية الاخرى

ليرسم كما تقدم ثم في المثلث س ى ف جـ س ف : $\frac{١}{٢}$ ق :: جـ ى ف : جـ ى س ف (ق ١٩) ولكن جـ س ف = نجـ س ا وجـ ى ف = نجا ا ب س وجـ ى س ف = جـ ب س ا فاذاً نجـ س ا : $\frac{١}{٢}$ ق :: نجا ا ب س : جـ ب س ا

القضية الرابعة والعشرون

في مثلثات كروية ذات قوائم وغيرها تكون جيوب الاضلاع مناسبة لجيوب الزوايا التي تقابلها

اولاً. ليكن ا ب س ذا قائمة عند ا فحسب (ق ١٩) نسبة جيب الوتر ب س الى نصف القطر او الى جيب القائمة عند ا كجيب الضلع ا س الى جيب الزاوية عند ب وايضاً نسبة جيب ب س الى جيب الزاوية عند ا كجيب ا ب الى جيب الزاوية عند س و(ق ١١ ك ٥) جيب الضلع ا س الى جيب الزاوية عند ب كجيب ا ب الى جيب الزاوية عند س



ثانياً. ليكن ا ب س مثلثاً كروياً غير ذي قائمة فتكون نسبة جيب احد اضلاعهِ مثل ب س الى جيب الآخرين ا س كنسبة جيب الزاوية عند ا الى جيب الزاوية عند ب. من س ارسم قوس دائرة عظيمة س د عمودية على ا ب. ففي المثلث ذي القائمة ب س د تكون نسبة جـ ب س : $\frac{1}{2}$ ق :: جـ س د : جـ ب (ق ١٩) وفي المثلث ا د س جيب ا س : $\frac{1}{2}$ ق :: جيب س د : جيب ا فبالمساواة بالقلب جـ ب س : جـ ا س :: جـ ا : جـ ب. وهكذا يبرهن ايضاً ان جـ ب س : جـ ا ب :: جـ ا : جـ س

القضية الخامسة والعشرون

في مثلث كروي غير ذي قائمة اذا رُسِمَت قوس عمودية من احدى الزوايا الى الضلع المقابل لها تكون نسبة نظير جيب احدى الزاويتين عند

القاعدة الى نظير جيب الاخرى كنسبة جيب احد قسمي الزاوية التي انقسمت بالعمودية الى جيب قسمها الآخر

ليرسم كما في القضية السابقة ولتكن س د عمودية على القاعدة ا ب فنسبة نظير جيب ب : نجا :: جب س د : جا س د

لانَّ (ق ٢٢) نجس د : ½ ق :: نجب : جد س ب وفي المثلث ذي القائمة ا س د نجس د : ½ق :: نجا : جا س د و (ق ١١ ك٥) نجب : جد س ب :: نجا : جا س د وبالمبادلة نجب : نجا :: جب س د : جا س د

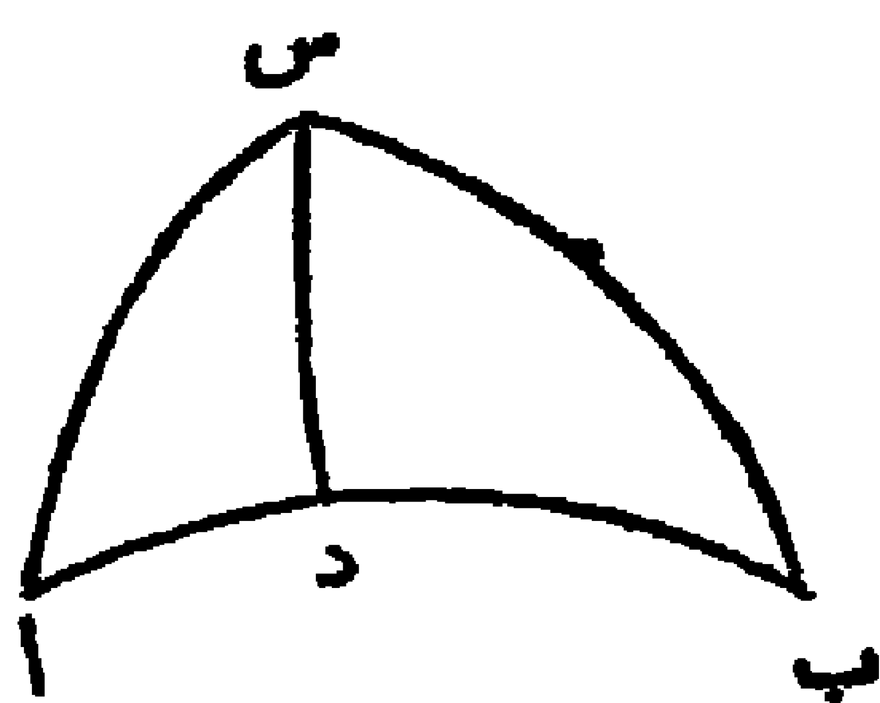
القضية السادسة والعشرون

ليفرض كما تقدم فنسبة نظير جيب ب س الى نظير جيب س ا كنسبة نظير جيب ب د الى نظير جيب د ا

لانهُ في المثلث ب س د (ق ٢٢) نجب س : نجب د :: د س : ½ ق وفي المثلث ا س د نجا س : نجا د :: نجد س : ½ ق و (ق ١١ ك٥) نجب س : نجب د :: نجا س : نجا د وبالمبادلة نجب س : نجا س :: نجب د : نجا د

القضية السابعة والعشرون

ليُرسَم كما تقدم فنسبة جيب ب د الى جيب د ا كنسبة مماسّ ب الى مماسّ ا بالتكافؤ





في المثلث ب س د (ق ١٨) جب د : ½ ق :: م د س : م ب وفي المثلث ا س د جا د : ½ ق :: م د س : م ا. فبالمبادلة بالقلب جب د : جا د :: م ا : م ب

القضية الثامنة والعشرون

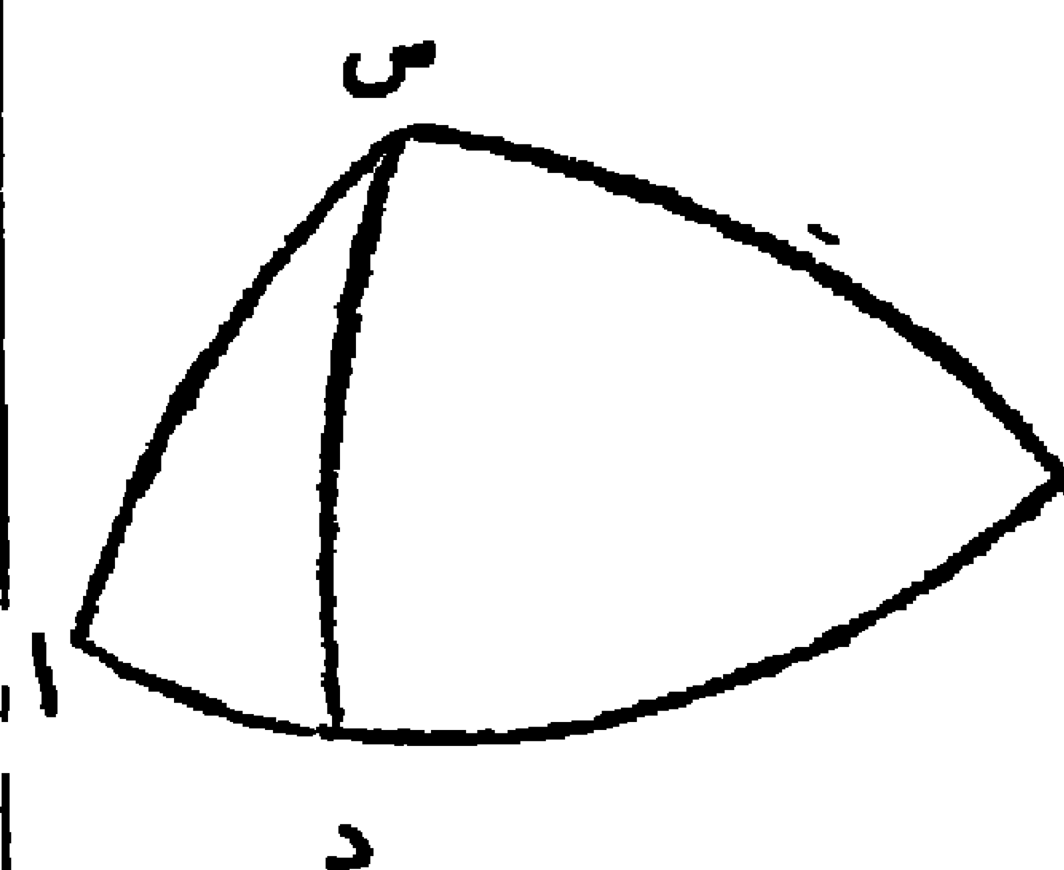
ليُرسَم كما تقدم فنسبة نظير جيب احدى الزاويتين الحادثتين بالعمودية الى نظير جيب الاخرى كنسبة مماسّ احد الضلعين الى مماس الآخر بالتكافؤ

لأنّ (ق ٢١) نجب س د : $\frac{1}{2}$ق :: م س د : م ب س وايضاً نجا س د : $\frac{1}{2}$ق :: م س د : م ا س فبالمبادلة بالقلب نجب س د : نجا س د :: م ا س : م ب س

القضية التاسعة والعشرون

في مثلثٍ كروي اذا رُسِمَتْ قوسٌ عموديَّةٌ من احدى زواياه الى الضلع المقابل او القاعدة فالقائم الزوايا مسطح مماسّ نصف مجتمع قسمي القاعدة في مماسّ نصف فضلتهما يعدل القائم الزوايا مسطَّح مماسّ نصف مجتمع ضلعَي المثلث في مماسّ فضلتهما

ليكن ا ب س مثلثاً كروياً ولتُرسَم القوس س د من الزاوية عند س عمودية على القاعدة ا ب ثم لنفرض ب س = ا وا س = ب وب د = م وا د = ن فالقائم الزوايا م $\frac{1}{2}$(م + ن) × م $\frac{1}{2}$(م − ن) = م $\frac{1}{2}$(ا+ب) × م $\frac{1}{2}$(ا−ب)



لانهُ (ق ٣٦) نجا : نجب :: نجم : نجن و(ق ٣ ك ٥) نجا + نجب : نجا − نجب :: نجم + نجن : نجم − نجن و(ق ١ فرع ٢ مثلثات مستوية) نجا + نجب : نجا − نجب :: نم $\frac{1}{2}$ (ا+ب) : نم $\frac{1}{2}$ (ا−ب) وايضاً نجم + نجن : نجم − نجن :: نم $\frac{1}{2}$ (م+ن) : نم $\frac{1}{2}$ (م−ن) فتكون (ق ١١ ك ٥) نم $\frac{1}{2}$ (ا+ب) : م $\frac{1}{2}$ (ا−ب) :: نم $\frac{1}{2}$ (م+ن) :

م ½ (م−ن) ونسبة الاشكال القائمة الزوايا بعضها الى بعض اذا كانت على علوّ واحدٍ هي كنسبة قواعدها بعضها الى بعض فتكون نسبة م ½ (ا+ب)×ظم ½ (ا+ب) : م ½ (ا+ب)×م ½ (ا−ب) :: م ½ (م+ن)×ظم ½ (م+ن) : م ½ (م+ن)×م ½ (م−ن). فالجزؤ الاول من هذه النسبة والثالث متساويان لانّ كل واحد منهما يعدل مربّع نصف القطر (فرع اول مثلثات بسيطة) فالثاني والرابع متساويان (ق ٩ ك ٥) او م ½ (م+ن)×م ½ (م−ن) = م ½ (ا+ب)×م ½ (ا−ب) او بترجيع الحروف الاصلية م ½ (ب د+ا د)×م ½ (ب د−ا د) = م ½ (ب س+ا س)×م ½ (ب س−ا س)

فرع اول. لانّ اضلاع اشكال متساوية ذات زوايا قائمة هي متناسبة بالتكافؤ فنسبة م ½ (ب د + ا د) : م ½ (ب س+ا س) :: م ½ (ب س−ا س) : م ½ (ب د−ا د)

فرعٌ ثانٍ. اذا وقعت العمودية س د داخل المثلث فلنا ب د + ا د = ا ب القاعدة واذا وقعت س د خارج المثلث ب د − ا د = ا ب فعلى الحالة الاولى تصير النسبة السابقة في الفرع الاول هكذا

م ½ ا ب : م ½ (ب س+ا س) :: م ½ (ب س−ا س) : م ½ (ب د−ا د) وفي الحالة الثانية تصير بالقلب والمبادلة

م ½ ا ب : م ½ (ب س+ا س) :: م ½ (ب س−ا س) : م ½ (ب د+ا د)

تنبيه * هذه القضية والاثنتان الآتيتان قد وضعهنّ المعلم نابيير الاسكوتسي وهنّ جزيلات الفائدة لسهولة استعمالهنّ في الانساب

القضية الثلثون

في مثلثٍ كرويٍّ اذا رُسِمَتْ عموديّةٌ من احدى زواياه على الضلع المقابل او القاعدة تكون نسبة جيب مجتمع الزاويتين عند القاعدة الى جيب فضلتهما كنسبة مماسّ نصف القاعدة الى مماسّ نصف فضلة قسميها اذا وقعت العموديّة داخل المثلث. وكنسبة نظير مماس نصف القاعدة الى

نظير مماسّ مجتمع قسميها اذا وقعت العموديّة خارج المثلث. ونسبة جيب مجتمع الضلعين الى جيب فضلتهما كنسبة نظير مماسّ نصف الزاوية بين الضلعين الى مماسّ نصف فضلة الزاويتين الحادثتين بين الضلعين والعموديّة اذا وقعت داخل المثلث. والى مماسّ نصف مجتمعها اذا وقعت العموديّة خارج المثلث

ليكن اب س مثلثاً كروياً وا د عموديّة على القاعدة ب س فنسبة جـ (س + ب) : جـ (س − ب) :: م ½ ب س : م ½ (ب د − د س) اذا وقعت ا د داخل المثلث وجـ (س + ب) : جـ (س − ب) :: نم ½ ب س : نم ½ (ب د + د س) اذا وقعت ا د خارج المثلث وايضاً جـ (ا ب + ا س) : جـ (ا ب − ا س) :: نم ½ ب ا س : م ½ (ب ا د − س ا د) اذا وقعت ا د داخل المثلث وجـ (ا ب + ا س) : جـ (ا ب − ا س) :: نم ½ ب ا س : نم ½ (ب ا د + س ا د) اذا وقعت ا د خارج المثلث

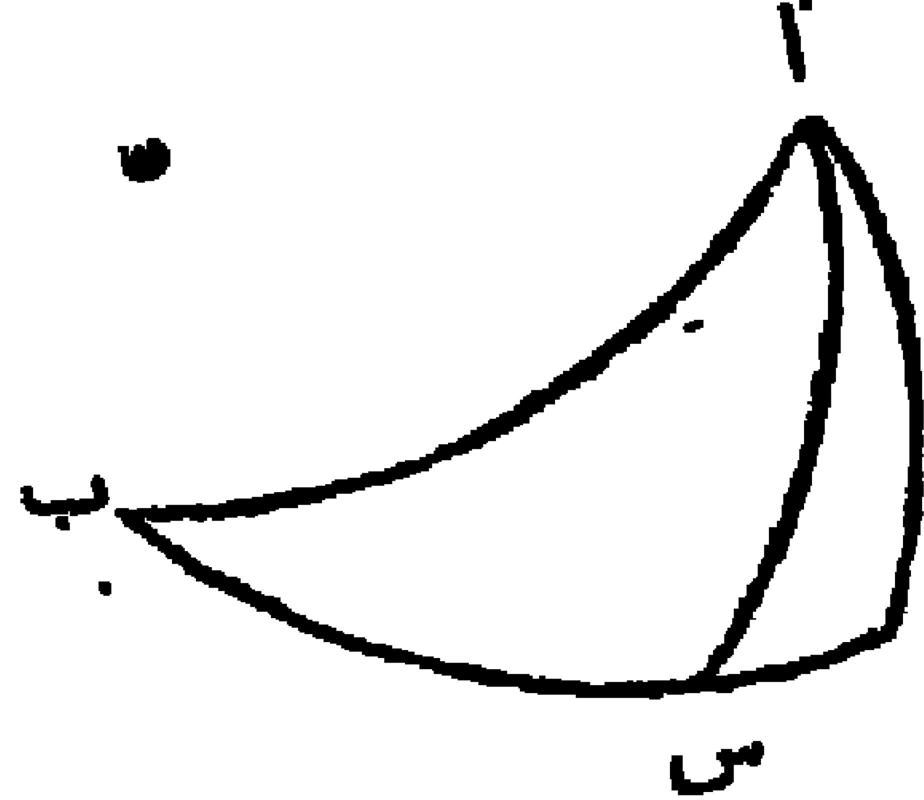


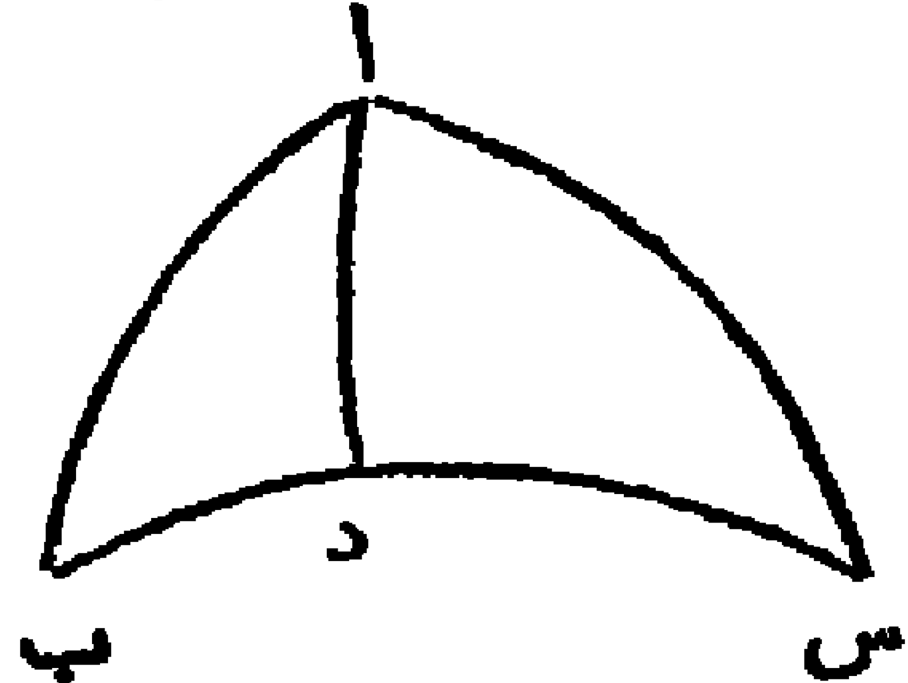
لانهُ في المثلث ب ا س (ق ٢٧) م ب : م س :: جـ س د : جـ ب د و (ق ٥ ك ٥) م س + م ب : م س − م ب :: جـ ب د + جـ س د : جـ ب د − جـ س د وحسب السابقة التي تتلو هذه القضية م س + م ب . م س − م ب :: جـ (س + ب) : جـ (س − ب) وايضاً جـ ب د + جـ س د : جـ ب د − جـ س د :: م ½ (ب د + س د) : م ½ (ب د − س د) (ق ٣ مثلثات بسيطة) و (ق ١١ ك ٥) جـ (س + ب) : جـ (س − د) :: م ½ (ب د + س د) : م ½ (ب د − س د)

واذا وقعت ا د داخل المثلث ب د + س د = ب س فنسبة جـ (س + ب) : جـ (س − ب) :: م ½ ب س : م ½ (ب د − س د) واذا وقعت ا د خارج المثلث ب د − س د = ب س فنسبة جـ (س + ب) : جـ (س − ب) :: م ½ (ب د +

س د) : م $\frac{1}{2}$ ب س او لكون ماسّي قوسين كنظيرَي ماسّيها بالتكافؤ جـ (س + ب) : جـ (س − ب) :: نم $\frac{1}{2}$ ب س : نم $\frac{1}{2}$ (ب د + س د)

بقي ان نبرهن القسم الثاني من هذه القضية . فلانّ (ق ٣٨) م ا ب : م ا س :: نجـ س ا د : نجـ ب ا د تكون م ا ب + م ا س : م ا ب − م ا س :: نجـ س ا د + نجـ ب ا د : نجـ س ا د − نجـ ب ا د وحسب السابقة المذكورة اسفل م ا ب + م ا س : م ا ب − م ا س :: جـ (ا ب + ا س) : جـ (ا ب − ا س) و (فرع اول ق ٢ مثلثات بسيطة) نجـ س ا د + نجـ ب ا د : نجـ س ا د − نجـ ب ا د :: نم $\frac{1}{2}$ (ب ا د + س ا د) : م $\frac{1}{2}$ (ب ا د − س ا د) فاذاً (ق ١١ ك ٥) جـ (ا ب + ا س) : جـ (ا ب − ا س) :: نم $\frac{1}{2}$ (ب ا د + س ا د) : م $\frac{1}{2}$ (ب ا د − س ا د)





فاذا وقعت ا د داخل المثلث ب ا د + س ا د = ب ا س فنسبة جـ (ا ب + ا س) : جـ (ا ب − ا س) :: نم $\frac{1}{2}$ ب ا س : م $\frac{1}{2}$ (ب ا د − س ا د)

واذا وقعت ا د خارج المثلث ب ا د − س ا د = ب ا س فنسبة جـ (ا ب + ا س) : جـ (ا ب − ا س) :: نم $\frac{1}{2}$ (ب ا د + س ا د) : م $\frac{1}{2}$ ب ا س او لانّ نم $\frac{1}{2}$ (ب ا د + س ا د) : م $\frac{1}{2}$ ب ا س :: نم $\frac{1}{2}$ ب ا س : م $\frac{1}{2}$ (ب ا د + س ا د) فتكون نسبة جـ (ا ب + ا س) : جـ (ا ب − ا س) :: نم $\frac{1}{2}$ ب ا س : م $\frac{1}{2}$ (ب ا د + س ا د)

سابقة

نسبة مجتمع ماسّي قوسَين الى فضلة ماسَّيها كنسبة جيب مجتمع القوسَين الى جيب فضلتهما

ليكن ا وب قوسين فنسبة م ا + م ب : م ا − م ب :: جـ (ا + ب) : جـ (ا − ب) لانهُ (حسب ع٦ فصل ٣ مثلثات بسيطة) جـ ا × نجـ ب + نجـ ا ×

ا جـ ب = جـ (ا + ب) فبالقسمة على تجـ ا × تجـ ب لنا

$\frac{\text{جـ ا}}{\text{تجـ ا}} + \frac{\text{جـ ب}}{\text{تجـ ب}} = \frac{\text{جـ (ا + ب)}}{\text{تجـ ا × تجـ ب}}$ ولانّ $\frac{\text{جـ ا}}{\text{تجـ ا}}$ = م ا لنا

م ا + م ب = $\frac{\text{جـ (ا + ب)}}{\text{تجـ ا × تجـ ب}}$ وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان

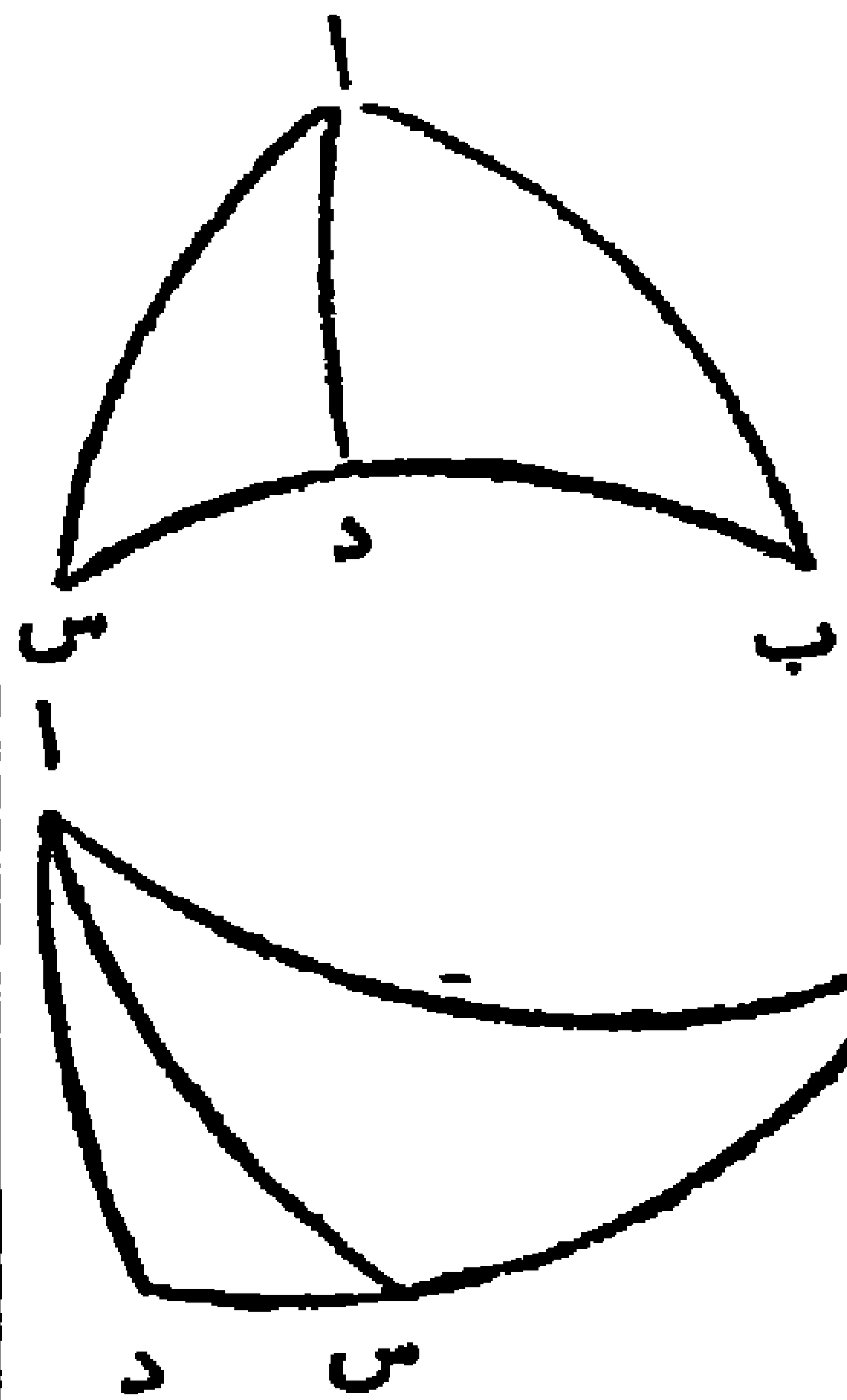
م ا − م ب = $\frac{\text{جـ (ا − ب)}}{\text{تجـ ا × تجـ ب}}$ فاذًا نسبة

م ا + م ب : م ا − م ب :: جـ (ا + ب) : جـ (ا − ب)

القضية الحادية والثلثون

في مثلث كرويّ تكون نسبة جيب نصف مجتمع زاويتَين منه الى جيب نصف فضلتهما كنسبة مماسّ نصف الضلع الذي يلي الزاويتين الى مماس نصف فضلة الضلعين اللذَين يقابلان الزاويتين ونسبة نظير جيب نصف مجتمع هاتين الزاويتين الى نظير جيب فضلتهما كنسبة مماسّ نصف الضلع الذي يليهما الى مماسّ نصف مجتمع الضلعين اللذين يقابلانهما

لنفرض ان س + ب = ٢ ص وس − ب = ٢ ض والقاعدة ب س = ٢ ب وفضلة قسمَي القاعدة اي ب د − ب س = ٢ ك



فلانّ (ق ٣٠) جـ (س + ب) : جـ (س − ب) :: م ½ ب س : م ½ (ب د − س د) تكون نسبة جـ ٢ ص : جـ ٢ ض :: م ب : م ك ولكن جـ ٢ ص = جـ (ص + ص) = ٢ جـ ص × تجـ ص (فصل ثالث مثلثات بسيطة) وايضًا جـ ٢ ض = ٢ جـ ض × تجـ ض فلنا جـ ص × تجـ ص : جـ ض × تجـ ض :: م ب : م ك. ثم في المثلث الكروي ا ب س قد تبرهن

ان نسبة جـ س + جـ ب : جـ س − جـ ب :: جـا ب + جـا س : جـا ب − جـا س و(حسب ع٢ فصل ٢ مثلثات بسيطة) جـ س + جـ ب = ٢ جـ $\frac{1}{2}$ (س + ب) + نجـ $\frac{1}{2}$ (س − ب) = ٢ جـ ص × نجـ ض وجـ س − جـ ب = ٢ نجـ $\frac{1}{2}$ (س + ب) × جـ $\frac{1}{2}$ (س − ب) = ٢ نجـ ص × جـ ض فاذًا نسبة ٢ جـ ص × نجـ ض : ٢ نجـ ص × جـ ض :: جـا ب + جـا س : جـا ب − جـا س واذا فُرِض ان $\frac{1}{2}$ (ا ب + ا س) = ط و $\frac{1}{2}$ (ا ب − ا س) = ظ (ق٢ مثلثات بسيطة) جـا ب + جـا س : حـا ب − جـا س :: م $\frac{1}{2}$ (ا ب + ا س) : م $\frac{1}{2}$ (ا ب − ا س) :: م ط : م ظ فنسبة جـ ص × نجـ ض : نجـ ص × جـ ض :: م ط : م ظ

ولأنّ $\frac{\text{م ك}}{\text{م ب}} = \frac{\text{جـ ض} \times \text{نجـ ض}}{\text{جـ ص} \times \text{نجـ ص}}$ و $\frac{\text{م ظ}}{\text{م ط}} = \frac{\text{نجـ ص} \times \text{جـ ض}}{\text{جـ ص} \times \text{نجـ ض}}$

فبضرب اشياء متساوية في اشياء متساوية تصير

$\frac{\text{م ك}}{\text{م ب}} \times \frac{\text{م ظ}}{\text{م ط}} = \frac{(\text{حـ ض})^2 \times \text{نجـ ص} \times \text{نجـ ض}}{(\text{جـ ص})^2 \times \text{نجـ ص} \times \text{نجـ ض}} = \frac{(\text{جـ ض})^2}{(\text{جـ ص})^2}$ ولكن (ق ٢٩) $\frac{\text{م } \frac{1}{2} (\text{ب د} - \text{د س})}{\text{م } \frac{1}{2} (\text{ا ب} - \text{ا س})} = \frac{\text{م } \frac{1}{2} (\text{ا ب} + \text{ا س})}{\text{م } \frac{1}{2} \text{ ب س}}$ او $\frac{\text{م ك}}{\text{م ظ}} = \frac{\text{م ط}}{\text{م ب}}$ فاذًا $\frac{\text{م ك}}{\text{م ب}} = \frac{\text{م ط} \times \text{ط}}{(\text{م ب})^2}$ وايضًا $\frac{\text{م ك}}{\text{م ب}} = \frac{\text{م ظ}}{\text{م ط}} = \frac{\text{م ظ}^2}{\text{م ب}^2}$ ولكن $\frac{\text{م ك}}{\text{م ب}} \times \frac{\text{م ظ}}{\text{م ط}} = \frac{(\text{جـ ض})^2}{(\text{جـ ص})^2}$ فاذًا $\frac{(\text{م ظ})^2}{(\text{م ب})^2} = \frac{(\text{جـ ض})^2}{(\text{حـ ص})^2}$ و $\frac{\text{م ظ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{جـ ض}}{\text{جـ ص}}$ او نسبة جـ ص : جـ ض :: م ب : م ظ او جـ (س + ب) : جـ (س − ب) :: م $\frac{1}{2}$ ب س : م $\frac{1}{2}$ (ا ب − ا س) وهذا القسم الاول من القضية

ايضًا لانّ $\frac{\text{م ظ}}{\text{م ط}} = \frac{\text{نجـ ص} \times \text{جـ ض}}{\text{جـ ص} \times \text{نجـ ض}}$ او بالقلب $\frac{\text{م ط}}{\text{م ظ}} = \frac{\text{جـ ص} \times \text{نجـ ض}}{\text{نجـ ص} \times \text{جـ ض}}$

ولأنّ $\frac{\text{م ك}}{\text{م ب}} = \frac{\text{جـ ض} \times \text{نجـ ض}}{\text{جـ ض} \times \text{نجـ ص}}$ فبالضرب لنا $\frac{\text{م ك}}{\text{م ب}} \times \frac{\text{م ط}}{\text{م ظ}} = \frac{(\text{نجـ ص})^2}{(\text{نجـ ص})^2}$. وقد تبرهن ان $\frac{\text{م ك}}{\text{م ب}} = \frac{\text{م ط} \times \text{م ظ}}{(\text{م ب})^2}$ فاذًا $\frac{\text{م ك}}{\text{م ب}} \times \frac{\text{م ط}}{\text{م ظ}} = \frac{(\text{م ط})^2}{(\text{م ب})^2}$ وقد تبرهن ان $\frac{\text{م ك}}{\text{م ب}} \times \frac{\text{م ط}}{\text{م ظ}} = \frac{(\text{نجـ ض})^2}{(\text{نجـ ص})^2}$ فاذًا $\frac{(\text{نجـ ض})^2}{(\text{نجـ ص})^2} =$

$\frac{(\text{م ط})^2}{(\text{م ب})^2}$ وبالنتيجة $\frac{\text{نجـ ض}}{\text{نجـ ص}} = \frac{\text{م ط}}{\text{م ب}}$ او نسبة نجـ ص : نجـ ض :: م ب : م ط او نجـ (س+ب) : نجـ (س−ب) :: م $\frac{1}{2}$ ب س : م $\frac{1}{2}$ (س+ب)

وهذا القسم الثاني من القضية

فرعٌ اول. اذا وضع برهان هذه القضية على الزاوية المتمة ا ب س (ق ١١) فبما ان جيب نصف مجتمع متمّي قوسين او نصف فضلتهما هو جيب نصف مجتمع القوسَين او نصف فضلتهما وهكذا في نظير الجيوب والماسات لنصف مجتمع قوسَين متمين او لنصف فضلتهما وبما ان مماسّ نصف متمّ قوس هو نظير المماسّ لنصف القوس فالنتيجة هي ان في مثلث كروي تكون نسبة جيب نصف مجتمع ضلعين الى جيب نصف فضلتهما كنسبة نظير مماس نصف الزاوية بينهما الى مماس نصف فضلة الزاويتين اللتين تقابلانهما وايضًا نسبة نظير جيب نصف مجتمع هذين الضلعَين الى نظير جيب نصف فضلتهما كنسبة نظير مماسّ نصف الزاوية بينهما الى مماس نصف مجتمع الزاويتين المقابلتين لهما

فرعٌ ثانٍ. اذا فرض ا ب س الزوايا الثلاث لمثلث كروي وأَ بَ سَ الاضلاع المقابلة لها فلنا هذه النسب

(١) جـ $\frac{1}{2}$ (ا+ب) : جـ $\frac{1}{2}$ (ا−ب) :: م $\frac{1}{2}$ سَ : م $\frac{1}{2}$ (أَ−بَ)

(٢) نجـ $\frac{1}{2}$ (ا+ب) : نجـ $\frac{1}{2}$ (ا−ب) :: م $\frac{1}{2}$ سَ : م $\frac{1}{2}$ (أَ+بَ)

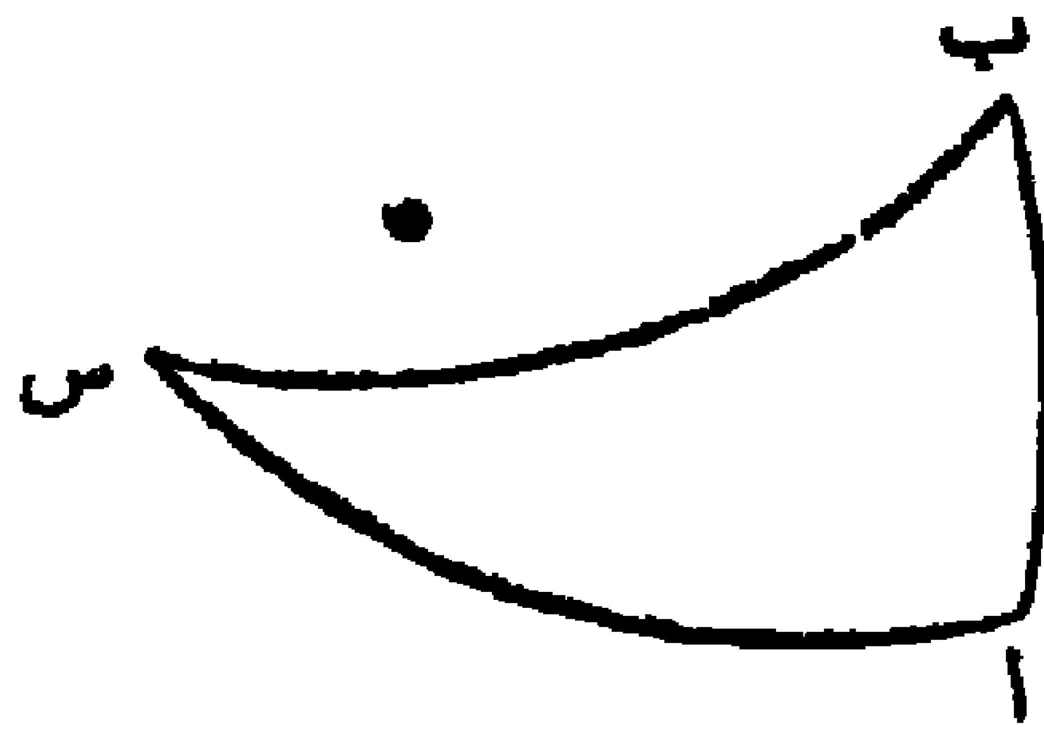
(٣) جـ $\frac{1}{2}$ (أَ+بَ) : جـ $\frac{1}{2}$ (أَ−بَ) :: م $\frac{1}{2}$ س : م $\frac{1}{2}$ (ا−ب)

(٤) نجـ $\frac{1}{2}$ (أَ+بَ) : نجـ $\frac{1}{2}$ (أَ−بَ) :: م $\frac{1}{2}$ س : م $\frac{1}{2}$ (ا+ب)

عملية اولى

في مثلث كرويّ قائم الزاوية مفروض شيئان من اجزائهِ الستة غير القائمة فعلينا ان نجد الثلاثة الاخر

هذه العملية لها ست عشرة حالة متضمنة في هذا الجدول مبنيّة على المثلث ا ب س ذي القائمة عند ا



مفروض	مطلوب	الحل		
ب س	ا س	½ق : جـ ب س :: جـ ب : جـ ا س	(١٩)	١
و	ا ب	½ق : ظجـ ب :: ظ ب س : ظ ا ب	(٢١)	٢
ب	س	½ق : ظجـ ب س :: ظ ب : ظم س	(٢٠)	٣
ا س	ا ب	½ق : جـ ا س :: ظ س : ظ ا ب	(١٨)	٤
و	ب س	ظجـ س . ½ق :: ظ ا س : ظ ب س	(٢١)	٥
س	ب	½ق : ظجـ ا س :: جـ س : ظجـ ب	(٢٣)	٦
ا س	ا ب	ظ ب : ظ ا س :: ½ق : جـ ا ب	(١٨)	٧
و	ب س	حـ ب جـ ا س :: ½ق : جـ ب س	(١٩)	٨
ب	س	ظجـ ا س : ظجـ ب :: ½ق : جـ س	(٢٣)	٩
ا س	ا ب	ظجـ ا س : ظجـ ب س :: ½ق : ظجـ ا ب	(٢٢)	١٠
و	ب	حـ ب س : جـ ا س :: ½ق : جـ ب	(١٩)	١١
ب س	س	ظ ب س : ظ ا س :: ½ق : ظجـ س	(٢١)	١٢
ا ب	ب س	½ق : ظجـ ا ب :: ظجـ ا س : ظجـ ب س	(٢٢)	١٣
و	ب	جـ ا ب : ½ق :: ظ ا س . ظ ب	(١٨)	١٤
ا س	س	جـ ا س : ½ق :: ظ ا ب : ظ س	(١٨)	١٤
ب	ا ب	جـ ب : ظجـ س :: ½ق : ظجـ ا ب	(٢٣)	١٥
و	ا س	جـ س : ظجـ ب :: ½ق : ظجـ ا س	(٢٣)	١٥
س	ب س	ظ ب : ظم س :: ½ق : ظجـ ب س	(٢٠)	١٦

جدول تُعرَف بهِ اجناس الاضلاع والزوايا المستعملة في الجدول السابق	
ا س وب من جنس واحد	١
اذا كان ب س < ٩٠° يكون ا ب وب من جنس واحد والاّ فمختلفتان (فرع ١٥)	٢
اذا كان ب س < ٩٠° يكون س وب من جنس واحد والاّ فمختلفتان (١٥)	٣
ا ب وس من جنس واحد (١٤)	٤
اذا كان ا س وس من جنسٍ واحدٍ يكون ب س < ٩٠° والاّ فيكون ب س> ٩٠° (فرع ١٥)	٥
ب وا س من جنس واحد	٦
ملتبس	٧
ملتبس	٨
ملتبس	٩
اذا كان ب س < ٩٠° يكون ا ب وا س من جنس واحد والاّ فمختلفان (١٥)	١٠
ا س وب من جنس واحد (١٤)	١١
اذا كان ب س < ٩٠° يكون ا س وس من جنس واحد والاّ فمختلفان (فرع ١٥)	١٢
ب س < ٩٠° اذا كان ا ب وا س من جس واحد (فرع اول ١٥)	١٣
ب وا س من جنس واحد (١٤)	١٤
س وا ب من جنس واحد (١٤)	١٤
ا ب وس من جنس واحد (١٤)	١٥
ا س وب من جس واحد (١٤)	١٥
اذا كانت ب وس من جس واحد يكون ب س < ٩٠° والاّ فيكون ب س> ٩° (١٥)	١٥

تنبيه * يراد بالملتبس ان المطلوب لهُ قيمتان اي زاوية ما او متمّها

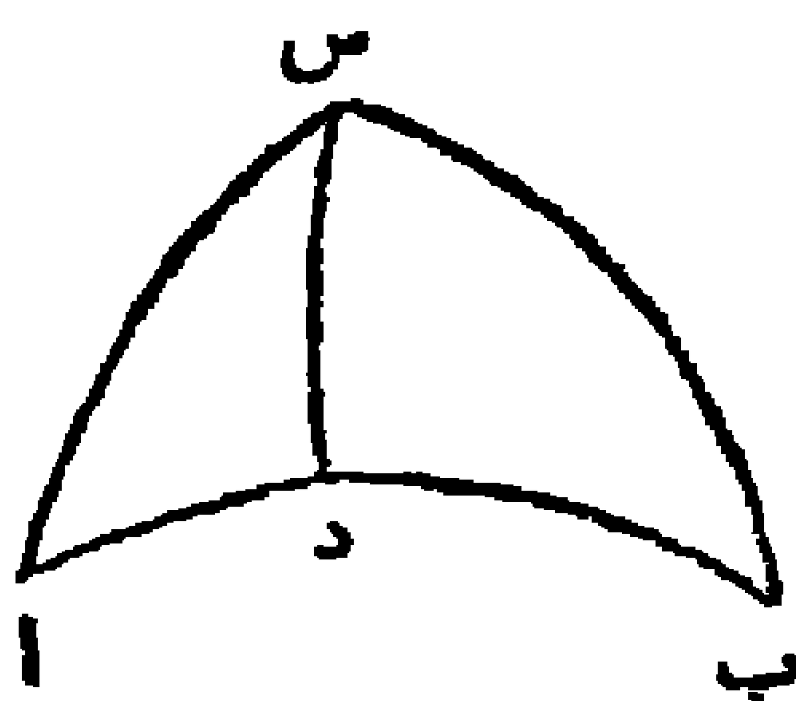
هذا الجدول مثل الاول غير انهُ قد فرض فيهِ انَّ اَ = الضلع الذي يقابل الزاوية القائمة ا وبَ = الضلع الذي يقابل الزاوية ب وسَ = الضلع الذي يقابل الزاوية س

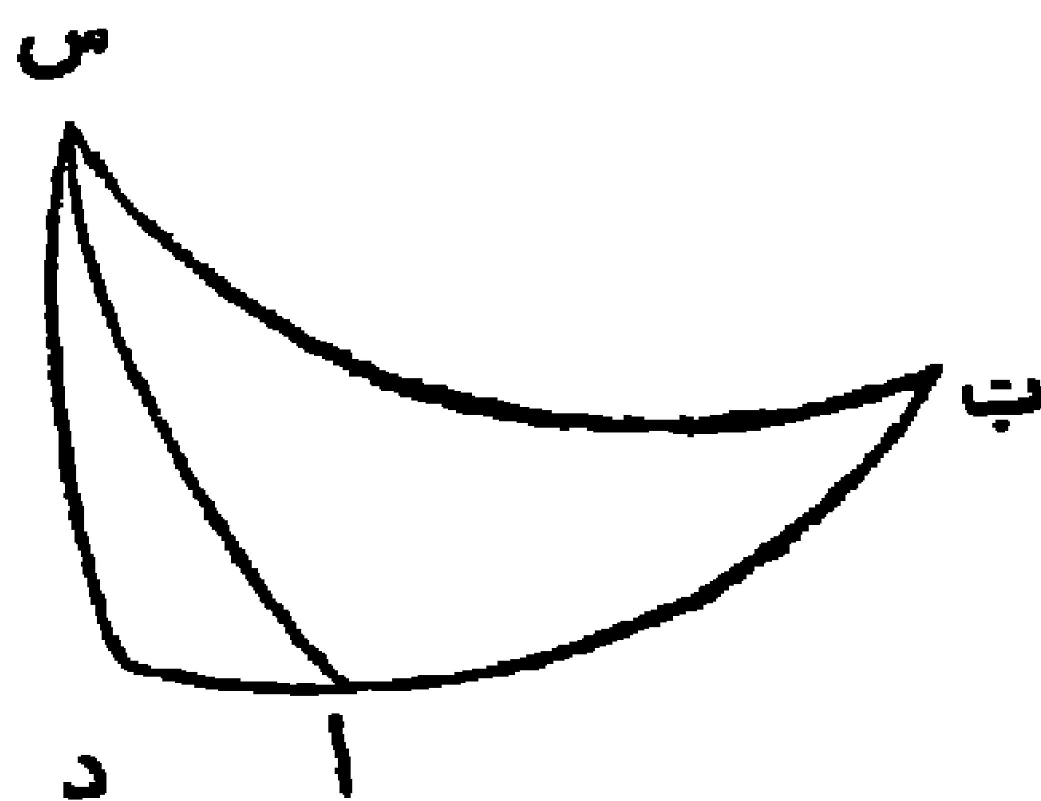
اَ وب	بَ	جبَ = جاَ × جب	١
	سَ	مسَ = ماَ × نجب	٢
	س	نس = ناَ × مب	٣
بَ وس	سَ	مسَ = جبَ × مس	٤
	اَ	ماَ = مب′ / نجس	٥
	ب	نجب = نجبَ × جس	٦
بَ وب	سَ	جسَ = مب′ / مب	٧
	اَ	جاَ = جب′ / جب	٨
	س	جس = نجب / نجب′	٩
اَ وبَ	سَ	جسَ = نجا′ / نجب′	١٠
	ب	جب = حب′ / جا′	١١
	س	نجس = مب′ / ما′	١٢
بَ وسَ	اَ	نجاَ = نجبَ × نجسَ	١٣
	ب	مب = مب′ / حس′	١٤
	س	مس = مس′ / جب′	١٤
ب وس	سَ	نجسَ = نجس / جب	١٥
	بَ	نجبَ = نجب / جس	١٥
	اَ	نجاَ = نس / مب	١٦

عملية ثانية

في مثلث كروي غير ذي قائمة مفروض ثلاثة اشياء من ستة فعلينا أن نجد الثلاثة الأُخَر

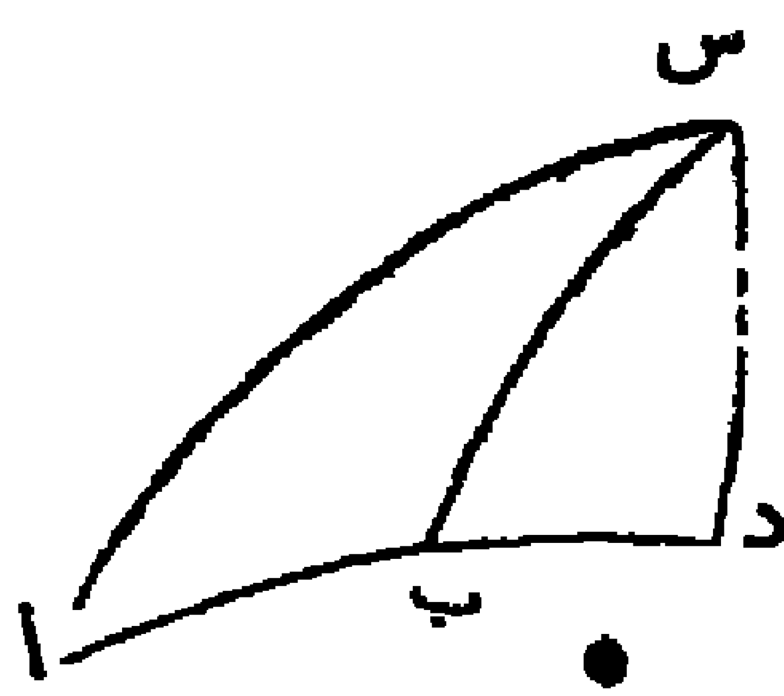
تنبيه . في هذا الجدول اذا رايت حرف الحاء قدام رقم هندي هكذا (حـ ٤) فالاشارة بذلك الى الحالات في الجدول السابق . والاعداد وحدها تشير الى قضايا اصول المثلثات الكروية





مفروض	مطلوب	الحل	
الضلعان ا ب ا س والزاوية بينهما ا	احدى الزاويتين الاخريين ب	ارسم العمودية س د من الزاوية المجهولة على ا ب فنسبة ½ق : نجا :: م ا س : م ا د (حـ ٢) فيُعرَف ب د وجـ ب د : جـ ا د :: م ا : م ب (٢٧) ب وا من جنس واحد اذا كان ا ب > ب د والا فيختلفان (١٦)	١
	الضلع الثالث ب س	ارسم العمودية س د من احدى الزاويتين المجهولتين على الضلع ا ب ثم نسبة ½ق : نجا :: م ا س : م ا د (حـ ٢) فيُعرَف ب د ونجا د : نجـ ب د :: نجا س : نجـ ب س (٢٦) اذا كان ا د ود ب من جنس واحد يكون ا س وس ب من جنس واحد والا فيختلفان	٢

مفروض	مطلوب	الحل	
الزاويتان ا وا س ب والضلع بينهما ا س	الضلع ب س	من س طرف ا س الذي يلي الضلع المطلوب ارسم س د عمودية على ا ب ثم $\frac{1}{2}$ق : نجا س :: م ا : نم ا س د (حـ ٣) فتعرف ب س د ونسبة نجب ب س د : نجا ا س د :: م ا س : م ب س (٣٨) اذا كان ا وب س د من جنس واحد يكون ب س < ٩٠° والا فاكبر من ٩٠	٣
	الزاوية الثالثة ب	ارسم العمودية س د من احدى الزاويتين المفروضتين على ا ب الضلع المقابل ثم $\frac{1}{2}$ق : نجا س :: م ا : نم ا س د (حـ ٣) فتعرف ب س د ونسبة جا ا س د : جـ ب س د :: نجا ا : نجب ب (٣٥) اذا وقعت س د داخل المثلث او كانت ا س ب اكبر من ب س د تكون ب وا من جنس واحد والا فمختلفتان (١٦)	٤
	الزاوية ب التي تقابل الضلع الاخر المفروض ا س	جـ ب س : جـ ا س :: جـ ا : جـ ب (٣٤) جنس ب ملتبس الا اذا تعيّن كون ا + ب اكثر او اقل من ١٨٠° لكون ا س + ب س اكثر او اقل من ١٨٠° (١٠)	٥
ضلعان ا س وب س والزاوية ا التي تقابل احدها ب س	الزاوية ا س ب بين الضلعين المفروضين	من ا س ب الزاوية المطلوبة ارسم س د عمودية على ا س ب بين ا ب ثم $\frac{1}{2}$ق : نجا س :: م ا : نم ا س د (حـ ٣) وم ب س : م ا س :: نجا ا س د : نجب ب س د (٣٨) وا س د ± ب س د = ا س ب وهي ملتبسة	٦
	الضلع الثالث ا ب	ارسم س د عمودية من س الزاوية بين الضلعين المفروضين على ا ب ثم $\frac{1}{2}$ق : نجا ا :: م ا س : م ا د (حـ ٣) ونجا ا س : نجب ب س :: نجا ا د : نجب ب د (٣٦) وا ب = ا د ± ب د فيكون ا ب ملتبسًا	٧



مفروض	مطلوب	الحل	
	الضلع ب س المقابل الزاوية الاخرى المفروضة ا	جـ ب : جـ ا :: جـ ا س : جـ ب س (٣٤) وب س ملتبس الاَّ اذا تعين كون ا س + ب س اكثر او اقل من ١٨٠° حسبما كانت ا + ب اكثر او اقل من ١٨٠° (١٠)	٨
زاويتان ا وب والضلع ا س الذي يقابل احداها ب	الضلع ا ب الذي يلي الزاويتين المفروضتين ا وب	من الزاوية المجهولة س ارسم س د عمودية على ا ب ثم $\frac{1}{2}$ق : نجـ ا :: م ا س : م ا د (حـ ٣) وم ب : م ا :: جـ ا د : جـ ب د وب د ملتبس فاذاً ا ب = ا د ± ب د ولهُ اربع قيمات غير ان البعض منها يُخرَج بلزوم كون ا ب اقل من ١٨٠°	٩
	الزاوية الثالثة ا س ب	من الزاوية المطلوبة ارسم س د عمودية على ا ب ثم $\frac{1}{2}$ق : نجـ ا س :: م ا : نم ا س د (حـ ٣) ونجـ ا : نجـ ب :: جـ ا س د : جـ ب س د (٣٥) ب س د ملتبسة فاذاً ا س ب = ا س د ± ب س د ولها اربع قيمات غير ان البعض منها يُخرَج بلزوم كون ا س ب اقل من ١٨٠°	١٠

الاضلاع الثلثة ا ب ا س ب س	احدى الزوايا ا	من س احدى الزاويتين الغير المطلوبتين ارسم س د عمودية على ا ب . ثم استعلم قوساً ى حتى تكون نسبة م $\frac{1}{2}$ ا ب : م $\frac{1}{2}$ (ا س + ب س) :: م $\frac{1}{2}$ (ا س − ب س) : م $\frac{1}{2}$ ى . فاذا كان ا ب اكبر من ى فيكون ا ب مجتمع ا د و د ب و ى فضلتهما واذا كان ا ب اصغر من ى يكون مجتمع ا د و د ب و ا ب فضلتهما (٢٩) وعلى الحالتين ا د و ب د معروفان وم ا س : م ا د :: $\frac{1}{2}$ ق : نجـ ا	١١
الزوايا الثلاث ا و ب و س	احد الاضلاع ب س	افرض متمّات الزوايا ا و ب و س المفروضة اَ و بَ و سَ واحسبها اضلاع مثلث كروي واستعلم بالحالة السابقة الزاوية من هذا المثلث التي تقابل الضلع اَ فهي متمّ ضلع المثلث المفروض الذي يقابل الزاوية ا منهُ اي ب س (١١)	١٢

في هذا الجدول فُرِضَت الزوايا ا وب وس كما تقدم والاضلاع التي تقابلها ٦ وبَ وسَ وك وى يعدلان قسمي القاعدة او قسمي الزاوية التي تقابلها

مفروض	مطلوب	الحل	
ضلعان بَ وسَ والزاوية	ب	استعلم ك حتى ان م ك : م بَ × تجـ ا ثم م ب = (حـ ك × م ا) / (جـ (سَ ـ ك))	١
بينهما ا	٦	استعلم ك كما تقدم ثم تجـ اَ = (تجـ بَ × تجـ (سَ ـ ك)) / (تجـ ك)	٢
الزاويتان ا وس	اَ	استعلم ك حتى ان تم ك = تجـ بَ × م ا ثم م اَ = (م بَ × تجـ ك) / (تجـ (سَ ـ ك))	٣
والضلع بَ	ب	استعلم ك كما تقدم ثم تجـ ب = (تجـ ا × جـ (سَ ـ ك)) / (جـ ك)	٤
الضلعان	ب	جـ ب = (جـ بَ × جـ ا) / (جـ اَ)	٥
اَ وبَ	س	استعلم ك حتى ان تم ك = تجـ بَ × م ا ثم تجـ س = (تجـ ك × م بَ) / (م اَ)	٦
والزاوية ا	سَ	استعلم ك حتى ان م ك = م بَ × تجـ ا واستعلم ى حتى ان تجـ ى = (تجـ اَ × تجـ ك) / (تجـ تَ) سَ = ك ± ى	٧
	٦	جـ ٦ = (حـ بَ × حـ ا) / (حـ ب)	٨
الزاويتان ا وب	سَ	استعلم ك حتى ان م ك = م بَ × تجـ ا واستعلم ى حتى ان جـ ى = (حـ ك × م ا) / (م ب) سَ = ك ± ى	٩
والضلع بَ	سَ	استعلم ك حتى ان تم ك = تجـ بَ × م ا واستعلم ى حتى ان جـ ى = (حـ ك × تجـ ب) / (تجـ ا) سَ = ك ± ى	١٠

معروض	مطلوب	الحل	
اَ بَ سَ	ا	لنفرض ان اَ + بَ + سَ = صَ $\text{ج}\,\frac{1}{2}\,\text{ا} = \sqrt{\frac{\text{حـ}(\frac{1}{2}\text{ص}' - \text{ب}) \times \text{حـ}(\frac{1}{2}\text{ص}' - \text{س}')}{\text{حـ ب}' \times \text{حـ س}'}}$ او $\text{نجا}\,\frac{1}{2}\,\text{ا} = \sqrt{\frac{\text{حـ}\,\frac{1}{2}\text{ص} \times \text{حـ}(\frac{1}{2}\text{ص}' - \text{س})}{\text{حـ ب} \times \text{حـ س}'}}$	١١
ا ب س	اَ	لنعرض ان ا + ب + س = ص $\text{ج}\,\frac{1}{2}\,\text{اَ} = \sqrt{\frac{\text{نحـ}\,\frac{1}{2}\text{ص} \times \text{نحـ}(\frac{1}{2}\text{ص} - \text{ا})}{\text{حـ ب} \times \text{حـ س}}}$ او $\text{نجا}\,\frac{1}{2}\,\text{اَ} = \sqrt{\frac{\text{نحـ}(\frac{1}{2}\text{ص} - \text{ب})\,\frac{1}{2}\,\text{نحـ}(\text{ص} - \text{س})}{\text{حـ ب} \times \text{حـ س}}}$	١٢

19ع

خاتمة اصول قياس المثلثات الكروية

في قواعد الاجزاء الدائرة للمعلم نابير

قواعد الاجزاء الدائرة التي استخرجها المعلم نابير الاسكوتسي من اصول قياس المثلثات الكروية هي كثيرة الفوائد لسهولة حفظها واستعمالها في الحسابات بواسطة الانساب او اللوغارثمات

حدود

١ في مثلث كروي قائم الزاوية اذا غُضَّ النظر عن القائمة تبقى خمسة اجزاء اي ثلاثة اضلاع وزاويتان غير قائمتين فالضلعان المحيطان بالقائمة وكمالات الثلثة الأُخَر اي الزاويتين والوتر هي الاجزاء الدائرة مثال ذلك في المثلث ا ب س ذي القائمة عند ا فالاجزاء الدائرة هي ا س ا ب وكمالات ب وب س وس وسُمِّيَت بالاجزاء الدائرة لانها اذا عُدَّت على ترتيب تدور حول المثلث

٢ اذا أُخِذَ واحد من هذه الاجزاء الخمسة وسُمِّيَ الوسط فمن الاربعة الباقية اثنان واليان الوسط فهما المواليان احدهما عن يمين الوسط والآخر عن يساره والآخران هما المقابلان وبين كل واحد منهما والوسط واحدٌ من المواليين

مثال ذلك في المثلث ا ب س فالاجزاء الدائرة حسب الحدّ الاول هي ا س ا ب ٩ − ب ٩٠ − ب س ٩ − س واذا حسبنا ا س الوسط يكون ا ب و ٩ − س المواليين و ٩٠ − ب و ٩٠ − ب س المقابلين واذا حسبنا ا ب الوسط يكون ا س و ٩ − ب المواليين و ٩٠ − ب س و ٩٠ − س المقابلين واذا حسبنا ٩٠ − ب س الوسط يكون ٩٠ − ب و ٩ − س المواليين وا س وا ب المقابلين وهكذا الى آخره واذا تقرر ذلك فلتكن الاجزاء الدائرة هي في هذه

القضية

في مثلث كروي قائم الزاوية القائم الزوايا مسطح نصف القطر في جيب الوسط يعدل القائم الزوايا مسطح مماسي المواليين او يعدل مسطح نظيري جيبي المقابلين

تبرهن هذه القضية بان يجعل كل جزء وسطًا في نوبته ثم تقابل القضية على احد البراهين السابق ذكرها. فاذا جُعِل ب س وسطًا لنا ٩٠ — ب و ٩٠ — س المواليان وا ب وا س المقابلان وا ق × نجب س = نم ب × نم س (حسب ق ٣٠ فرع) وا ق × نجب س = نجا ب × نجا س (حسب ق ٢١)

فاذا قصدت ان تحل مسئلة بواسطة هذه القضية فانظر الى ايّ الاشياء المسمّاة اعني المفروضين والمطلوب يجعل وسطًا لكي يكون الآخران على بعدٍ واحدٍ منهُ فلا بدّ من وجود المطلوب في احدى النظريّتَين المذكورتين في القضية

فلو فُرِض ا ب وا س وكان المطلوب س فالامر واضح انهُ اذا جعل ا ب وسطًا يكون ب س وس المتابلَين وا ق × جا ب = جـ س × جـ ب س لان جـ س = نجـ (٩٠ — س) ونجـ (٩٠ — ب س) = جـ ب س فاذًا جـ س =
حـ ا ب
———
حـ ب س

ولو فُرِض ب س وس وكان ا س المطلوب فاذا جعل س وسطًا يكون ا س و ٩٠° — ب س المواليين وا ق × نجـ س = م ا س × نم ب س او م ا س = نجـ س / م ب س = نجـ س + حم ب س لانهُ قد تبرهن سابقًا ان ١ / م ب س = حم ب س

وقد استخرج المعلم نابيير من القضية الحادية والثلثين عبارات لحل المسائل في مثلث غير ذي قائمة. فليفرض كما تقدم زوايا المثلث ا وب وس والاضلاع التي تقابلها اَ وبَ وسَ ولنا اربعة احوال

(١)

مفروض ضلعان بَ وسَ والزاوية ا بينهما

مطلوب الزاويتان ب وس